Ficha 6 | Espaços vectoriais com produto interno

Aulas práticas de Álgebra Linear

Licenciatura em Engenharia Naval e Oceânica
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

$1^{\underline{o}}$ semestre 2020/21

Jorge Almeida e Lina Oliveira

Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

Índice

6

Espaços vectoriais com produto interno

Notação

Produto interno usual em $\mathbb{R}^n$: $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \mathbf{y}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$
Produto interno usual em $\mathbb{C}^n$: $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \overline{\mathbf{y}}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\overline{\mathbf{y}}$

Num espaço linear munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

Norma de um vector u: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$
Distância entre u e v: $\mathrm{d}(u, v) = \|u - v\|$
Projecção ortogonal do vector w sobre o vector v:

$$\operatorname{proj}_v w = \frac{\langle w, v \rangle}{\|v\|^2} v$$

Matriz ortogonal: $A^T A = A A^T = I$ (A matriz real)
Matriz hermitiana: $\overline{A}^T = A$
Matriz unitária: $\overline{A}^T A = A \overline{A}^T = I$

Observações

Nos exercícios seguintes, sempre que se pressuponha um produto interno não indicado explicitamente, subentende-se que se trata do produto interno usual.

Produtos internos em espaços vectoriais

6-1) Considere os vectores $\boldsymbol{u} = (4, 1, -2)$ e $\boldsymbol{v} = (2, -1, 3)$ de $\mathbb{R}^3$. Calcule:

a) $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|$
b) $\|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\|$
c) $\|-3\boldsymbol{u}\|$
d) $\frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v}$
e) $\left\|\frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v}\right\|$
f) $\measuredangle(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$
g) $\mathrm{d}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$

6-2) Sendo $\boldsymbol{v}=(-2,3,0,6)$, para que valores de α se verifica a igualdade $\|\alpha\boldsymbol{v}\|=5$?

6-3) Para que valores de α podemos afirmar que $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ são ortogonais?

a) $\boldsymbol{u}=(2,1,3)$, $\boldsymbol{v}=(1,7,\alpha)$
b) $\boldsymbol{u}=(\alpha,\alpha,1)$, $\boldsymbol{v}=(\alpha,5,6)$

6-4) Determine dois vectores com norma igual a um que sejam ortogonais aos três vectores seguintes:

$$\boldsymbol{u}=(2,1,-4,0) \qquad \boldsymbol{v}=(-1,-1,2,2) \qquad \boldsymbol{w}=(3,2,5,4)$$

6-5) Verifique a desigualdade de Cauchy–Schwarz para os vectores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{u}=(0,-2,2,1) \qquad \boldsymbol{v}=(-1,-1,1,1)$$

6-6) Determine todos os vectores de $\mathbb{R}^2$ de norma unitária que fazem um ângulo de $\pi/3$ radianos com o vector $(2,\sqrt{5})$.

6-7) Sejam $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Prove que:

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2+\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2=2\|\boldsymbol{u}\|^2+2\|\boldsymbol{v}\|^2$$

Interprete geometricamente esta igualdade para $n=2$.

6-8) Identifique os casos em que as seguintes identidades (com $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$) definem um produto interno em $\mathbb{R}^3$. Nos restantes casos, indique as propriedades que não são satisfeitas.

a) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1 v_1 + u_3 v_3$

b) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + u_3^2 v_3^2$

c) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 2u_1 v_1 + u_2 v_2 + 4u_3 v_3$

d) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1 v_1 - u_2 v_2 + u_3 v_3$

6-9) Identifique os casos em que as seguintes identidades (com $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ e $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$) definem um produto interno em $\mathbb{R}^4$. Nos restantes casos, indique as propriedades que não são satisfeitas.

a) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4$

b) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + u_3^2 v_3^2 + u_4^2 v_4^2$

c) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 2u_1 v_1 + u_2 v_2 + 4u_3 v_3 + u_4 v_4$

d) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1 v_1 + u_3 v_3$

6-10) Seja $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ um conjunto ortogonal de vectores de $\mathbb{R}^n$ tais que $\|\boldsymbol{u}\| = 1$ e $\|\boldsymbol{v}\| = 2$. Calcule $\mathrm{d}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, e interprete geometricamente este resultado para $n = 2$.

6-11) Sejam $\boldsymbol{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $\boldsymbol{v} = (\frac{2}{\sqrt{\alpha}}, \frac{2}{\sqrt{\alpha}})$. Quais são os valores de α para os quais o conjunto $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ é ortonormal?

6-12) Calcule:

a) $\mathrm{proj}_{(1,2)}(-1, -1)$.

b) $\mathrm{proj}_{(1,2,3)}(-\pi, -2\pi, -3\pi)$.

6-13) Utilize o método de Gram–Schmidt para obter uma base ortonormal para as expansões lineares dos seguintes conjuntos linearmente independentes.

a) $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$

b) $\{(1, 0, -1, 0), (-1, 2, 0, 1), (2, 0, 2, 1)\}$

6-14) Considere $\mathbb{C}^2$ munido do produto interno usual. Utilize o método de ortogonalização de Gram–Schmidt para obter uma base ortonormal de $\mathcal{L}\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}\}$.

a) $\boldsymbol{u_1} = (1, -3i) \qquad \boldsymbol{u_2} = (2i, 2i)$

b) $\boldsymbol{u_1} = (i, 0) \qquad \boldsymbol{u_2} = (1 + 3i, -5i)$

6-15) Considere a função $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2\,,$$

com $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ e $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$.

a) Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

b) Calcule $\|\boldsymbol{u}\|$ e $\mathrm{d}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, para $\boldsymbol{u} = (-1, 3)$ e $\boldsymbol{v} = (2, 5)$.

c) Determine o conjunto dos vectores $\boldsymbol{u}$ tais que $\|\boldsymbol{u}\| \leq 1$.

6-16) Seja $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o produto interno definido por

$$\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + x_1y_3 - 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_1 + 2x_3y_3\,,$$

com $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

a) Determine a matriz de Gram G dos vectores da base canónica $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$, considerando $\mathbb{R}^3$ munido com produto interno ϕ.

b) Verifique que G é uma matriz simétrica e definida positiva (isto é, $\mathbf{x}^T G \mathbf{x} > 0$ para $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, ou equivalentemente, os valores próprios de G são todos positivos).

c) Verifique que se tem a igualdade

$$\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{y}^T G \mathbf{x}.$$

As alíneas que se seguem dizem respeito ao produto interno ϕ.

d) Verifique que os vectores $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$ e $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$ não são ortogonais.

e) Determine $\mathrm{proj}_{\boldsymbol{e_1}} \boldsymbol{e}_2$.

f) Determine um vector ortogonal a $\boldsymbol{e}_1$.

g) Determine o ângulo entre $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$.

h) Utilize o método de ortogonalização de Gram–Schmidt para obter uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ a partir da base canónica de $\mathbb{R}^3$.

6-17) Seja W o subespaço linear de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$W = \{(x, y, z) \,:\, y = 2x \wedge x = y + z\}$$

Determine uma base e equações cartesianas de $W^\perp$.

6-18) Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido pela equação $x - 2y - 3z = 0$.

a) Determine equações cartesianas de $W^\perp$.

b) Calcule as distâncias de $(1, 0, -1)$ a W e a $W^\perp$.

6-19) Considere o hiperplano de $\mathbb{R}^4$:

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 2z - 2w = 0\}$$

a) Determine uma base para o subespaço linear $W^\perp$, e obtenha equações cartesianas de $W^\perp$.

b) Exprima o vector $\boldsymbol{w} = (1, 2, 1, -1)$ na forma

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2\,,$$

com $\boldsymbol{w}_1 \in W$ e $\boldsymbol{w}_2 \in W^\perp$.

c) Calcule as distâncias $\mathrm{d}\big((1, 2, 1, -1), W\big)$ e $\mathrm{d}\big((1, 2, 1, -1), W^\perp\big)$.

d) Prove a igualdade:

$$\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$$

6-20) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Sem efectuar quaisquer cálculos, justifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

i) $\dim \mathscr{L}(A) + \dim \mathscr{N}(A^T) = 4$.

ii) $\dim \mathscr{C}(A) + \dim \mathscr{N}(A^T) = 4$.

b) Determine uma base para o complemento ortogonal do núcleo de A.

c) Determine uma base para o complemento ortogonal do núcleo de A^T.

6-21) Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido pelas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -5t \\ z = 4t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Determine a projecção ortogonal $\mathrm{proj}_{W^\perp}(1,0,-1)$ do vector $(1,0,-1)$ sobre o subespaço $W^\perp$.

6-22) Determine equações cartesianas da recta que passa pelo ponto $(3,-1,2)$ e é paralela ao vector $(2,1,3)$.

6-23) Determine uma equação cartesiana do plano que contém o ponto $(1,-2,2)$ e a recta definida por:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t+1 \\ z = -3+2t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

6-24) Determine a distância do ponto $(3,-1,2,1)$ ao hiperplano $\{(x,y,z,w) : x + 2y - 2z - w = 4\}$.

6-25) Em $\mathbb{R}^3$, considere os pontos:

$$P_0 = (1,0,-1) \qquad P_1 = (0,1,0) \qquad P_2 = (1,1,1)$$

a) Determine equações cartesianas e paramétricas da recta que passa por P_0 e tem a direcção do vector $\boldsymbol{u} = (0,-1,-3)$.

b) Determine uma equação cartesiana do plano que passa por P_0 e é perpendicular à recta que passa por P_0 e tem a direcção do vector $\boldsymbol{n} = (1,0,1)$.

c) Determine uma equação cartesiana e equações paramétricas do plano definido por P_0, P_1 e P_2. Determine ainda um vector normal a este plano.

d) Determine a distância de $(1,1,0)$ ao plano da alínea anterior.

6-26) Determine o complemento ortogonal do subespaço linear de $\mathbb{P}_2$ gerado pelo polinómio $p(t) = (t+1)^2$, quando se considera definido em $\mathbb{P}_2$ o produto interno

$$\langle a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n, b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n \rangle = a_0 b_0 + \cdots + a_n b_n.$$

6-27) Considere a operação $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1/2)q(1/2) + p(1)q(1) \,,$$

para $p, q \in \mathbb{P}_2$.

a) Mostre que a função $\langle p, q \rangle$ é um produto interno em $\mathbb{P}_2$.

As alíneas que se seguem dizem respeito ao produto interno $\langle p, q \rangle$.

b) Calcule $\|p\|$, com $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$.

c) Calcule o ângulo entre os polinómios $p(t) = 1 - t^2$ e $q(t) = 1 + t + t^2$.

d) Sendo $W = \mathcal{L}\{1 - t^2\}$,

   i) determine uma base de $W^\perp$.

   ii) determine a distância de $q(t) = 1 + t + t^2$ a W e a $W^\perp$.

e) Determine uma matriz simétrica A tal que

$$\langle p, q \rangle = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \,,$$

para $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ e $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$.

6-28) Seja U o subespaço de $\mathbb{M}_{2\times 2}$ constituído pelas matrizes A tais que $A^T = -A$ (matrizes *anti-simétricas*). Considere a operação de $\mathbb{M}_{2\times 2} \times \mathbb{M}_{2\times 2}$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(B^T A) \,, \tag{1}$$

onde tr designa o traço de uma matriz.

a) Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por (1) é um produto interno.

b) Determine a dimensão de U e de $U^\perp$.

c) Determine bases ortonormadas de U e de $U^\perp$.

d) Determine as projecções ortogonais de $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ sobre U e sobre $U^\perp$.

e) Qual a matriz anti-simétrica mais próxima de $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$?

f) Determine a distância de $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ a U.

6-29) Considere as transformações lineares

$$T_1 : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \qquad T_2 : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

definidas por

$$T_1(A) = \frac{A + A^T}{2} \qquad T_2(A) = \frac{A - A^T}{2}\,.$$

Mostre que a imagem $\mathrm{Im}(T_1)$ da transformação linear T_1 é o complemento ortogonal da imagem $\mathrm{Im}(T_2)$ da transformação linear T_2, quando $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ está munido com o produto interno

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A)\,.$$

Diagonalização ortogonal e diagonalização unitária

6-30) Seja A uma matriz real $m \times n$. Prove que as colunas de A formam um conjunto ortogonal se e só se $A^T A$ é uma matriz diagonal. Prove ainda que esse conjunto é ortonormal se e só se $A^T A$ é a matriz identidade.

6-31)
a) Uma matriz real A de ordem n diz-se *ortogonal* se $A^T A = I$. Prove que A é ortogonal se e só se as colunas de A formam uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$.

b) Identifique todas as matrizes ortogonais de ordem 2. (Sugestão: Cada coluna de A é um vector de $\mathbb{R}^2$ situado na circunferência de raio unitário e centro na origem, que é determinado por um ângulo.)

6-32) Mostre que se A é uma matriz real diagonalizável e admite uma matriz diagonalizante ortogonal, então A é simétrica.

6-33) Mostre que se A é uma matriz simétrica real, então os valores próprios de A são reais.

6-34) Diagonalize ortogonalmente a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Note que a soma das entradas de cada linha de A é constante.

6-35) Seja A uma matriz unitária de ordem n, e seja $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ a transformação linear que é representada pela matriz A na base canónica. Mostre que:

a) $\langle T\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n)$

b) $\|T\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\| \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n)$

c) Se λ é valor próprio de A, então $|\lambda| = 1$.

6-36) Diga se as matrizes seguintes são simétricas, anti-simétricas, hermitianas, anti-hermitianas ou unitárias.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & i & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} i & i \\ -i & i \end{bmatrix}$$

6-37) Sendo A uma matriz hermitiana, mostre que os seus valores próprios são reais. Mostre ainda que a matriz A é uma matriz definida positiva se e só se os seus valores próprios são positivos.

6-38) Determine α, β e γ de modo que a matriz A seja hermitiana.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & -i \\ 3-5i & 0 & \gamma \\ \beta & 2+4i & 2 \end{bmatrix}$$

6-39) Determine quais das seguintes matrizes são unitárias:

a) $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1+i & 1+i \\ 1-i & -1+i \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

6-40) Diagonalize unitariamente as seguintes matrizes, se possível.

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+i \\ 0 & -1-i & 0 \end{bmatrix}$

Soluções

6-1) a) $\sqrt{37}$

b) $\sqrt{21}+\sqrt{14}$

c) $3\sqrt{21}$

d) $\left(\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

e) 1

f) $\arccos \frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{21}}$

g) $\sqrt{33}$

6-2) A igualdade verifica-se para $\alpha = \frac{5}{7}$ e para $\alpha = -\frac{5}{7}$.

6-3) a) $\alpha = -3$

b) $\alpha = -2$ e $\alpha = -3$

6-4) $(-\frac{34}{57}, \frac{44}{57}, -\frac{6}{57}, \frac{11}{57})$ e $(\frac{34}{57}, -\frac{44}{57}, \frac{6}{57}, -\frac{11}{57})$

6-5) $|5| \leq 3 \cdot 2$, ou seja $5 \leq 6$.

6-6) $(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{15}}{6}, \frac{\sqrt{5}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3})$ e $(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{15}}{6}, \frac{\sqrt{5}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3})$

6-8) a) Não é produto interno. Falha a propriedade (v) na lista abaixo.

b) Não é produto interno. Falham as propriedades (ii) e (iii).

c) É produto interno.

d) Não é produto interno. Falham as propriedades (iv) e (v).

i) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

ii) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

iii) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$

iv) $\langle u, u\rangle \geq 0$

v) $\langle u, u\rangle = 0 \Rightarrow u = 0$

6-9) a) É produto interno.

b) Não é produto interno. Falham as propriedades (ii) e (iii) (ver lista do exercício anterior).

c) É produto interno.

d) Não é produto interno. Falha a propriedade (v).

6-10) $\mathrm{d}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sqrt{5}$

6-11) $\alpha = 8$

6-12) a) $(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5})$

b) $(-\pi, -2\pi, -3\pi)$

6-13) a) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\}$

b) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\left(-\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, 1\right), \frac{1}{\sqrt{1067}}\left(21, 4, 21, 13\right)\right\}$

Na alínea a), se se começar por aplicar o método de ortogonalização de Gram–Schmidt tomando como primeiro vector $(1, 0, 0)$ e como segundo vector $(1, 1, 0)$, obter-se-á a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

6-14) a) $\{(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}i), (\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i, -\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i)\}$

b) $\{(1,0),(0,1)\}$

6-15) b) $\|(-1,3)\| = \sqrt{48}$ $\qquad$ $\mathrm{d}((-1,3),(2,5)) = \sqrt{47}$

c) $\{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 : \|\boldsymbol{u}\| \leq 1\} = \{(u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2 : 3u_1^2 + 5u_2^2 \leq 1\}$

6-16) a) $G = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\phi(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e}_2) = \mathbf{e_2}^T G \mathbf{e_1} = -2$

e) $\mathrm{proj}_{\boldsymbol{e_1}} \boldsymbol{e}_2 = (-\frac{2}{3}, 0, 0)$

f) $(1,3,3)$

g) $\arccos \frac{-2}{\sqrt{6}}$

h) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2/3}}(\frac{2}{3},1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,1)\right)$

6-17) Base: $\{(2,-1,0),(1,-1,-1))$

Equação: $-x-2y+z=0$

6-18) a) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 3x+z=0 \end{cases}$

b) $\mathrm{d}((1,0,-1),W) = \frac{2\sqrt{14}}{7}$

$\mathrm{d}((1,0,-1),W^{\perp}) = \frac{\sqrt{42}}{7}$

6-19) a) Base: $\{(1,-1,2,-2)$

Equações cartesianas: $\begin{cases} x+y=0 \\ -2x+z=0 \\ 2x+w=0 \end{cases}$

b) $(1,2,1,-1) = (\frac{7}{10}, \frac{23}{10}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}) + (\frac{3}{10}, -\frac{3}{10}, \frac{3}{5}, -\frac{3}{5})$

c) $\mathrm{d}((1,2,1,-1),W) = \frac{3}{\sqrt{10}}$ $\qquad$ $\mathrm{d}((1,2,1,-1),W^{\perp}) = \frac{\sqrt{610}}{10}$

6-20) a) i) Falsa.

ii) Falsa.

b) $\{(1,2,-1,2),(3,5,0,4)\}$

c) $\{(1,3,1),(2,5,1)\}$

6-21) $(\frac{49}{45},-\frac{10}{45},-\frac{37}{45})$

6-22) $\begin{cases} x-2y=5 \\ -3y+z=5 \end{cases}$

6-23) $11x-3y-4z=9$

6-24) $\frac{2}{5}\sqrt{10}$

6-25) a) Equações paramétricas: $\begin{cases} x=1 \\ y=-t \\ z=-1-3t \end{cases} \qquad (t\in\mathbb{R})$

Equações cartesianas: $\begin{cases} x=1 \\ 3y-z=1 \end{cases}$

b) $x+z=0$

c) Equações paramétricas: $\begin{cases} x=1-\alpha \\ y=\alpha+\beta \\ z=-1+\alpha+2\beta \end{cases} \qquad (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$

Equação cartesiana: $x+2y-z=2$

Vector normal: $(1,2,-1)$

d) $\frac{1}{\sqrt{6}}$

6-26) Trata-se do subespaço $\{(-2b-c)+bt+ct^2 \;:\; b,c\in\mathbb{R}\}$.

6-27) b) $\|a_0+a_1t+a_2t^2\| = (3a_0^2+3a_0a_1+\frac{5}{2}a_0a_2+\frac{9}{4}a_1a_2+\frac{5}{4}a_1^2+\frac{17}{16}a_2^2)^{\frac{1}{2}}$

c) $\arccos\frac{37}{5\sqrt{209}}$

d) i) $\{-\frac{3}{14}+t,-\frac{3}{28}+t^2\}$

ii) $\mathrm{d}(1+t+t^2,W)=\frac{\sqrt{241}}{5}$

$$\mathrm{d}(1+t+t^2, W^\perp) = \tfrac{37}{20}$$

e) $\begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{4} & \frac{9}{8} \\ \frac{5}{4} & \frac{9}{8} & \frac{17}{16} \end{bmatrix}$

6-28) b) $\dim U = 1 \qquad \dim U^\perp = 3$

c) Base o.n. de U: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \right\}$

Base o.n. de $U^\perp$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

d) $\mathrm{proj}_U \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$

$\mathrm{proj}_{U^\perp} \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$

e) $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$

f) $\sqrt{5}$

6-30)

Consideremos a matriz $m \times n$ que abaixo se encontra descrita por colunas

$$A = \left[\ \mathbf{c_1} \mid \mathbf{c_2} \mid \ldots \mid \mathbf{c_n}\ \right],$$

onde $\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \ldots, \boldsymbol{c_n} \in \mathbb{R}^n$, e calculemos $A^T A$.

$$\begin{aligned} A^T A &= \left[\ \mathbf{c_1} \mid \mathbf{c_2} \mid \ldots \mid \mathbf{c_n}\ \right]^T \left[\ \mathbf{c_1} \mid \mathbf{c_2} \mid \ldots \mid \mathbf{c_n}\ \right] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{c_1}^T \\ \mathbf{c_2}^T \\ \vdots \\ \mathbf{c_n}^T \end{bmatrix} \left[\ \mathbf{c_1} \mid \mathbf{c_2} \mid \ldots \mid \mathbf{c_n}\ \right] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{c_1}^T\mathbf{c_1} & \mathbf{c_1}^T\mathbf{c_2} & \ldots & \mathbf{c_1}^T\mathbf{c_n} \\ \mathbf{c_2}^T\mathbf{c_1} & \mathbf{c_2}^T\mathbf{c_2} & \ldots & \mathbf{c_2}^T\mathbf{c_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{c_n}^T\mathbf{c_1} & \mathbf{c_n}^T\mathbf{c_2} & \ldots & \mathbf{c_n}^T\mathbf{c_n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Temos assim que

$$A^T A = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_1} \rangle & \langle \boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2} \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_n} \rangle \\ \langle \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_1} \rangle & \langle \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_2} \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_n} \rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{c_n}, \boldsymbol{c_1} \rangle & \langle \boldsymbol{c_n}, \boldsymbol{c_2} \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{c_n}, \boldsymbol{c_n} \rangle \end{bmatrix}, \tag{2}$$

donde se conclui imediatamente que $A^T A$ é uma matriz diagonal se e só se para todo (i, j), com $i, j = 1, \dots, n$ e $i \neq j$, se tem $\langle \boldsymbol{c_i}, \boldsymbol{c_j} \rangle = 0$. Por outras palavras, $A^T A$ é uma matriz diagonal se e só se o conjunto $\{\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \dots, \boldsymbol{c_n}\}$ é um conjunto ortogonal.

De modo semelhante, a equação (2) permite concluir que $A^T A$ é a matriz identidade I se e só se para todos os $i, j = 1, \dots, n$ se tem

$$\langle \boldsymbol{c_i}, \boldsymbol{c_j} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j\,. \end{cases}$$

Ou seja, $A^T A$ é a matriz identidade se e só se o conjunto $\{\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \dots, \boldsymbol{c_n}\}$ é um conjunto ortonormal.

6-31) b) As matrizes ortogonais de 2ª ordem são as matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou da forma} \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{com } \theta \in \mathbb{R}.$$

A matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ é ortogonal se e só se $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$ e $ab + cd = 0$. Como (a, c) está na circunferência de centro na origem e raio 1, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $a = \cos\theta$ e $c = \operatorname{sen}\theta$. Analogamente, existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tal que $b = \cos\varphi$ e $d = \operatorname{sen}\varphi$. Por conseguinte,

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix}.$$

De $ab + cd = 0$, e recordando a fórmula para o co-seno de uma soma, obtemos:

$$\begin{aligned}
\cos\theta\cos\varphi + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi &= 0\\
\cos\theta\cos(-\varphi) - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(-\varphi) &= 0\\
\cos(\theta-\varphi) &= 0\\
\cos(\varphi-\theta) &= 0\\
\varphi = \theta + \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})&\\
\cos\varphi = \cos(\theta+\frac{\pi}{2})\cos k\pi&\\
= -\operatorname{sen}\theta\cos k\pi&\\
\operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen}(\theta+\frac{\pi}{2})\cos k\pi&\\
= \cos\theta\cos k\pi&
\end{aligned}$$

Para k par, vem $\cos\varphi = -\operatorname{sen}\theta$ e $\operatorname{sen}\varphi = \cos\theta$. Para k ímpar, vem $\cos\varphi = \operatorname{sen}\theta$ e $\operatorname{sen}\varphi = -\cos\theta$.

Observações

- As matrizes A em questão satisfazem a condição $|\det A| = 1$. Os casos $\det A = 1$ e $\det A = -1$ correspondem, respectivamente, aos casos de k par e k ímpar.
- Estas matrizes representam, na base canónica, transformações lineares de interpretação geométrica simples: Para k par, trata-se da rotação de θ radianos em torno da origem, e para k ímpar trata-se da reflexão em relação à recta que passa pela origem e tem declive $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$.

6-34) $D = S^{-1}AS$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

Começamos por tentar calcular os valores próprios da matriz (pela regra de Sarrus, por exemplo):

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)^3 + 2 - 3(3-\lambda)$$

A simples observação do polinómio característico não permite descobrir uma raiz. No entanto, a sugestão do enunciado traduz-se por:

$$\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\5\\5\end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

ou seja: $$1\cdot\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Verifica-se assim que 5 é valor próprio, correspondente ao vector próprio $(1, 1, 1)$. A regra de Ruffini permite factorizar o polinómio característico, de modo que se obtém um polinómio de grau 2.

Repare-se que os vectores próprios que surgem naturalmente no resto da resolução não são ortogonais entre si, pelo que será ainda necessário recorrer ao método de Gram–Schmidt.

6-36) A matriz C é unitária.

6-38) $\alpha = 3 + 5i$, $\beta = i$, $\gamma = 2 - 4i$.

6-39)
a) Sim (é matriz unitária).
b) Sim.
c) Não.
d) Não.

6-40)
a) $D = U^{-1}AU$

$$D = \begin{bmatrix}6&0\\0&3\end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix}\frac{1-i}{\sqrt{6}} & \frac{1-i}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

b) $D = UAU^{-1}$

$$D = \begin{bmatrix}5&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{-1+i}{\sqrt{6}}&\frac{1-i}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$