Ficha 5 | Transformações lineares

Aulas práticas de Álgebra Linear

Licenciatura em Engenharia Naval e Oceânica
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

1º semestre 2020/21

Jorge Almeida e Lina Oliveira

Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

Índice

5

Transformações lineares

Notação

Dados E_1 e E_2 espaços lineares (com bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, respectivamente) e uma transformação linear $T : E_1 \to E_2$:

Núcleo de T: $\mathscr{N}(T)$
Imagem de T: $\mathscr{I}(T)$
Espectro de T: $\sigma(T)$
Espaço próprio T associado ao valor próprio λ: $E_\lambda(T)$
Matriz de T para as bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$: $[T]_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$

Observação

A matriz $[T]_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$ é a única matriz que satisfaz a condição

$$\mathbf{u}_{\mathcal{B}_2} = [T]_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}\mathbf{u}_{\mathcal{B}_1}$$

para todo o vector $u \in E_1$.

Transformações lineares

5-1) Diga, justificando, quais das seguintes funções são transformações lineares.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 3x_1 - x_2)$
b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (1 + x_2, 3x_1 - 1)$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 4x_3)$

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2x_3, 3x_2^2, x_1 - 4x_3)$

e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2x_3, 5x_2^2)$

f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, x_2 - x_3)$

g) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 3x_2, x_1 + 5x_2)$

5-2) Sejam v_1, v_2 e v_3 vectores de um espaço linear U, e seja $T : U \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que:

$$T(v_1) = (-1, 2, 1) \qquad T(v_2) = (2, 3, 0) \qquad T(v_3) = (1, 2, 3)$$

Determine $T(2v_1 - v_2 + 3v_3)$.

5-3) Sejam U e V espaços lineares, e seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Mostre que $T(0) = 0$. Como poderia ter usado esta propriedade para resolver a alínea b) do Problema 5-1?

5-4) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$(x, y, z) \mapsto (2x - y, x, x + z)\,,$$

e considere o triângulo de vértices $(1, 1, 1), (-1, 1, 1)$ e $(0, 0, 0)$. Determine a imagem deste triângulo pela transformação T.

5-5) Para as seguintes transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, determine se $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.

a) T_1 é a multiplicação pelo escalar c e T_2 é a rotação de um ângulo θ no sentido positivo relativamente ao semi-eixo positivo dos zz.

b) T_1 é a rotação de $45°$ no sentido positivo em relação ao semi-eixo positivo dos xx e T_2 é a rotação de $30°$ no sentido negativo relativamente ao semi-eixo positivo dos zz.

5-6) Diga, justificando, quais das seguintes funções constituem transformações lineares.

a) $T : \mathbb{M}_{2\times 2} \to \mathbb{M}_{2\times 3}$ tal que $T(A) = AB$, sendo B uma matriz fixa 2×3.

b) $T : \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $T(A) = \operatorname{tr} A$.

c) $T : \mathbb{M}_{m\times n} \to \mathbb{M}_{n\times m}$ tal que $T(A) = A^T$.

d) $T : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $T\left(\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]\right) = a + 3b + 2c + 4d$.

e) $T : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $T(A) = \operatorname{tr}(AB)$, com $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right]$.

f) $T : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ tal que $T(A) = \det A$.

g) $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ tal que $T(a + bx + cx^2) = (a + 1) + (b + 1)x + (c + 1)x^2$.

h) $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ tal que $T(a + bx + cx^2) = a + b(x + 1) + c(x + 1)^2$.

Matriz associada a uma transformação linear

5-7) Determine a matriz que representa cada uma das transformações lineares seguintes relativamente às bases canónicas dos espaços de partida e de chegada.

a) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$

b) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)$

d) $T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, 7x_2, -8x_3)$

e) $T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$

f) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4, x_2 + x_3, -x_1)$

g) $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0)$

h) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_3, x_2, x_1 - x_3)$

5-8) Admitindo que a transformação envolvida é linear e recorrendo à matriz que a representa relativamente às bases canónicas, determine:

a) A reflexão de $(-1, 2)$ relativamente ao eixo dos xx e a reflexão do mesmo vector relativamente à recta $x = y$.

b) A reflexão de $(2, -5, 3)$ relativamente ao plano xy e a reflexão do mesmo vector relativamente ao plano yz;

c) A projecção ortogonal de $(2, -5)$ no eixo dos xx e a projecção ortogonal do mesmo vector no eixo dos yy.

d) A projecção ortogonal de $(-2, 1, 3)$ sobre o plano xy e a projecção ortogonal do mesmo vector no plano xz;

e) A rotação de $(3,-4)$ em torno da origem no sentido contrário aos ponteiros do relógio (sentido positivo) por um ângulo de $\pi/2$ e a rotação do mesmo vector no mesmo sentido por um ângulo de $\pi/6$.

f) A rotação de $(-2,1,2)$ por um ângulo de $\pi/2$ no sentido positivo relativamente ao semi-eixo positivo dos zz.

g) A rotação de $(-2,1,2)$ por um ângulo de $\pi/4$ no sentido positivo relativamente ao semi-eixo positivo dos yy.

5-9) Seja $T : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $T(A) = A^T$. Determine $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$, sendo $\mathcal{B}$ a base $\left(\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]\right)$.

5-10) Considere a transformação linear $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ definida por

$$f(t) \mapsto 2f'(t) - f(t)\,.$$

onde f' designa a derivada de f.

a) Determine a matriz que representa a transformação linear T em relação à base canónica $\mathcal{P}_2$ de $\mathbb{P}_2$. A transformação linear T é invertível?

b) Determine o polinómio $p \in \mathbb{P}_2$ tal que $(Tp)(t) = (t+1)^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Núcleo e imagem

5-11) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 - x_2 + 3x_3, 4x_1 + x_2 + 2x_3)$$

a) Determine o núcleo e a imagem da transformação linear.

b) Indique um vector de $\mathbb{R}^3$ que não esteja na imagem da transformação.

c) Verifique o teorema da dimensão.

5-12) Determine o núcleo e a imagem da transformação linear $T_2 \circ T_1$, e determine uma expressão para $T_2 \circ T_1$.

a) $T_1(x,y) = (2x, 3y) \qquad T_2(x,y) = (x-y, x+y)$.

b) $T_1(x,y) = (2x, -3y, x+y) \qquad T_2(x,y,z) = (x-y, y+z)$.

c) $T_1(x,y,z) = (x-y, y+z, x-z) \qquad T_2(x,y,z) = (0, x+y+z)$.

5-13) Quais das seguintes transformações lineares T são isomorfismos?

a) A projecção ortogonal de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sobre o eixo dos xx.

b) A reflexão de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ relativamente à recta $x = y$.

c) A projecção ortogonal de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sobre o plano xy.

d) A reflexão de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ relativamente ao plano yz.

e) A rotação de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ no sentido positivo de $\pi/2$ radianos relativamente ao semi-eixo positivo dos zz.

5-14) Em relação ao problema 5-13), considere as questões seguintes.

a) Qual é a transformação linear inversa de cada um dos isomorfismos?

b) Determine o núcleo e a imagem de cada uma das transformações.

c) Nos casos das alíneas a) e c), mostre que se tem $T^2 = T$.

5-15) Sejam $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformações lineares tais que

$$T_1(x, y) = (x + y, x - y) \qquad T_2(x, y) = (2x + y, x - 2y)\,.$$

Mostre que a transformação linear $T_2 \circ T_1$ é invertível, e determine a matriz que representa a sua inversa.

5-16) Sejam $S : V \to \mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ as funções definidas por

$$S(x, y) = (2y, x, x + y), \qquad T(x, y, z) = (-3z, -x - 2y),$$

sendo $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x = y\}$.

a) Determine uma expressão analítica para a transformação linear $T \circ S : V \to \mathbb{R}^2$.

b) Determine o núcleo e imagem da transformação linear $T \circ S$.

c) A transformação linear $T \circ S : V \to \mathbb{R}^2$ é um isomorfismo?

5-17) Considere o isomorfismo T do exercício 5-10). Determine a matriz que representa T^{-1} relativamente à base $\mathcal{P}_2$ e uma expressão analítica para T^{-1}.

5-18) Sejam U e V espaços lineares, com $\dim U = n$, $\dim V = p$, $n < p$. Indique o valor lógico das seguintes proposições.

a) Existem transformações lineares injectivas de V em U.

b) Existem transformações lineares sobrejectivas de V em U.

c) Existem transformações lineares injectivas de U em V.

d) Existem transformações lineares sobrejectivas de U em V.

e) Qualquer transformação linear injectiva de U em U é sobrejectiva.

f) Qualquer transformação linear injectiva de U em V é sobrejectiva.

g) Qualquer transformação linear injectiva de $\mathbb{P}_4$ em $\mathbb{M}_{2\times 2}$ é bijectiva.

h) Qualquer transformação linear injectiva de $\mathbb{M}_{2\times 2}$ em $\mathbb{P}$ é bijectiva.

Representação matricial de uma transformação linear em diferentes bases

5-19) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, x_1 + x_2)$$

e considere-se a base ordenada $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$ de $\mathbb{R}^2$, com $\boldsymbol{v_1} = (1, 1)$ e $\boldsymbol{v_2} = (-1, 0)$.

a) Determine a matriz $A = [T]_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_2}$ que representa T relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$.

b) Sem recorrer à matriz A, calcule a matriz $B = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ que representa T relativamente à base $\mathcal{B}$ no espaço de partida e no espaço de chegada.

c) Relacione as matrizes A e B através da matriz mudança de base apropriada.

d) Calcule a imagem do vector $\boldsymbol{v} = (1, -1)$ pela transformação T, usando a matriz A.

e) Calcule a imagem do vector $\boldsymbol{v} = (1, -1)$ pela transformação T, usando a matriz B.

5-20) Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, a base canónica $\mathcal{E}_3 = \big(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\big)$, e a base ordenada $\mathcal{B} = \big((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\big)$.

a) Determine a matriz M de mudança de base de $\mathcal{E}_3$ para $\mathcal{B}$, isto é tal que $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = M\mathbf{x}_{\mathcal{E}_3}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.

b) Dado um vector $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$, determine o vector $\boldsymbol{u}_{\mathcal{B}} = (y_1, y_2, y_3)$ das coordenadas de $\boldsymbol{u}$ na base $\mathcal{B}$.

c) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuja representação matricial na base canónica é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz que representa T na base $\mathcal{B}$.

d) Determine uma expressão analítica de T.

5-21) Seja $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$ que a representa em relação à base $\mathcal{B}_1 = (1 + t^2, t, t - 1)$ de $\mathbb{P}_2$ e à base canónica $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine o núcleo de T.

b) Determine o contradomínio de T.

5-22) Seja $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ uma transformação linear tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$ que a representa em relação à base $\mathcal{B}_1 = (1 + t^2, t, t - 1)$ de $\mathbb{P}_2$ e à base $\mathcal{B}_2 = (1 - t^3, t^2, t + 1, 1)$ de $\mathbb{P}_3$ é

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine o núcleo de T.

b) Determine o contradomínio de T.

c) Determine $C = [T]_{\mathcal{P}_3,\mathcal{P}_2}$.

d) Relacione a matriz A com a matriz C obtida nas alínea anterior através de matrizes de mudança de base apropriadas.

e) Determine uma expressão analítica para a transformação T.

5-23) Seja U o subespaço de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ constituído pelas matrizes triangulares superiores com traço nulo. Seja $T : U \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que $T(A) = [A, B]$, com $B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ e $[A, B] = AB - BA$.

a) Obtenha uma base $\mathcal{B}_U$ de U, e indique a dimensão de U.

b) Determine $[T]_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}_U}$, sendo $\mathcal{B}_c$ a base canónica de $\mathbb{M}_{2\times 2}$. A transformação T é injectiva?

c) Mostre que o contradomínio V de T é constituído pelas matrizes simétricas de traço nulo, e obtenha uma base $\mathcal{B}_V$ de V.

d) Considere a transformação linear $S : U \to V$ tal que $S(A) = [A, B]$. Determine a matriz $[S]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_U}$. A transformação S é injectiva? É sobrejectiva?

Valores próprios, vectores próprios e subespaços invariantes

5-24) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$[T]_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

a) Determine os espaços próprios da transformação T.

b) Determine os subespaços de $\mathbb{R}^2$ que são invariantes para T.

5-25) Determine equações cartesianas das rectas de $\mathbb{R}^2$ (se existirem) que passam pela origem e são invariantes pela transformação linear que na base canónica é representada pela seguinte matriz:

$$\text{(a)}\quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)}\quad \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

5-26) Determine os subespaços invariantes de T, sendo T a seguinte transformação linear:

a) Em $\mathbb{R}^2$, a reflexão em relação ao eixo dos xx.

b) Em $\mathbb{R}^2$, a reflexão em relação à recta $y = x$.

c) Em $\mathbb{R}^3$, a reflexão em relação ao plano $z = 0$.

d) Em $\mathbb{R}^3$, a reflexão em relação ao plano $x = 0$.

e) Em $\mathbb{R}^2$, a projecção ortogonal sobre o eixo dos xx.

f) Em $\mathbb{R}^2$, a projecção ortogonal sobre o eixo dos yy.

g) Em $\mathbb{R}^3$, a projecção ortogonal sobre o plano $z = 0$.

h) Em $\mathbb{R}^3$, a projecção ortogonal sobre o plano $y = 0$.

i) Em $\mathbb{R}^2$, a rotação de $\pi/2$ em torno da origem, no sentido directo (sentido contrário ao dos ponteiros do relógio).

j) Em $\mathbb{R}^3$, a rotação de $\pi/2$ em torno do eixo dos zz, no sentido directo relativamente ao semi-eixo positivo dos zz.

5-27) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que consiste na rotação de $\pi/2$ em torno da origem, no sentido directo (sentido contrário ao dos ponteiros do relógio).

a) Determine a matriz $A = [T]_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_2}$.

b) Determine, se possível, os espaços próprios da transformação T.

c) Determine os valores próprios $\lambda \in \mathbb{C}$ da matriz A e bases para os correspondentes espaços próprios.

5-28) Para cada uma das seguintes transformações lineares $T = T_2 \circ T_1$ de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, determine, sempre que seja possível, os valores próprios e os espaços próprios.

a) T_1 é a projecção ortogonal no eixo dos xx e T_2 é a reflexão relativa ao eixo dos yy.

b) T_1 é a rotação em torno da origem de um ângulo de $\pi/2$ radianos no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e T_2 é a rotação em torno da origem de $\pi/4$ radianos no sentido dos ponteiros do relógio.

c) T_1 é a reflexão relativamente ao eixo dos xx e T_2 é a reflexão relativamente ao eixo dos yy.

5-29) Considere as transformações lineares

$$T_1 : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \qquad T_2 : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

definidas por

$$T_1(A) = \frac{A + A^T}{2} \qquad T_2(A) = \frac{A - A^T}{2}\,.$$

a) Determine as matrizes que representam T_1 e T_2, respectivamente, relativamente à base canónica de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ no espaço de partida e de chegada.

b) Calcule $T_1\left(\left[\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right]\right)$ e $T_2\left(\left[\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right]\right)$.

c) Determine os valores próprios e os espaços próprios das transformações lineares T_1 e T_2.

Soluções

5-1) a) Sim (é linear).
b) Não.
c) Sim.
d) Não.
e) Não.
f) Sim.
g) Sim.

5-2) $(-1, 7, 11)$

5-4) Trata-se do triângulo de vértices $(1, 1, 2)$, $(-3, -1, 0)$ e $(0, 0, 0)$.

5-5) a) $T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2$
b) $T_2 \circ T_1 \neq T_1 \circ T_2$

5-6) a) Sim (é linear).
b) Sim.
c) Sim.
d) Sim.
e) Sim.
f) Não.

g) Não.

h) Sim.

5-7) a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

5-8) a) $(-1,-2)$; $(2,-1)$

b) $(2,-5,-3)$; $(-2,-5,3)$

c) $(2,0)$; $(0,-5)$

d) $(-2,1,0)$; $(-2,0,3)$

e) $(4,3)$; $(3\frac{\sqrt{3}}{2}+2, \frac{3}{2}-2\sqrt{3})$

f) $(-1,-2,2)$

g) $(0,1,2\sqrt{2})$

5-9) $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5-10) a) $[T]_{\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. A transformação é invertível.

b) $p(t) = -13 - 6t - t^2$

5-11) a) $\mathscr{N}(T) = \{z(-\frac{5}{9}, \frac{2}{9}, 1) \,:\, z \in \mathbb{R}\}$

$\mathscr{I}(T) = \{(y_2 - y_3, y_2, y_3) : y_2, y_3 \in \mathbb{R}\}$

b) $(1, 1, 1)$

c) $\dim \mathscr{I}(T) = 2$, $\dim \mathscr{N}(T) = 1$, $\dim \mathbb{R}^3 = 2 + 1$.

5-12) a) $\mathscr{N}(T_2 \circ T_1) = \{(0, 0)\}$

$\mathscr{I}(T_2 \circ T_1) = \mathbb{R}^2$

$(T_2 \circ T_1)(x, y) = (2x - 3y, 2x + 3y)$

b) $\mathscr{N}(T_2 \circ T_1) = \{(0, 0)\}$

$\mathscr{I}(T_2 \circ T_1) = \mathbb{R}^2$

$(T_2 \circ T_1)(x, y) = (2x + 3y, x - 2y)$

c) $\mathscr{N}(T_2 \circ T_1) = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$

$\mathscr{I}(T_2 \circ T_1) = \{(0, b) : b \in \mathbb{R}\}$

$(T_2 \circ T_1)(x, y, z) = (0, 2x)$

5-13) a) Não é isomorfismo.

b) É isomorfismo.

c) Não é isomorfismo.

d) É isomorfismo.

e) É isomorfismo.

5-14) a) **b)** A reflexão relativamente à recta $x = y$.

d) A reflexão relativamente ao plano yz.

e) A rotação no sentido positivo de um ângulo de $-\pi/2$ radianos relativamente ao semi-eixo positivo dos zz.

b) **a)** O núcleo é o eixo dos yy, a imagem é o eixo dos xx.

b) O núcleo é o espaço nulo, a imagem é $\mathbb{R}^2$.

c) O núcleo é o eixo dos zz, a imagem é o plano xy.

d) O núcleo é o espaço nulo, a imagem é $\mathbb{R}^3$.

e) O núcleo é o espaço nulo, a imagem é $\mathbb{R}^3$.

5-15) $[(T_2 \circ T_1)^{-1}]_{\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_2} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$

5-16) a) $(T \circ S)(x,y) = (-9x, -6x)$.

b) $\mathscr{N}(T \circ S) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = 0\}$

$\mathscr{I}(T \circ S) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = \frac{2}{3}x\}$

c) Não.

5-17) $[T^{-1}]_{\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_2} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -8 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$T^{-1}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = -(a_0 + 2a_1 + 8a_2) - (a_1 + 4a_2)t - a_2 t^2$

5-18) a) Falsa.

b) Verdadeira.

c) Verdadeira.

d) Falsa.

e) Verdadeira.

f) Falsa.

g) Falsa.

h) Falsa.

5-19) a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}_2}^{-1} B M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Dado um vector arbitrário $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^2$, o vector $[T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{E}_2}$ das coordenadas da imagem de $\boldsymbol{x}$ pode ser calculado usando a matriz A, tendo-se $[T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{E}_2} = A[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{E}_2}$. Por outro lado, podemos ver na figura seguinte que $[T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{E}_2}$ também pode ser calculado à custa da matriz B:

$$[T]_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_2} = M_{\mathcal{E}_2 \leftarrow \mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}_2}$$
$$M_{\mathcal{E}_2 \leftarrow \mathcal{B}} = M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}_2}^{-1}$$

$$\begin{tikzcd}
{[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{E}_2}} \arrow[r, mapsto, "A"] \arrow[d, mapsto, "M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}_2}"'] & {[T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{E}_2}} \\
{[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, mapsto, "B"'] & {[T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{B}}} \arrow[u, mapsto, "M_{\mathcal{E}_2 \leftarrow \mathcal{B}}"']
\end{tikzcd}$$

De facto,

$$\begin{aligned} [T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{E}_2} &= M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}_2}^{-1} [T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{B}} \\ &= M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}_2}^{-1} B [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} \\ &= M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}_2}^{-1} B M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}_2} [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{E}_2}. \end{aligned}$$

Obtemos assim $A = M^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}_2} B M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}_2}$.

d) $T(\boldsymbol{v}) = (3, 0)$

5-20) a) $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}_3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $(y_1, y_2, y_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3)$

c) $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $T(x, y, z) = (2x - y - z, y + z, z)$

5-21) a) $\mathscr{N}(T) = \{2at + at^2 \,:\, a \in \mathbb{R}\}$

b) $\mathscr{I}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a & -b \end{bmatrix} \,:\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

5-22) a) $\mathscr{N}(T) = \{0 + 0t + 0t^2\}$

b) $\mathscr{I}(T) = \{a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \,:\, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A = M^{-1}_{\mathcal{P}_3\leftarrow\mathcal{B}_2} C M_{\mathcal{P}_2\leftarrow\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

O vector das coordenadas $[T(p)]_{\mathcal{B}_2}$ da imagem do polinómio p pode ser calculado usando a matriz A, tendo-se

$$[T(p)]_{\mathcal{B}_2} = A[p]_{\mathcal{B}_1}.$$

No entanto,

$$\begin{aligned} [T(p)]_{\mathcal{B}_2} &= M^{-1}_{\mathcal{P}_3\leftarrow\mathcal{B}_2}[T(p)]_{\mathcal{P}_3} \\ &= M^{-1}_{\mathcal{P}_3\leftarrow\mathcal{B}_2} C [p]_{\mathcal{P}_2} \\ &= M^{-1}_{\mathcal{P}_3\leftarrow\mathcal{B}_2} C M_{\mathcal{P}_2\leftarrow\mathcal{B}_1}[p]_{\mathcal{B}_1}. \end{aligned}$$

Assim, a igualdade anterior mostra que o vector $[T(p)]_{\mathcal{B}_2}$ também pode ser calculado à custa da matriz C. Ilustramos na figura seguinte as relações obtidas acima:

$$\begin{tikzcd}
{[p]_{\mathcal{B}_1}} \arrow[r, mapsto, "A"] \arrow[d, mapsto, "M_{\mathcal{P}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}"'] & {[Tp]_{\mathcal{B}_2}} \\
{[p]_{\mathcal{P}_2}} \arrow[r, mapsto, "C"'] & {[Tp]_{\mathcal{P}_3}} \arrow[u, mapsto, "M_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{P}_3}"']
\end{tikzcd}$$

Finalmente, podemos então concluir que $A = M^{-1}_{\mathcal{P}_3 \leftarrow \mathcal{B}_2} C M_{\mathcal{P}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}$.

e) $T(p) = tp$

5-23) a) $\mathcal{B}_U = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$, $\dim U = 2$.

b) $[T]_{\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. A transformação T é injectiva.

c) $\mathcal{B}_V = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$

d) $[S]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$. A transformação S é injectiva e sobrejectiva.

5-24) a) $\{(y, y) : y \in \mathbb{R}\}$ e $\{(-y, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

b) Os mesmos de a) e ainda $\mathbb{R}^2$ e $\{(0, 0)\}$.

5-25) a) $y = 0$.

b) Não existem.

c) $x = y$ e $2x = y$.

5-26) a) $\mathbb{R}^2$, $\{(0, 0)\}$, $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ e $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

b) $\mathbb{R}^2$, $\{(0, 0)\}$, $\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ e $\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

c) $\mathbb{R}^3$, $\{(0, 0, 0)\}$, o plano horizontal XOY ($\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$) e todos os planos que são ortogonais a este e passam pela origem, e o eixo dos zz.

d) $\mathbb{R}^3$, $\{(0, 0, 0)\}$, o plano YOZ ($\{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$) e todos os planos que são ortogonais a este e passam pela origem, e o eixo dos xx.

e) $\mathbb{R}^2$, $\{(0,0)\}$, $\{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ e $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$.

f) $\mathbb{R}^2$, $\{(0,0)\}$, $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $\{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$.

g) $\{(0,0,0)\}$, $\{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$, $\{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$, e $\{(x,y,z) : ax + by = 0\}$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

h) $\{(0,0,0)\}$, $\{(x,0,z) : x,z \in \mathbb{R}\}$, $\{(0,y,0) : y \in \mathbb{R}\}$ e $\{(x,y,z) : ax + cz = 0\}$ com $a, c \in \mathbb{R}$.

i) $\mathbb{R}^2$ e $\{(0,0)\}$.

j) $\mathbb{R}^3$, $\{(0,0,0)\}$, $\{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ e $\{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$.

5-27) a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) Não é possível.

c) $\sigma(A) = \{i, -i\}$
$B_{E_i(T)} = \{(i,1)\}$
$B_{E_{-i}(T)} = \{(-i,1)\}$

5-28) a) $\sigma(T_2 \circ T_1) = \{0, -1\}$
$E_{-1}(T_2 \circ T_1) = \mathcal{L}\{(1,0)\}$
$E_0(T_2 \circ T_1) = \mathcal{L}\{(0,1)\}$

b) $\sigma(T_2 \circ T_1) = \varnothing$

c) $\sigma(T_2 \circ T_1) = \{-1\}$
$E_{-1}(T_2 \circ T_1) = \mathbb{R}^2$

5-29) a) $[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad [T_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $T_1\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad T_2\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

c) $\sigma(T_1) = \{0, 1\}$
$E_1(T_1) = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$
$E_0(T_1) = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

$\sigma(T_2) = \{0, 1\}$
$E_1(T_2) = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$
$E_0(T_2) = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$