Ficha 4 | Valores próprios e vectores próprios

Aulas práticas de Álgebra Linear

Licenciatura em Engenharia Naval e Oceânica
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

1º semestre 2020/21

Jorge Almeida e Lina Oliveira

Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

Índice

Índice **1**

4 Valores próprios e vectores próprios **2**

Valores e vectores próprios de matrizes 2

Diagonalização de matrizes 6

Soluções **8**

4

Valores próprios e vectores próprios

Notação
Sendo A uma matriz quadrada:
Polinómio característico de A: $p(\lambda) = \|A - \lambda I\|$
Espaço próprio correspondente ao valor próprio λ: $E(\lambda)$
Matriz diagonalizante de A: Matriz S invertível tal que $A = SDS^{-1}$, com D diagonal
Espectro de A: $\sigma(A)$

Valores e vectores próprios de matrizes

4-1) Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Para cada um dos vectores seguintes, verifique se é vector próprio de A e, em caso afirmativo, indique o valor próprio correspondente.

a) $(-5, 1, 4)$ b) $(-1, 1, 1)$ c) $(0, 0, 0)$ d) $(-1, 1, 0)$ e) $(1, 1, 1)$

4-2) Verifique se $\lambda = 3$ é um valor próprio da matriz:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 \\ -3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Em caso afirmativo, determine um vector próprio associado.

4-3) Para cada uma das matrizes seguintes, determine o polinómio característico, os valores próprios (indicando as suas multiplicidades algébrica e geométrica), e uma base para cada um dos espaços próprios correspondentes.

$$\text{a)}\ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{c)}\ \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d)}\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e)}\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4-4) Considere a matriz complexa:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{bmatrix}$$

Determine o polinómio característico desta matriz, os valores próprios, indicando as suas multiplicidades algébrica e geométrica, e bases para os espaços próprios correspondentes.

4-5) Determine os valores próprios e bases para os espaços próprios de A^{15}, em que A é a seguinte matriz real:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

4-6) Sem efectuar qualquer cálculo, determine os valores próprios das matrizes seguintes:

$$\text{a)}\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 7 & -8 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{c)}\ \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4-7) Seja A uma matriz quadrada de ordem n com entradas reais. Suponha que $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ é um vector próprio de A, que λ é o valor próprio que corresponde a $\boldsymbol{v}$ e que λ é um número complexo. Mostre que $\bar{\lambda}$ também é valor próprio de A e que $\bar{\boldsymbol{v}} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n)$ é um vector próprio de A cujo valor próprio associado é $\bar{\lambda}$.

4-8) Suponha que A é uma matriz com um valor próprio λ associado a um vector próprio $\boldsymbol{v}$. Mostre que λ^k também é um valor próprio de A^k e que está associado ao vector próprio $\boldsymbol{v}$, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$.

4-9) Calcule $\det A$, sabendo que o polinómio característico de A é dado por:

a) $p(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 5$ b) $p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 + 7$

4-10) Seja A uma matriz quadrada de ordem 2.

a) Mostre que a equação característica de A é

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0\,.$$

b) Determine $\operatorname{tr} A$ e $\det A$ no caso de 5 e 8 serem valores próprios da matriz A.

4-11) Seja A uma matriz 3×3 cujo polinómio característico é $p(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2$.

a) Indique os valores próprios de A, e dê exemplo de uma matriz A nestas condições tal que:

i) Existe um valor próprio de A com multiplicidade algébrica maior que a sua multiplicidade geométrica.

ii) Todos os valores próprios de A têm multiplicidade algébrica igual à respectiva multiplicidade geométrica.

b) Determine os valores próprios de $A + \alpha I$, sendo α um escalar.

c) Para qualquer α, mostre que A e $A+\alpha I$ têm os mesmos vectores próprios.

4-12) Seja A uma matriz 3×3 com valores próprios 0, 1 e 2.

a) Determine $\operatorname{car} A$, $\det A$ e $\operatorname{tr} A$.

b) Determine os valores próprios de $A + I$ e $\dim \mathscr{C}(A + I)$.

c) A matriz A é invertível? E a matriz $A + I$?

4-13) Sem calcular o polinómio característico, determine dois valores próprios distintos de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e três vectores próprios linearmente independentes.

4-14) Seja A uma matriz quadrada real de ordem n. Determine se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes. Justifique.

a) $\sigma(A) = \sigma(A^T)$.

b) Se $\lambda \in \sigma(A)$ e $\boldsymbol{v}$ é um vector próprio de A associado a λ, então necessariamente $\boldsymbol{v}$ também é vector próprio de A^T.

c) Se A é semelhante a uma matriz simétrica B, então A^T também é semelhante a B.

4-15) Seja A a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Considere as afirmações seguintes:

I) Os valores próprios de A são 2, -4 e 1.

II) O vector $(3, 2, 0, 0)$ é um vector próprio de A e 2 é o valor próprio associado.

III) O vector $(3, 2, 0, 0)$ é um vector próprio de A e 4 é o valor próprio associado.

IV) A matriz tem valores próprios de multiplicidade algébrica superior a 1.

A lista completa das afirmações correctas é:

A) I e IV B) II C) II e IV D) III e IV

Diagonalização de matrizes

4-16) Diagonalize a matriz A do problema 4-5) e calcule A^{15}.

4-17) Determine quais das matrizes seguintes são diagonalizáveis. Caso a matriz dada A seja diagonalizável, obtenha uma matriz S que diagonalize A e determine $S^{-1}AS$.

$$\text{a)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{bmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{c)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d)}\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e)}\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+i \\ 0 & -1-i & 0 \end{bmatrix}$$

4-18) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ -b & -1 \end{bmatrix},$$

onde b é um número real. Suponha ainda que 0 é valor próprio de A e que B é uma matriz 2×2. Considere as afirmações seguintes:

I) O subespaço $\mathcal{N}(A)$ tem dimensão 1;

II) A matriz BA tem 0 como valor próprio;

III) A matriz A é diagonalizável;

IV) A matriz A não é invertível.

A lista completa das afirmações correctas é:

A) II e III B) I e IV C) I, III e IV D) I, II e IV

4-19) Seja A uma matriz quadrada real de ordem n. Determine se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes. Justifique.

a) Se A é diagonalizável, então A tem n vectores próprios linearmente independentes.

b) Se A é diagonalizável, então A é invertível.

c) Se A é invertível, então A é diagonalizável.

d) Se A tem exactamente k valores próprios distintos, sendo $k < n$, então A não é diagonalizável.

e) Se A tem n valores próprios distintos, então A é diagonalizável.

f) Se A tem um valor próprio com multiplicidade algébrica n, então A não é diagonalizável.

g) Se a soma das dimensões dos espaços próprios de A é n, então A é diagonalizável.

h) Se A é uma matriz não nula tal que $A^2 = \mathbf{0}$, então A não é diagonalizável.

4-20) Seja A uma matriz singular 3×3 tal que

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

Diga quais das afirmações seguintes são verdadeiras:

a) 2 não é valor próprio de A.

b) Zero não é um valor próprio de A.

c) 3 é um valor próprio de A cuja multiplicidade algébrica é igual à multiplicidade geométrica.

d) Se $\boldsymbol{u} \in \mathcal{N}(A)$ e $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$, então $\{(1,1,-1),(0,1,1),\boldsymbol{u}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

e) A matriz A é semelhante à matriz diagonal $\mathrm{diag}(3,0,3)$.

f) A matriz $A - 2I$ é invertível.

Dê um exemplo de uma matriz A nas condições do problema.

4-21) Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calcule os valores próprios de A, e verifique se existe alguma matriz real que diagonalize A.

b) Determine a forma reduzida de escada de linhas R da matriz A, e indique os seus valores próprios. Existe alguma matriz real que diagonalize R?

Soluções

4-1) a) Sim (v.p. -3)

b) Não.

c) Não.

d) Sim (v.p. 1)

e) Sim (v.p. 0)

a) Basta verificar que

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -3 \\ -12 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

para concluir que $(-5, 1, 4)$ é um vector próprio de A ao qual corresponde o valor próprio -3.

4-2) É valor próprio, um vector próprio associado é $(-1, 1, 0)$.

4-3) a)
- $p(\lambda) = (3 - \lambda)(-1 - \lambda)$
- Valores próprios:

  $\lambda = 3$ Base: $\{(1, 2)\}$ m.a. = m.g. = 1

  $\lambda = -1$ Base: $\{(0, 1)\}$ m.a. = m.g. = 1

b)
- $p(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 16$

- Valor próprio:

  $\lambda = 4$ Base: $\{(3,2)\}$ m.a. $= 2$ m.g. $= 1$

c)
- $p(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$
- Valores próprios:

  $\lambda = 1$ Base: $\{(0,1,0)\}$ m.a. $=$ m.g. $= 1$

  $\lambda = 2$ Base: $\{(-1,2,2)\}$ m.a. $=$ m.g. $= 1$

  $\lambda = 3$ Base: $\{(-1,1,1)\}$ m.a. $=$ m.g. $= 1$

d)
- $p(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$
- Valor próprio:

  $\lambda = 2$ Base: $\{(-1,-1,3)\}$ m.a. $= 3$ m.g. $= 1$

Para factorizar o polinómio característico $p(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$ usando a regra de Ruffini, é necessário encontrar uma raiz deste polinómio. Designando por λ_1, λ_2 e λ_3 os valores próprios de A (possivelmente repetidos), tem-se

$$\det A = 8 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

Se as raizes de $p(\lambda)$ forem inteiras, qualquer delas é um divisor de 8. Calculando sucessivamente $p(\lambda)$ para $\lambda \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \dots\}$, verifica-se que o primeiro destes valores a anular o polinómio $p(\lambda)$ é $\lambda = 2$. Aplicando em seguida a regra de Ruffini e a fórmula resolvente, obtém-se

$$p(\lambda) = (2-\lambda)^3.$$

e)
- $p(\lambda) = (-1-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda)^2$
- Valores próprios:

  $\lambda = 1$ Base: $\{(2,3,1,0),(2,3,1,1)\}$ m.a. $=$ m.g. $= 2$

  $\lambda = -1$ Base: $\{(-2,1,1,0)\}$ m.a. $=$ m.g. $= 1$

  $\lambda = -2$ Base: $\{(-1,0,1,0)\}$ m.a. $=$ m.g. $= 1$

4-4)
- $\lambda^2 - 9\lambda + 18$
- Valores próprios:

  $\lambda = 6$ Base: $\{(1-i,2)\}$ m.a. $=$ m.g. $= 1$

  $\lambda = 3$ Base: $\{(i-1,1)\}$ m.a. $=$ m.g. $= 1$

4-5) $\sigma(A^{15}) = \{-1, 1\}$

Base de $E(-1)$: $\{(2, -1, 1)$

Base de $E(1)$: $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$

Em vez de calcular A^{15} e em seguida obter os valores próprios e vectores próprios da maneira usual, determinamos os valores próprios e vectores próprios da matriz A (que serão os apresentados na solução). A questão é como transpor para A^{15} os conhecimentos disponíveis acerca de A.

Se $\boldsymbol{x}$ é vector próprio de A, com o valor próprio λ, obtemos:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x} \\ A(A\mathbf{x}) &= A(\lambda\mathbf{x}) \\ A^2\mathbf{x} &= \lambda(A\mathbf{x}) \\ &= \lambda(\lambda\mathbf{x}) \\ &= \lambda^2\mathbf{x} \end{aligned}$$

Multiplicando sucessivamente por A ambos os membros da igualdade $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, obtemos $A^{15}\mathbf{x} = \lambda^{15}\mathbf{x}$. Assim, cada vector próprio de A é necessariamente vector próprio de A^{15}, mas o correspondente valor próprio vem elevado a 15. Logo, $(-1)^{15}, 1^{15} \in \sigma(A^{15})$, isto é, $\{-1, 1\} \subset \sigma(A^{15})$. Mas uma matriz 2×2 não pode ter mais de 2 valores próprios, e por conseguinte $\sigma(A^{15}) = \{-1, 1\}$.

Observações

- Como se teria de adaptar o argumento anterior para resolver o caso A^{16}?
- Veja-se também o Problema 4-16).

4-6) a) $2, 8, -5$

b) $9, -8, 1$

c) $4, 1$

4-9) a) $|A| = -5$

b) $|A| = 7$

4-10) b) $\operatorname{tr} A = 13 \quad \det A = 40$

4-11) a) $\sigma(A) = \{-1, 2\}$

i) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

ii) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\sigma(A + \alpha I) = \{-1 + \alpha, 2 + \alpha\}$

4-12) a) $\operatorname{car} A = 2 \qquad \det A = 0 \qquad \operatorname{tr} A = 3$

b) $\sigma(A + I) = \{1, 2, 3\} \qquad \dim \mathscr{C}(A + I) = 3$

c) A não é invertível, $A + I$ é invertível.

4-13) $(-2, 1, 0)$ e $(-3, 0, 1)$ são vectores próprios associados ao valor próprio 0 e $(1, 1, 1)$ é um vector próprio associado ao valor próprio 6.

4-14) a) Verdadeira.

b) Falsa.

c) Verdadeira.

4-15) C)

4-16) $A = SDS^{-1}$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{15} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

4-17) a) $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) $S = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

c) $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) Não é diagonalizável.

e) $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i-1 & 1-i \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

4-18) D)

4-19)
a) Verdadeira.
b) Falsa.
c) Falsa.
d) Falsa.
e) Verdadeira.
f) Falsa.
g) Verdadeira.
h) Verdadeira.

4-20)
a) Verdadeira.
b) Falsa.
c) Verdadeira.
d) Verdadeira.
e) Verdadeira.
f) Verdadeira.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Como se obteve um exemplo de matriz A nas condições do Problema? A matriz A é necessariamente diagonalizável, e tem os valores próprios 3 (com multiplicidade algébrica 2) e 0. Por conseguinte, existe uma matriz invertível S tal que $A = SDS^{-1}$, com $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Por sua vez, qualquer matriz invertível $S = \left[\ S_1 \mid S_2 \mid S_3\ \right]$ dá origem a uma matriz $A = SDS^{-1}$ tal que $AS_1 = 0S_2$, $AS_2 = 3S_2$ e $AS_3 = 3S_3$. Logo, para obter A nas condições do Problema basta escolher S de modo que as suas duas últimas colunas sejam $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, sendo a 1ª coluna arbitrária desde que torne a matriz invertível. Por exemplo, escolhendo $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ obteremos a matriz A indicada acima.

4-21) a) $\sigma(A) = \{1, i, -i\}$ (Não existe nenhuma matriz real que diagonalize A.)

b) $R = I$, $\sigma(R) = \{1\}$. A matriz R é diagonal (por conseguinte, é diagonalizável pela matriz I).