Ficha 3 | Espaços vectoriais

Aulas práticas de Álgebra Linear

Licenciatura em Engenharia Naval e Oceânica
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

1º semestre 2020/21

Jorge Almeida e Lina Oliveira

Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

Índice

3

Espaços vectoriais

Notação

Sendo A uma matriz, U um espaço vectorial e X um conjunto de vectores:

Núcleo de A: $\mathscr{N}(A)$
Espaço das colunas de A: $\mathscr{C}(A)$
Espaço das linhas de A: $\mathscr{L}(A)$
Espaço gerado por X: (ou **expansão linear de X**) $\mathcal{L}(X)$
Característica de A: $\operatorname{car}(A)$ ou $\operatorname{car} A$
Dimensão de U: $\dim(U)$ ou $\dim U$
Matriz de mudança de base (da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$): $M_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}$
Espaço dos polinómios de grau menor ou igual a n: $\mathbb{P}_n$
Espaço dos polinómios (de qualquer grau): $\mathbb{P}$
Base canónica de $\mathbb{P}_n$: $\mathcal{P}_n = (1, t, \ldots, t^n)$
Base canónica de $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{E}_n$
Espaço das matrizes reais $n \times k$: $\mathbb{M}_{n\times k}(\mathbb{R})$
Espaço das matrizes complexas $n \times k$: $\mathbb{M}_{n\times k}(\mathbb{C})$

Observações

- Repare-se nas seguintes convenções tipográficas, a adoptar nestes apontamentos:
  - $\boldsymbol{x}$: vector de $\mathbb{R}^n$. Ex.: $\boldsymbol{x} = (1, -3)$
  - $\mathbf{u}$: vector coluna. Ex.: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$

– $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$: vector coluna das coordenadas de $\boldsymbol{x}$ na base $\mathcal{B}$.

Exemplo: (Seja $\mathcal{B}$ a base $\big((0,1),(1,1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$)

$\boldsymbol{x} = (1,-3)$

$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{E}_2} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right]$

$[\boldsymbol{x}] = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right]$ (o mesmo que o anterior; subentende-se que se trata da base canónica)

$\mathbf{x} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right]$ (o mesmo que o anterior)

$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{smallmatrix} -4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$

$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \left[\begin{smallmatrix} -4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ (o mesmo que o anterior)

$(\boldsymbol{x})_{\mathcal{B}} = (-4,1)$ (vector formado pelas coordenadas de $\boldsymbol{x}$ na base $\mathcal{B}$)

$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{E}_2} = M_{\mathcal{E}_2 \leftarrow \mathcal{B}}[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$, ou seja, $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} -4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$

- Estabelecemos que a *base ordenada canónica* no espaço das matrizes reais $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (respectivamente, matrizes complexas $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$) é o conjunto ordenado $\left(\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]\right)$. No caso geral das matrizes $\mathbb{M}_{n\times k}$, a base canónica é semelhante: é constituída por matrizes com todas as entradas nulas exceto uma com o valor 1; a ordenação é feita de modo que a entrada não nula é a entrada-(11) no caso da 1ª matriz, e vai "percorrendo as linhas" da esquerda para a direita.

Os espaços vectoriais $\mathbb{R}^n$

3-1) Quais dos vectores seguintes são combinação linear dos vectores $\boldsymbol{u} = (0,-2,2)$ e $\boldsymbol{v} = (1,3,-1)$?

a) $(2,2,2)$
b) $(3,1,5)$
c) $(0,4,5)$
d) $(0,0,0)$

3-2) Exprima os vectores seguintes como combinação linear dos vectores $\boldsymbol{u} = (2,1,4)$, $\boldsymbol{v} = (1,-1,3)$ e $\boldsymbol{w} = (3,2,5)$.

a) $(-9,-7,-15)$

b) $(6, 11, 6)$
c) $(0, 0, 0)$
d) $(7, 8, 9)$

3-3) Considere os vectores:

$$\boldsymbol{v_1} = (2, 1, 0, 3) \qquad \boldsymbol{v_2} = (3, -1, 5, 2) \qquad \boldsymbol{v_3} = (-1, 0, 2, 1)$$

Quais dos vectores seguintes pertencem a $\mathcal{L}\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$?

a) $(2, 3, -7, 3)$
b) $(0, 0, 0, 0)$
c) $(1, 1, 1, 1)$
d) $(-4, 6, -13, 4)$

3-4) Diga, justificando a resposta, se o seguinte conjunto é ou não um subespaço linear de $\mathbb{R}^2$.

a) A reunião dos 2º e 4º quadrantes.
b) O semiplano "superior" delimitado pela recta $y = -x$.
c) A região que é delimitada pelas rectas $y = x$ e $y = -x$ e contém o eixo dos yy.

3-5) Diga, justificando a resposta, se o conjunto indicado é gerador de $\mathbb{R}^2$.

a) $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$, sendo $\boldsymbol{u}$ colinear com $\boldsymbol{v}$.
b) $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$, com $\boldsymbol{u}$ situado na recta $y = x$ e $\boldsymbol{v}$ situado na recta $y = 2x$, sendo ambos não nulos.
c) $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$, com $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ como na alínea anterior e $\boldsymbol{w}$ situado no 3º quadrante.

3-6) Quais dos seguintes conjuntos com as operações usuais de adição vectorial e multiplicação por escalares reais são subespaços lineares de $\mathbb{R}^3$?

a) O conjunto de vectores da forma $(a, 0, 0)$ com a real.
b) O conjunto de vectores da forma $(a, 1, 1)$ com a real.
c) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com $b = a + c$ e a, b, c reais.

d) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com a, b, c inteiros.

e) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com $b = a + c + 1$ e a, b, c reais.

3-7) Quais dos seguintes conjuntos com as operações usuais de adição vectorial e multiplicação por escalares reais são subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$?

a) O conjunto de vectores da forma $(a, 0, 0, 1)$ com a real.

b) O conjunto de vectores da forma $(a, b, 0, 0)$ com a, b reais.

c) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com $b = a + c - d$ e $c = 2d$, sendo a, b, c, d reais.

d) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com a, b, c, d positivos.

e) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com $c = a + b + 1$ e $d = 2a - b$, sendo a, b, c reais.

3-8) Para cada um dos seguintes conjuntos, diga, justificando, se é subespaço linear do espaço $\mathbb{R}^n$ apropriado.

a) $\mathcal{L}(\{(1, 0, -1)\}) \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = -2\}$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$

d) $\mathcal{L}(\{(1, 0, -1)\}) \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$

e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y + 1 \wedge z + x = 0\}$

f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0 \wedge x - 2y - z = 0\}$

g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \wedge x + y + z = -1\}$

h) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1 \wedge x + z = 0\}$

i) $\mathcal{L}\{(1, 0, -1)\} \cap \mathcal{L}\{(1, 2, 0), (-1, 1, 1)\}$

j) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy + x = 0 \wedge z + x = 0\}$

3-9) Mostre que os conjuntos $\mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_n, \mathbb{P}$ e $C[a, b]$ (sendo $a < b$) são espaços lineares reais, quando munidos com as operações de adição e multiplicação por escalares usuais.

3-10) Verifique se $\mathbb{R}^2$ é um espaço linear, relativamente às operações de adição e multiplicação por escalares definidas por:

- $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ para $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$
- $\alpha(x, y) = (-\alpha y, \alpha x)$ para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

Independência linear, bases e dimensão

3-11) Determine quais dos conjuntos seguintes são linearmente independentes, e obtenha uma base para a sua expansão linear.

a) $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$

b) $\{(1,2,6),(1,1,1),(2,3,7),(0,1,5)\}$

c) $\{(2,2,2),(0,0,0),(0,1,1)\}$

d) $\{(1,2,4),(-2,-4,-8)\}$

e) $\{(2,-1,3),(4,1,2),(8,-1,8)\}$

f) $\{(3,1,4),(2,-3,5),(5,-2,9),(1,4,-1)\}$

g) $\{(1,2,6),(3,4,1),(4,3,1),(3,3,1)\}$

3-12) Seja W o subespaço linear de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + 5z = 0\}$$

a) Determine uma base $\mathcal{B}$ do subespaço W, e indique a dimensão de W.

b) Verifique que o vector $\boldsymbol{v} = (1,4,1)$ pertence a W, e determine o vector $(\boldsymbol{v})_{\mathcal{B}}$ das coordenadas de $\boldsymbol{v}$ na base $\mathcal{B}$.

3-13) Determine uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços lineares de $\mathbb{R}^3$.

a) $\{(x,y,z) : x - y = 0\}$

b) $\{(x,y,z) : x = -2y \wedge z = -4y\}$

c) O conjunto dos vectores (a,b,c) com $b = a + c$.

d) O conjunto dos vectores (a,b,c) com $b = a + c$ e $c = 2a$.

3-14) Seja W o subespaço linear de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0 \wedge -4y + z = 0 \wedge x - w = 0\}$$

a) Determine uma base ordenada $\mathcal{B}$ do subespaço W, e indique a dimensão de W.

b) Verifique que o vector $\boldsymbol{v} = (1,0,0,1)$ pertence a W, e determine o vector coluna $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$ das coordenadas de $\boldsymbol{v}$ na base da alínea anterior.

3-15) Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores $\boldsymbol{u} = (1, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{v} = (2, 2, 0, 0)$ e $\boldsymbol{w} = (0, -2, 0, 0)$.

a) Mostre que $S = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ não é uma base de W.

b) Determine uma base de W e a sua dimensão.

3-16) Determine uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$.

a) $\{(x, y, z, w) \,:\, 3x - 2y + 5z - w = 0\}$

b) $\{(x, y, z, w) \,:\, -4y + w = 0 \wedge 2y - \frac{1}{2}w = 0\}$

c) O conjunto dos vectores da forma $(a, b, c, 0)$.

d) O conjunto dos vectores (a, b, c, d) com $d = a + b$ e $c = a - b$.

e) O conjunto dos vectores (a, b, c, d) com $a = b = c = d$.

3-17) Acrescente um vector da base canónica de $\mathbb{R}^3$ ao conjunto $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ de modo a obter uma base de $\mathbb{R}^3$.

a) $\boldsymbol{v_1} = (-1, 2, 3) \qquad \boldsymbol{v_2} = (1, -2, -2)$

b) $\boldsymbol{v_1} = (1, -1, 2) \qquad \boldsymbol{v_2} = (3, 1, -2)$

3-18) Acrescente vectores da base canónica de $\mathbb{R}^4$ ao conjunto $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ de modo a obter uma base de $\mathbb{R}^4$.

$$\boldsymbol{v_1} = (1, -4, 2, -3) \qquad \boldsymbol{v_2} = (-3, 8, -4, 6)$$

3-19) Seja $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de um espaço linear W, e considere os vectores:

$$u_1 = v_1 \qquad u_2 = v_1 + v_2 \qquad u_3 = v_1 + v_2 + v_3$$

Mostre que $\{u_1, u_2, u_3\}$ é também uma base de W.

3-20) Determine uma base do subespaço linear de $\mathbb{R}^3$ gerado por cada um dos conjuntos seguintes, e obtenha equações vetoriais, paramétricas e cartesianas, desses subespaços.

a) $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

b) $\{(1,2,6),(1,1,1),(2,3,7),(0,1,5)\}$

3-21) Determine o vector $(2,1)_{\mathcal{B}_i}$ das coordenadas de $(2,1)$ na base $\mathcal{B}_i$.

a) $\mathcal{B}_1 = \big((1,0),(0,1)\big)$
b) $\mathcal{B}_2 = \big((1,0),(2,2)\big)$
c) $\mathcal{B}_3 = \big((1,0),(1,-1)\big)$

3-22) Determine o vector $(2,-1,3)_{\mathcal{B}_i}$ das coordenadas de $(2,-1,3)$ na base $\mathcal{B}_i$.

a) $\mathcal{B}_1 = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$
b) $\mathcal{B}_2 = \big((1,0,0),(2,2,0),(3,3,3)\big)$

3-23) Determine o vector $(1,0,2,-1)_{\mathcal{B}_i}$ das coordenadas de $(1,0,2,-1)$ na base $\mathcal{B}_i$.

a) $\mathcal{B}_1 = \big((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\big)$
b) $\mathcal{B}_2 = \big((1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\big)$

3-24) Dada a base ordenada $\mathcal{B}$ e a coluna $\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$, determine o vector $\boldsymbol{x}$.

a) $\mathcal{B} = \big((2,1),(-1,1)\big) \qquad \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) $\mathcal{B} = \big((1,-1,1),(0,1,2),(-1,2,0)\big) \qquad \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3-25) Dado o subespaço

$$V = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x + y - z = 0\big\} ,$$

de $\mathbb{R}^3$, diga, justificando a resposta, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa.

a) O conjunto $\{(-1,1,-1),(0,2,1)\}$ é uma base de V.
b) A dimensão de V é 2.
c) O conjunto $\{(1,0,2),(0,0,-1),(0,1,1)\}$ é linearmente independente.
d) O conjunto $\{(1,0,2),(0,0,-1),(0,1,1)\}$ é uma base de V.

Subespaços associados a uma matriz

3-26) Determine a dimensão e uma base do núcleo, do espaço gerado pelas linhas e do espaço gerado pelas colunas da matriz:

$$\text{(a)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad \text{(b)}\quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3-27) Seja A uma matriz e seja B uma matriz que se obteve efectuando uma operação elementar sobre A. Mostre que o espaço $\mathscr{L}(A)$ das linhas da matriz A é igual ao espaço $\mathscr{L}(B)$ das linhas da matriz B.

3-28) Seja R uma matriz $k \times n$ em escada de linhas. Mostre que o conjunto das linhas não nulas de R é linearmente independente.

3-29) Recorrendo às propriedades expressas nos exercícios 3-27 e 3-28, determine uma base e a dimensão de cada um dos subespaços lineares (do espaço $\mathbb{R}^n$ apropriado) gerados pelos conjuntos seguintes.

a) $\{(1,1,2),(1,2,1),(2,3,3)\}$

b) $\{(-1,1,1,2),(1,1,0,1),(-2,0,1,1),(3,1,-1,0)\}$

3-30) Diga se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa:

a) A característica de uma matriz é igual ao número das suas colunas não nulas.

b) A única matriz de tipo $m \times n$ com característica 0 é a matriz nula.

c) As operações elementares preservam a característica.

d) A característica de uma matriz é igual ao número máximo de colunas da matriz linearmente independentes.

e) A característica de uma matriz é igual ao número máximo de linhas da matriz linearmente independentes.

f) A característica de uma matriz $n \times n$ é menor ou igual a n.

3-31) Seja A uma matriz real cuja forma reduzida de escada de linhas é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Complete de modo a obter afirmações verdadeiras:

a) A característica da matriz A é ....

b) A dimensão do espaço das colunas de A é ....

c) O vector não nulo $v =$ .... pertence ao espaço das linhas de A.

d) Uma base do núcleo de A é ....

3-32) Utilize a informação da seguinte tabela para determinar a dimensão do espaço gerado pelas linhas da matriz A, do espaço gerado pelas colunas de A, do núcleo de A (nulidade de A) e do núcleo de A^T.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
$\operatorname{car} A$	3	2	1	2	2	0	2

3-33) Utilize a informação da seguinte tabela para determinar se o correspondente sistema não homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível. Em caso afirmativo, indique o número de variáveis livres da solução geral.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
$\operatorname{car} A$	3	2	1	2	2	0	2
$\operatorname{car}(A\|\mathbf{b})$	3	3	1	2	3	0	2

3-34) Determine bases para o núcleo $\mathscr{N}(A)$, para o espaço das linhas $\mathscr{L}(A)$ e para o espaço das colunas $\mathscr{C}(A)$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 2i \end{bmatrix},$$

e indique a dimensão de cada um destes espaços lineares complexos.

3-35) Sempre que $\mathbf{b}$ pertencer ao espaço gerado pelas colunas da matriz real A, escreva $\mathbf{b}$ como combinação linear das colunas de A.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

3-36) Dados os vectores $\boldsymbol{u} = (1, -1, 1)$ e $\boldsymbol{v} = (1, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, considere as afirmações seguintes:

I) O espaço $\mathcal{L}\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, (0, 1, 0)\}$ é um plano.

II) Existe um vector $\boldsymbol{e}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz

$$A = [\ \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid \mathbf{e}\ ]$$

é invertível.

III) O vector $\boldsymbol{x} = (5, 0, 3)$ é uma combinação linear de $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$;

IV) O subespaço linear de $\mathbb{R}^3$ gerado por $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ é

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \wedge z = 0\}.$$

A lista completa das afirmações correctas é:

A) I e II e III B) I e III C) I e II D) II e III e IV

3-37) Determine a dimensão e uma base do subespaço das soluções de cada um dos sistemas seguintes:

(a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2x - y + 2z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \qquad$ (b) $\begin{cases} 3x + y + z + t = 0 \\ 5x - y + z - t = 0 \end{cases}$

3-38) Suponha que o vector $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 2, 4, 3)$ é uma solução particular de um sistema de equações lineares não homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, e que a solução geral do sistema homogéneo associado, $A\mathbf{x} = 0$, satisfaz

$$\begin{cases} x_1 = -3r + 4s \\ x_2 = r - s \\ x_3 = r \\ x_4 = s\,, \end{cases}$$

onde r e s são parâmetros reais.

a) Escreva uma representação paramétrica da solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sob forma vectorial, exprimindo-a como uma combinação linear de vectores.

b) Obtenha a solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sob forma vectorial, e exprima-a como uma combinação linear de vectores.

3-39) Seja A uma matriz real, e suponha que

$$\boldsymbol{x_1} = (-3, -2, 2, -1)$$

é uma solução particular do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde

$$\boldsymbol{b} = (2, -4, 3, -4)\,.$$

Suponha ainda que $\boldsymbol{x_0} = (1, 1, 1, 1)$ é uma solução particular do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Complete de modo a obter afirmações verdadeiras:

a) Um vector não nulo que pertence ao espaço das colunas de A é ....

b) Uma solução particular não nula do sistema $A^T A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é ....

c) Se somarmos todas as colunas de A, obtemos o vector ....

d) Uma solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ diferente de $\mathbf{x_1}$ é ....

e) Se a dimensão do núcleo de A for igual a 1, a natureza do sistema (refira o grau de indeterminação, se aplicável) é ....

3-40) Seja A uma matriz tal que o conjunto

$$\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 2, 1)\}$$

é uma base do núcleo $\mathscr{N}(A)$ da matriz A. Considere as afirmações seguintes:

I) O vector $\boldsymbol{x} = (-5, -2, 3, -2)$ é solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

II) A dimensão do espaço $\mathscr{C}(A)$ das colunas da matriz A é 2;

III) A matriz A tem 4 colunas;

IV) $\mathscr{N}(A) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2z = y \wedge z = w\}$.

A lista completa das afirmações correctas é

A) I, II e III   B) II, III e IV   C) II e IV   D) II e III

3-41) Sempre que possível, dê exemplo de uma matriz A de tipo 5×3 tal que:

a) $(1, 1, 1, 1, 1) \notin \mathscr{C}(A)$

b) $(1, 1, 1) \notin \mathscr{L}(A)$

c) As colunas de A são um conjunto gerador de $\mathbb{M}_{5\times 1}$

d) $\operatorname{car} A = 4$

e) O conjunto das linhas de A constitui uma base de $\mathbb{M}_{1\times 3}$.

f) O conjunto das linhas de A contém (estritamente) uma base de $\mathbb{M}_{1\times 3}$.

g) A equação matricial $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ corresponde a um sistema possível e determinado.

Espaços vectoriais

3-42) Exprima a matriz

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

como combinação linear das matrizes seguintes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

3-43) Exprima o polinómio $p(x) = -9 - 7x - 15x^2$ como combinação linear dos polinómios

$$p_1(x) = 2 + x + 4x^2 \quad p_2(x) = 1 - x + 3x^2 \quad p_3(x) = 3 + 2x + 5x^2\,.$$

3-44) Considere as matrizes:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Determine se o seguinte vector de $\mathbb{M}_{2\times 2}$ é combinação linear das matrizes anteriores:

a) $\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

3-45) Determine se os vectores seguintes são ou não linearmente independentes. Caso o não sejam, indique um subconjunto linearmente independente com o maior número possível de elementos.

a) No espaço $\mathbb{P}_3$ dos polinómios de grau menor ou igual a 3:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= 1 \\ p_2(t) &= 1 + t \\ p_3(t) &= 1 + t + t^2 \\ p_4(t) &= 1 + t + t^2 + t^3 \end{aligned}$$

b) No espaço $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem 2 com entradas reais:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

3-46) a) Calcule as coordenadas do polinómio $p(t) = (1-t)(1+t)$ na base canónica de $\mathbb{P}_3$.

b) Considere o subespaço linear S de $\mathbb{P}_3$ gerado pelo conjunto:

$$\{1 - 2t,\ 1 + t^2,\ 1 + 2t - 3t^2,\ t^2\}$$

Verifique que este conjunto não é uma base de S, e indique uma base de S.

c) Determine o vector das coordenadas do polinómio $p(t) = 3 - t^2$ nas bases das alíneas a) e b).

d) Considere o conjunto:

$$W = \{p \in \mathbb{P}_3 \,:\, p(0) = 0\}$$

Mostre que W é um subespaço linear de $\mathbb{P}_3$, e indique a dimensão deste subespaço.

3-47) Exprima o vector v como combinação linear dos vectores da base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{P}_2$.

a) $v = 4 - 3x + x^2$ $\quad v_1 = 1,\ v_2 = x,\ v_3 = x^2$

b) $v = 2 - x + x^2$ $\quad v_1 = 1 + x,\ v_2 = 1 + x^2,\ v_3 = x + x^2$

3-48) Determine as coordenadas do vector A na base (A_1, A_2, A_3, A_4) de $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

3-49) Mostre que se U e V são subespaços lineares de um espaço W, então $U \cap V$ e $U + V$ também são subespaços lineares de W.

3-50) Dados os subespaços U e W de $\mathbb{R}^4$, determine uma base de $U \cap W$ e uma base de $U + W$, e indique as dimensões destes subespaços.

a) $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 2, 0)\}$
$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y + 2z - w = 0 \wedge -y + 3w = 0 \wedge z = 0\}$

b) $U = \mathcal{L}\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 1, 0)\}$
$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, -x + y - 2w = 0 \wedge 2y - z = 0\}$

c) $U = \mathcal{L}(\{(0,0,1,0),(-2,0,0,-2)\})$
$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x+2y-z-w=0 \wedge x-w=0\}$

3-51) Verifique que $\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U+W)$ nos três casos considerados no problema anterior.

Diga em que casos os pares de subespaços decompõem $\mathbb{R}^4$ numa soma directa.

3-52) Verifique quais dos conjuntos seguintes são espaços lineares reais (relativamente às operações usuais), e para os que o forem indique a sua dimensão e determine uma base.

a) O subconjunto do espaço linear $\mathbb{P}_5$ formado pelos polinómios:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \qquad \text{(com } a_0 + a_1 = 0\text{)}$$

b) O subconjunto do espaço $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes invertíveis.

c) O conjunto $\{\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,:\, a \in \mathbb{Z}\}$.

d) O seguinte subconjunto do espaço das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}\{\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t,\ \cos 2t + \operatorname{sen} t,\ \operatorname{sen} t\}$$

3-53) Determine se o seguinte conjunto é espaço linear (real ou complexo), relativamente às respectivas operações de adição e multiplicação por escalar usuais.

a) O conjunto das matrizes da forma $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right]$.

b) O conjunto das matrizes diagonais 2×2.

c) O conjunto das matrizes quadradas que comutam com uma dada matriz B.

d) O conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ímpares.

e) O conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que se anulam em 1.

f) O conjunto dos polinómios reais que se anulam em 0.

g) O conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com segunda derivada contínua tais que $f''(x) + af'(x) + bf(x) = \cos x$, com a e b dados.

3-54) Para cada um dos seguintes conjuntos de matrizes, determine se constitui um espaço linear complexo, relativamente às operações usuais. Em caso afirmativo, determine uma base do subespaço.

a) O conjunto das matrizes complexas $n \times n$ invertíveis.

b) O conjunto das matrizes complexas 2×2 que comutam com a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

3-55) Diga, justificando a resposta, se o seguinte subconjunto do espaço linear dado é subespaço linear. Em caso afirmativo, indique a sua dimensão.

I) Em $\mathbb{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$:

a) O conjunto das matrizes cujas entradas são números inteiros.

b) O conjunto das matrizes com traço nulo.

c) O conjunto das matrizes anti-simétricas.

d) O conjunto das matrizes com determinante nulo.

II) Em $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$:

a) O conjunto dos polinómios com termo independente nulo.

b) O conjunto dos polinómios $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ tais que $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

c) O conjunto dos polinómios com coeficientes inteiros.

d) O conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a 1.

3-56) Determine uma base para cada um dos espaços lineares seguintes.

a) $\mathcal{L}\{1,\, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\}$ (subespaço de $\mathbb{P}_3$)

b) O subespaço de $\mathbb{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ gerado pelas matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

3-57) a) Determine as coordenadas do polinómio $(1-t)(1+t)$ na base canónica de $\mathbb{P}_2$.

b) Considere o subconjunto $S \subset \mathbb{P}_2$ dado por:

$$S = \{1-2t, 1+t^2, t, 1+2t-3t^2, t^2\}$$

Diga, justificando, se S é uma base de $\mathbb{P}_2$.

c) Diga qual a dimensão de $\mathcal{L}(S)$, e determine uma base deste espaço.

d) Diga se o subconjunto de todos os polinómios de $\mathbb{P}_2$ que se anulam em 0 é um subespaço linear de $\mathbb{P}_2$. Em caso afirmativo, indique a sua dimensão e uma base.

3-58) Considere a base ordenada $\mathcal{B} = (1, 1+t, 2t+t^2)$ do espaço linear $\mathbb{P}_2$. As coordenadas de $p(t) = 3 + t + t^2$ na base $\mathcal{B}$ são:

☐ $(8, -3, 1)$ ☐ $(5, -1, 1)$ ☐ $(6, -1, 1)$ ☐ $(4, -1, 1)$

Matrizes de mudança de base

3-59) a) Determine a matriz $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}_2}$ de mudança de base da base canónica de $\mathbb{R}^2$ para a base ordenada $\mathcal{B} = \big((-1,0),(-1,1)\big)$, e calcule o vector das coordenadas de $(2,2)$ na base $\mathcal{B}$.

b) Determine a matriz $M_{\mathcal{E}_2\leftarrow\mathcal{B}'}$ de mudança de base da base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ para a base canónica, sendo $\mathcal{B}' = \big((1,2),(-2,1)\big)$.

c) Determine a matriz $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$.

3-60) Considere a base ordenada $\mathcal{B} = \big((0,1,0),(1,0,1),(2,1,0)\big)$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Determine a matriz de mudança de base da base canónica de $\mathbb{R}^3$ para a base $\mathcal{B}$.

b) Determine o vector $\boldsymbol{v}$ tal que $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \left[\begin{smallmatrix}1\\-1\\2\end{smallmatrix}\right]$.

c) Determine a matriz de mudança de base da base $\mathcal{B}$ para a base

$$\mathcal{B}' = \big((-1,0,-1),(2,1,0),(0,1,0)\big).$$

d) Determine a matriz de mudança de base da base canónica de $\mathbb{R}^3$ para a base $\mathcal{B}'$ usando as matrizes de mudança de base das alíneas anteriores.

3-61) Seja $\mathcal{B}$ a base de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_{\mathcal{E}_3\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\\0 & 0 & -3\end{bmatrix}$ e seja $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ a base ordenada de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$(v_1)_{\mathcal{B}} = (1,0,-1), \qquad (v_2)_{\mathcal{B}} = (0,1,0) \qquad (v_3)_{\mathcal{B}} = (1,-1,1).$$

a) Determine a base $\mathcal{B}$.

b) Calcule $(1,2,-1)_{\mathcal{B}}$.

c) Determine as matrizes $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ e $M_{\mathcal{E}_3\leftarrow\mathcal{B}'}$.

d) Determine a base $\mathcal{B}'$.

3-62) Dada uma base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$, considere os vectores:

$$\begin{aligned} u' &= u + v \\ v' &= u - v \\ w' &= u + v + w \end{aligned}$$

a) Mostre que (u', v', w') é uma base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

b) Determine a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{B}'$.

c) Calcule $(2u + 3v - w)_{\mathcal{B}'}$.

3-63) Determine a matriz de mudança de base da base canónica de $\mathbb{P}_2$ para a base ordenada $\mathcal{B} = \big(1+t, 1+t^2, 1+t+t^2\big)$, e calcule o vector das coordenadas de $2 - 3t + t^2$ na base $\mathcal{B}$.

3-64) Obtenha uma base do subespaço de $\mathbb{M}_{2\times 2}$ constituído pelas matrizes de traço nulo, e determine uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{M}_{2\times 2}$ que a contenha. Calcule a matriz de mudança de base $M_{\mathcal{B}_c\leftarrow\mathcal{B}}$, sendo $\mathcal{B}_c$ a base canónica de $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

Soluções

3-1) a), b) e d).

3-2)
a) $(-9,-7,-15) = -2(2,1,4) + (1,-1,3) - 2(3,2,5)$
b) $(6,11,6) = 4(2,1,4) - 5(1,-1,3) + 1(3,2,5)$
c) $(0,0,0) = 0(2,1,4) + 0(1,-1,3) + 0(3,2,5)$
d) $(7,8,9) = 0(2,1,4) - 2(1,-1,3) + 3(3,2,5)$

3-3) a), b) e d).

3-4)
a) Não.
b) Não.
c) Não.

3-5)
a) Não.
b) Sim.
c) Sim.

3-6)
a) Sim (é subespaço de $\mathbb{R}^3$).
b) Não.
c) Sim.
d) Não.

e) Não.

3-7) a) Não (não é subespaço de $\mathbb{R}^4$).
b) Sim.
c) Sim.
d) Não.
e) Não.

3-8) a) Não.
b) Não.
c) Não.
d) Sim.
e) Não.
f) Sim.
g) Não.
h) Não.
i) Sim.
j) Não.

3-10) Não é espaço vectorial.

3-11) a) É linearmente independente. Base: $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$
b) É linearmente dependente. Base: $\{(1,2,6),(1,1,1)\}$
c) É linearmente dependente. Base: $\{(2,2,2),(0,1,1)\}$
d) É linearmente dependente. Base: $\{(1,2,4)\}$
e) É linearmente dependente. Base: $\{(2,-1,3),(4,1,2)\}$
f) É linearmente dependente. Base: $\{(3,1,4),(2,-3,5)\}$
g) É linearmente dependente. Base: $\{(1,2,6),(3,4,1),(4,3,1)\}$

3-12) a) $\mathcal{B}$: $((\frac{2}{3},1,0),(-\frac{5}{3},0,1))$
b) $(\boldsymbol{v})_{\mathcal{B}} = (4,1)$

3-13) a) Base: $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ Dimensão: 2

b) Base: $\{(-2,1,-4)\}$ Dimensão: 1

c) Base: $\{(1,1,0),(-1,0,1)\}$ Dimensão: 2

d) Base: $\{(1,3,2)\}$ Dimensão: 1

3-14) a) Base: $\mathcal{B}=\big((1,0,0,1)\big)$ Dimensão: 1

b) $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}=[1]$

3-15) b) Base: $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\}$ Dimensão: 2

3-16) a) Base: $\big((2,3,0,0),(-5,0,3,0),(1,0,0,3)\big)$ Dimensão: 3

b) Base: $\big((1,0,0,0),(0,1,0,4),(0,0,1,0)\big)$ Dimensão: 3

c) Base: $\big((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\big)$ Dimensão: 3

d) Base: $\big((1,-1,2,0),(1,1,0,2)\big)$ Dimensão: 2

e) Base: $\big((1,1,1,1)\big)$ Dimensão: 1

3-17) a) $(1,0,0)$

b) $(0,1,0)$

3-18) $(0,0,1,0)$ e $(0,0,0,1)$.

3-20) a) Base: $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$
Equação: $-x+y=0$

As equações cartesianas podem ser obtidas da forma seguinte. O conjunto $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ é linearmente independente e, portanto, é uma base da sua expansão linear S. Se designarmos por (x,y,z) um elemento arbitrário de S, a matriz

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & x\\ 1 & 0 & y\\ 0 & 1 & z\end{bmatrix}$$

tem característica menor que 3 se e só se o conjunto

$$\{(1,1,0),(0,0,1),(x,y,z)\}$$

for linearmente dependente. Conclui-se assim que $\operatorname{car} A = 2$. Atendendo a este facto, reduzamos a matriz A a uma matriz em escada de linhas usando o método de eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2-L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & -x+y \\ 0 & 1 & z \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & -x+y \end{bmatrix}$$

Obtemos deste modo a equação $-x+y=0$ para o plano S. Neste exemplo muito simples, esta equação poderia ser obtida simplesmente "olhando" para o conjunto $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$. No entanto, pretende-se com esta resolução ilustrar um método geral.

b) Base: $\{(1,2,6),(1,1,1)\}$
Equação: $z+4x-5y=0$

3-21) a) $(2,1)_{\mathcal{B}_1} = (2,1)$
b) $(2,1)_{\mathcal{B}_2} = (1,1/2)$
c) $(2,1)_{\mathcal{B}_3} = (3,-1)$

3-22) a) $(2,-1,3)_{\mathcal{B}_1} = (2,-1,3)$
b) $(2,-1,3)_{\mathcal{B}_2} = (3,-2,1)$

3-23) a) $(1,0,2,-1)_{\mathcal{B}_1} = (1,0,2,-1)$
b) $(1,0,2,-1)_{\mathcal{B}_2} = (1,-2,3,-1)$

3-24) a) $\boldsymbol{x} = (7,2)$
b) $\boldsymbol{x} = (2,-2,1)$

3-25) a) Falsa.

b) Verdadeira.

c) Verdadeira.

d) Falsa.

3-26) a) Base de $\mathscr{N}(A)$: $\{(1,1,0,2),(0,0,1,0)\}$ $\quad\dim\mathscr{N}(A)=2$
Base de $\mathscr{L}(A)$: $\{(1,-3,0,1),(1,1,0,-1)\}$ $\quad\dim\mathscr{L}(A)=2$
Base de $\mathscr{C}(A)$: $\{(1,1,0),(-3,1,0)\}$ $\quad\dim\mathscr{C}(A)=2$

b) Base de $\mathscr{N}(B)$: $\varnothing$ $\quad\dim\mathscr{N}(B)=0$
Base de $\mathscr{L}(B)$: $\{(4,2),(0,1)\}$ $\quad\dim\mathscr{L}(B)=2$
Base de $\mathscr{C}(B)$: $\{(4,0,2),(2,1,1)\}$ $\quad\dim\mathscr{C}(B)=2$

3-29) a) Base: $\big\{(1,1,2),(0,1,-1)\big\}$ $\quad$ Dimensão: 2

b) Base: $\big\{(-1,1,1,2),(0,2,1,3)\big\}$ $\quad$ Dimensão: 2

a) Consideremos a matriz

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&3&3\end{bmatrix},$$

cujas linhas são constituidas pelos vectores dados. Recorrendo ao resultado expresso no exercício 3-27), sabemos que o espaço das linhas de A e o espaço das linhas de qualquer matriz obtida a partir de A à custa de operações elementares coincidem.

Reduzindo A a uma matriz em escada de linhas usando o método de eliminação de Gauss obtemos:

$$\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow[L_2-L_1]{}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\2&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow[L_3-2L_1]{}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[L_3+L_2]{}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

As considerações anteriores permitem concluir que o espaço das linhas da matriz $\left[\begin{smallmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right]$ é o espaço $\mathscr{L}(A)$. Atendendo a que, por outro lado, as linhas não nulas de uma matriz em escada de linhas são linearmente independentes (cf. o exercício 3-28)), deduz-se que o conjunto $\{(1,1,2),(0,1,-1)\}$ é uma base de $\mathscr{L}(A)$.

b) A resolução desta alínea é semelhante.

3-30)

a) Falsa.
b) Verdadeira.
c) Verdadeira.
d) Verdadeira.
e) Verdadeira.
f) Verdadeira.

3-31)

a) 3
b) 3
c) $(1, 3, 0, 0, 0)$
d) $\{(-3, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 2, -4, 1])\}$

3-32)

a) $\dim \mathscr{L}(A) = 3$
$\dim \mathscr{C}(A) = 3$
$\dim \mathscr{N}(A) = 0$
$\dim \mathscr{N}(A^T) = 0$

b) $\dim \mathscr{L}(A) = 2$
$\dim \mathscr{C}(A) = 2$
$\dim \mathscr{N}(A) = 1$
$\dim \mathscr{N}(A^T) = 1$

c) $\dim \mathscr{L}(A) = 1$
$\dim \mathscr{C}(A) = 1$
$\dim \mathscr{N}(A) = 2$
$\dim \mathscr{N}(A^T) = 2$

d) $\dim \mathscr{L}(A) = 2$
$\dim \mathscr{C}(A) = 2$
$\dim \mathscr{N}(A) = 7$
$\dim \mathscr{N}(A^T) = 3$

e) $\dim \mathscr{L}(A) = 2$
$\dim \mathscr{C}(A) = 2$
$\dim \mathscr{N}(A) = 3$
$\dim \mathscr{N}(A^T) = 7$

f) $\dim \mathscr{L}(A) = 0$

$\dim \mathscr{C}(A) = 0$
$\dim \mathscr{N}(A) = 4$
$\dim \mathscr{N}(A^T) = 4$

g) $\dim \mathscr{L}(A) = 2$
$\dim \mathscr{C}(A) = 2$
$\dim \mathscr{N}(A) = 0$
$\dim \mathscr{N}(A^T) = 4$

3-33) a) Sim; 0
b) Não.
c) Sim; 2
d) Sim; 7
e) Não.
f) Sim; 4
g) Sim; 0

3-34) Base de $\mathscr{N}(A) : \{(-i, 1, 0)\}$ $\quad \dim \mathscr{N}(A) = 1$
Base de $\mathscr{L}(A) : \{(1, i, 0), (-i, 1, 2i)\}$ $\quad \dim \mathscr{L}(A) = 2$
Base de $\mathscr{C}(A) : \{(1, -i), (0, 2i)\}$ $\quad \dim \mathscr{C}(A) = 2$

3-35) a) $\left[\begin{smallmatrix}-2\\10\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix}3\\-6\end{smallmatrix}\right]$
b) $\mathbf{b} \notin \mathscr{C}(A)$

3-36) C)

3-37) a) Dimensão: 1 Base: $\{(1, 0, 1)\}$
b) Dimensão: 2 Base: $\{(0, -1, 0, 1), (1, 1, -4, 0)\}$

3-38) a) $\mathbf{x} = r \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ com $r, s \in \mathbb{R}$

b) $\mathbf{x} = r \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ com $r, s \in \mathbb{R}$

3-39) a) $(2, -4, 3, -4)$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

e) Possível e indeterminado, com grau de indeterminação 1.

3-40) D)

3-41) a) A matriz nula.

b) A matriz nula.

c) Impossível.

d) Impossível.

e) Impossível.

f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

g) Impossível.

3-42) $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

3-43) $p = -2p_1 + p_2 - 2p_3$

3-44) a) Sim.

b) Sim.

c) Sim.

d) Não.

3-45) a) São linearmente independentes.

b) São linearmente dependentes. Qualquer dos possíveis subconjuntos com dois elementos é linearmente independente.

3-46) a) $(p)_{\mathcal{P}_3} = (1, 0, -1, 0)$

b) Base: $(1 - 2t,\ 1 + t^2,\ 1 + 2t - 3t^2)$

c) $(p)_{\mathcal{P}_3} = (3, 0, -1, 0)$
$(p)_{\mathcal{B}} = (\frac{4}{5}, \frac{7}{5}, \frac{4}{5})$ (sendo $\mathcal{B}$ a base de b))

d) $\dim W = 3$

3-47) a) $v = 4v_1 - 3v_2 + v_3$

b) $v = 2v_2 - v_3$

3-48) a) $(-1, 1, -1, 3)$

b) $(1/6, 3, -1/4, 1/2)$

3-50) a) Base de $U + V$: $\{(1, 0, 2, 0), (1, 0, 0, 0)\}$ (dimensão 2)
Base de $U \cap V$: $\varnothing$ (dimensão 0)

b) Base de $U + V$: $\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 2, 0), (-2, 0, 0, 1)\}$ (dimensão 4)
Base de $U \cap V$: $\varnothing$ (dimensão 0)

c) Base de $U + V$: $\{(0, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, -2), (0, 1, 2, 0)\}$ (dimensão 3)
Base de $U \cap V$: $(-2, 0, 0, -2)$ (dimensão 1)

3-51) $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ nos casos a) e b).

3-52) a) É subespaço linear. Base: $\{-1 + t, t^2\}$. Dimensão: 2

b) Não é subespaço linear.

c) Não é subespaço linear.

d) É subespaço linear. Base: $\{\cos 2t + \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t\}$. Dimensão: 2

Sejam a, b e c escalares tais que

$$a(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) + b(\cos 2t + \operatorname{sen} t) + c(\operatorname{sen} t) = 0. \tag{1}$$

O 1º membro representa uma função de t (e não o valor da função num ponto t particular). Para que a função seja nula, é necessário (e suficiente) que a igualdade se verifique *para todos os valores de t*. A igualdade (1) é obviamente válida quando $a = b = c = 0$. Se este for o único caso em que é válida, as funções dadas são linearmente independentes, de contrário serão linearmente dependentes.

Recorrendo à identidade trigonométrica

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x,$$

obtemos as equivalências

$$\begin{aligned} a(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) + b(\cos 2t + \operatorname{sen} t) + c(\operatorname{sen} t) &= 0 \\ a(\cos 2t) + b(\cos 2t + \operatorname{sen} t) + c(\operatorname{sen} t) &= 0 \\ (a+b)\cos 2t + (b+c)\operatorname{sen} t &= 0. \end{aligned}$$

A última igualdade é satisfeita (para todo t) se $a + b = 0$ e $b + c = 0$, o que acontece quando $a = c = -1$ e $b = 1$ (por exemplo). Logo, as funções são linearmente dependentes.

Para obter uma base do subespaço, começamos por retirar ao conjunto dado uma função que seja combinação linear das restantes. Estas geram o mesmo subespaço, e portanto serão uma base desde que sejam linearmente independentes. Uma vez que

$$\cos 2t = (\cos 2t + \operatorname{sen} t) - (\operatorname{sen} t),$$

retiramos a primeira função e ficamos com o conjunto

$$\{\cos 2t + \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t\}.$$

Suponhamos que

$$a(\cos 2t + \operatorname{sen} t) + b(\operatorname{sen} t) = 0 \tag{2}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Considerando o caso particular $t = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} a(\cos 0 + \operatorname{sen} 0) + b \operatorname{sen} 0 &= 0 \\ a &= 0. \end{aligned}$$

Considerando o caso particular $t = \frac{\pi}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned} a(\cos 2\tfrac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2}) + b\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2} &= 0 \\ 0(\dots) + b \cdot 1 &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Logo, este conjunto de funções é linearmente independente, e por conseguinte constitui uma base do subespaço que gera.

3-53) Só o conjunto da alínea g) não é espaço linear.

3-54) a) Não.

b) Sim. Base: $\left\{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]\right\}$

3-55) I) a) Não.

b) Sim. Dimensão: 3

c) Sim. Dimensão: 1

d) Não.

II) Em $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$:

a) Sim. Dimensão: 3

b) Sim. Dimensão: 3

c) Não.

d) Sim. Dimensão: 2

3-56)

$\{1,\, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\}$

$\left\{\left\{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\right\}\right.$

3-57) a) $(1-t^2)_{\mathcal{P}_2} = (1, 0, -1)$

b) Não.

c) $\dim \mathcal{L}(S) = 3$. Base: $\{1-2t, 1+t^2, t\}$

d) É subespaço linear, com dimensão 2. Base: $\{t, t^2\}$

3-58) A resposta correcta é a última.

3-59) a) $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}_2} = \left[\begin{smallmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right]$ $\qquad (2,2)_{\mathcal{B}} = (-4,2)$

b) $M_{\mathcal{E}_2\leftarrow\mathcal{B}'} = \left[\begin{smallmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{smallmatrix}\right]$

c) $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \left[\begin{smallmatrix}-3 & 1\\ 2 & 1\end{smallmatrix}\right]$

3-60) a) $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}_3} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

b) $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v})_{\mathcal{E}_3} = (3,3,-1)$

c) $M_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} = \left[\begin{smallmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right]$

d) $M_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{E}_3} = M_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}_3} = \left[\begin{smallmatrix}0 & 0 & -1\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right]$

3-61) a) $\mathcal{B} = \big((2,1,0),(1,-1,0),(0,1,-3)\big)$

b) $(1,2,-1)_{\mathcal{B}} = (8/9,-7/9,1/3)$

c) $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \left[\begin{smallmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{smallmatrix}\right]$ $\qquad M_{\mathcal{E}_3\leftarrow\mathcal{B}'} = \left[\begin{smallmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 3\\ 3 & 0 & -3\end{smallmatrix}\right]$

d) $\mathcal{B}' = \big((2,0,3),(1,-1,0),(1,3,-3)\big)$

3-62) b) $M_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

c) $(7/2,-1/2,-1)$

3-63) $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{P}_2} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

$(2-3t+t^2)_{\mathcal{B}} = (1,5,-4)$

3-64) Base do subespaço: $\left\{\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\}$

$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}$

$$M_{\mathcal{B}_c \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$