Ficha 2 | Determinantes

Aulas práticas de Álgebra Linear

Licenciatura em Engenharia Naval e Oceânica
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

1º semestre 2020/21

Jorge Almeida e Lina Oliveira

Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

Índice

2

Determinantes

Notação

Sendo A uma matriz:

Determinante de A: $\det A$ ou $|A|$
Submatriz-(ik) de A: A_{ik}
Menor-(ik) de A: M_{ik}
Cofactor-(ik) de A: C_{ik}
Matriz dos cofactores de A: $\operatorname{cof} A$
Matriz adjunta de A: $\operatorname{adj} A$
Matrizes elementares de ordem n:

a) P_{ij}: matriz que resulta de I trocando a linha i com a linha j (sendo I a matriz identidade de ordem n e $i \neq j$)

b) $E_{ij}(\alpha)$ (com $i \neq j$): matriz que resulta de I somando à linha i a linha j multiplicada por α

c) $D_i(\alpha)$ (com $\alpha \neq 0$): matriz que resulta de I multiplicando a linha i por α

Observações

- Na resolução dos exercícios, tenha presente o modo como as operações elementares sobre as linhas de uma matriz alteram o determinante.

  1. Se trocar duas linhas, o determinante muda de sinal.
  2. Se somar à linha i a linha j multiplicada por um escalar, o determinante não se altera.

3. Se multiplicar uma linha por um escalar α, o determinante também é multiplicado por α.

- Relembre que as regras apresentadas no ponto anterior resultam dos axiomas utilizados na definição axiomática da função determinante. Nomeadamente:

    a) $\det I = 1$ $\quad$ (I é a matriz identidade de ordem n)

    b) $\det(P_{ij}A) = -\det A$ $\quad$ (com $i \neq j$)

    c) A função determinante é *linear nas linhas da matriz*:

$$\det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + L_i' \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} L1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i' \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} \vdots \\ \alpha L_i \\ \vdots \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} \vdots \\ L_i \\ \vdots \end{bmatrix}$$

    (Supõe-se que as matrizes são de tipo $n \times n$ e que estão descritas por linhas.)

2-1) Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -10 & 15 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Reduza a matriz A a uma matriz R em escada de linhas, e use o determinante de R para calcular o determinante de A.

2-2) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 3 & 0 \\ \alpha^2 & \alpha^2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix},$$

onde α e β designam números reais.

a) Determine os valores de α para os quais a matriz A é invertível.

b) Faça a discussão do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ em termos dos parâmetros α e β, indicando em cada caso a solução geral desse sistema.

2-3) Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

uma matriz real tal que $\det A = -7$. Calcule:

a) $\det(3A)$ b) $\det(A^{-1})$ c) $\det(2A^{-1})$

d) $\det((2A)^{-1})$ e) $\det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

2-4) Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que $x = 0$ e $x = 2$ satisfazem a condição:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

2-5) Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (a, b, c \in \mathbb{C})$$

2-6) Dê exemplos de matrizes A e B não nulas tais que:

a) $\det(A + B) = \det A + \det B$

b) $\det(A + B) \neq \det A + \det B$

2-7) Seja A uma matriz 4×4 tal que $|A| = -2$. Considere as afirmações seguintes:

I) $|-A^T| = -2$;

II) $|2A| = 32$;

III) $|A^{-3}| = 1/8$;

IV) $|A^3| = -8$.

A lista completa das afirmações correctas é:

A) I e IV B) I, III e IV C) II, III e IV D) I, II e III

2-8) Dê exemplos, se possível, de matrizes A e B tais que:

a) $\det(AB) \neq (\det A)(\det B)$

b) $\det A = 0$ e $\det B = 0$ e $\det(A + B) \neq 0$

c) $\det A \neq 0$, sendo a diagonal de A nula

2-9) Seja A uma matriz 2×2 tais que $|A| = -3$ e seja

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} .$$

Considere as afirmações seguintes:

I) A característica da matriz $A + B$ é sempre maior que 1

II) $|BA^{-2}| = -2/3$

III) O determinante da matriz $A^T + B$ nunca é nulo

IV) $|(BA)^{-2}| = 1/324$

A lista completa das afirmações correctas é:

A) II e III B) I e II e IV C) III e IV D) II e IV

2-10) Considere as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Suponha ainda que $|A| = -3$.

Considere as afirmações seguintes:

I) $|A + B| = -12$;

II) $|A - 2B| = 3$;

III) $|3A^{-1}| = -9$;

IV) $|A + B^T| = -12$.

A lista completa das afirmações correctas é:

A) I e III B) III e IV C) I, III e IV D) I, II e IV

2-11) Exprima o determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 + d_2 \end{vmatrix}$$

numa soma de quatro determinantes, em cujas entradas não figurem adições.

2-12) Exprima o determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 + d_1 & e_1 + f_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 + d_2 & e_2 + f_2 \\ a_3 + b_3 & c_3 + d_3 & e_3 + f_3 \end{vmatrix}$$

numa soma de oito determinantes, em cujas entradas não figurem adições.

2-13) Para que valores de α a matriz não é invertível?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ \alpha & 3 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \alpha - 3 & -2 \\ -2 & \alpha - 2 \end{bmatrix}$

2-14) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a & a^2 & 0 \\ 3 & a^2 & 0 \\ 0 & 5 & a \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

onde a é um número real. Resolva as seguintes questões sem calcular a matriz inversa de A.

a) Determine os valores de a para os quais a matriz A é invertível.

b) Nos casos em que A é invertível, calcule a entrada (23) da matriz A^{-1}.

c) Calcule $\det(A+B)$.

2-15) Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule $\operatorname{cof} A$.

b) Calcule A^{-1} recorrendo ao resultado de a).

c) Calcule $\det((\operatorname{tr} A^T)(A^{-1}A^2))$.

2-16) Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule $\operatorname{cof} A$.

b) Calcule A^{-1} recorrendo ao resultado de a).

2-17) Use o desenvolvimento de Laplace para calcular o determinante da seguinte matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2-18) Use a regra de Cramer para resolver os seguintes sistemas de equações lineares:

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = -2 \\ 4x_1 - 3x_3 = -2 \end{cases}$

2-19) Seja A uma matriz quadrada real, de ordem 3, cujas entradas satisfazem as condições seguintes:

- $a_{ii} = 0$ para $i = 1, 2, 3$

- $a_{ij}a_{kr} > 0$ para $i \neq j$ e $k \neq r$

Considere as afirmações seguintes:

I) O determinante de A é sempre igual a zero.

II) O cofactor (13) de A é nulo.

III) Nenhuma entrada na diagonal da matriz AA^T é nula.

IV) Se existe uma matriz B não nula tal que $AB = 0$, então A não é invertível.

A lista completa de afirmações correctas é:

A) I e II   B) III e IV   C) I e III e IV   D) II

2-20) Sendo A uma matriz anti-simétrica de ordem ímpar, qual o valor de $\det A$? Dê um exemplo de uma matriz anti-simétrica de ordem 3.

2-21) Considere as matrizes

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & -2 & 0 \\ \alpha^2 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha+1 \end{bmatrix},$$

onde α designa um número real.

a) Use a noção de determinante para encontrar os valores de α para os quais o sistema de equações lineares homogéneo $A_\alpha \mathbf{x} = 0$ é possível e determinado.

b) Calcule a entrada (12) da matriz adjunta $\operatorname{adj} A_\alpha$ da matriz A_α (em função do parâmetro α).

c) Para $\alpha = -1$, determine a natureza e calcule explicitamente a solução geral (se aplicável) do sistema

$$A_\alpha \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix},$$

em função do parâmetro real β.

Soluções

2-1) $|A| = 760$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -10 & 15 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \qquad (*)$$

$$= 5 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 19 & -19 \\ 0 & -5 & 13 \end{vmatrix} = 5 \times 19 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 13 \end{vmatrix} = 5 \times 19 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \times 19 \times 8 = 760$$

Para obter $(*)$, usámos a igualdade

$$\begin{vmatrix} 5 & -10 & 15 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5(1) & 5(-2) & 5(3) \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

e a propriedade 3 do primeiro ponto das Observações (veja o início desta ficha).

2-2) a) É invertível para $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 3$.

b) • $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 3$

Como A é invertível, o sistema é possível e determinado, e $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. A solução geral é, neste caso, $\{(\frac{-3(\alpha^2-\beta)}{\alpha^3(\alpha-3)}, \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2(\alpha-3)}, \frac{\beta}{\alpha})\}$.

- $\alpha = 0$
  - $\beta \neq 0$
    O sistema é impossível
  - $\beta = 0$
    O sistema é possível e indeterminado com a solução geral $\{(x, 0, 0) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$ (G.I. = 1).
- $\alpha = 3$
  - $\beta \neq 9$
    O sistema é impossível.
  - $\beta = 9$
    O sistema é possível e indeterminado com a solução geral $\{(-y, y, 3) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$ (G.I. = 1)

2-3) a) $|3A| = -189$
b) $|A^{-1}| = -\frac{1}{7}$
c) $|2A^{-1}| = -\frac{8}{7}$
d) $|(2A)^{-1}| = -\frac{1}{56}$
e) 7

2-6) a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2-7) A)

2-8) a) Impossível.
b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ATENÇÃO

É um erro muito frequente concluir que

"uma matriz com diagonal nula tem determinante nulo" $\leftarrow$ FALSO

Na alínea c) dá-se um exemplo de uma matriz A com determinante igual a -1 e cuja diagonal é nula.

2-9) D)

I é falsa: Exemplo: $A = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right]$

II é verdadeira:

$$|BA^{-2}| = |B||A^{-2}| = |B||A|^{-2} = (-6)(-3)^{-2}$$

III é falsa: Exemplo: $A = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right]$

IV é verdadeira:

$$|(BA)|^{-2} = |BA|^{-2} = (|B||A|)^{-2} = ((-6)(-3))^{-2} = \frac{1}{18^2}$$

2-10) C)

2-11)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 + d_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 + d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

2-12)

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 & e_1+f_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 & e_2+f_2 \\ a_3+b_3 & c_3+d_3 & e_3+f_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 & e_1+f_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 & e_2+f_2 \\ a_3 & c_3 & e_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 & e_1+f_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 & e_2+f_2 \\ b_3 & d_3 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 & e_1+f_1 \\ a_2 & c_2 & e_2 \\ a_3 & c_3 & e_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 & e_1+f_1 \\ b_2 & d_2 & f_2 \\ a_3 & c_3 & e_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 & e_1+f_1 \\ a_2 & c_2 & e_2 \\ b_3 & d_3 & f_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 & e_1+f_1 \\ b_2 & d_2 & f_2 \\ b_3 & d_3 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & e_1 \\ a_2 & c_2 & e_2 \\ a_3 & c_3 & e_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 & f_1 \\ a_2 & c_2 & e_2 \\ a_3 & c_3 & e_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & e_1 \\ b_2 & d_2 & f_2 \\ a_3 & c_3 & e_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 & f_1 \\ b_2 & d_2 & f_2 \\ a_3 & c_3 & e_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & e_1 \\ a_2 & c_2 & e_2 \\ b_3 & d_3 & f_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 & f_1 \\ a_2 & c_2 & e_2 \\ b_3 & d_3 & f_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & e_1 \\ b_2 & d_2 & f_2 \\ b_3 & d_3 & f_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 & f_1 \\ b_2 & d_2 & f_2 \\ b_3 & d_3 & f_3 \end{vmatrix}$$

2-13) a) $\alpha = -1$

b) $\alpha = \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

2-14) a) A matriz é invertível para $a \neq 0 \wedge a \neq 3$.

b) $[A^{-1}]_{23} = 0$

c) $|A+B| = (a+2)^2(a^2-1)$

2-15) a) $\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\operatorname{cof} A)^T = \frac{1}{(-6+2+0)-(0+2+0)} \begin{bmatrix} -8 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

c) -48

$$\begin{aligned} \det\big((\operatorname{tr} A^T)(A^{-1}A^2)\big) &= (\operatorname{tr} A^T)^3 \det(A^{-1}A^2) \\ &= (1+3-2)^3 \det A \\ &= 8(-6) \end{aligned}$$

2-16) a)

$$\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\operatorname{cof} A)^T = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

2-17) $\det A = -17$

2-18) a) $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = -\dfrac{8}{3} \qquad x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = -\dfrac{10}{3}$

2-19) B)

2-20) Sendo A uma matriz quadrada de ordem n (ímpar):

$$|A| = |-A^T| = (-1)^n|A| = -|A|.$$

Consequentemente, $|A| = 0$. Exemplo: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

2-21) a) $\det A_\alpha = 0$ para $\alpha \in \{0, -1, -2\}$

O sistema é possível e determinado para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}$.

b) A entrada (12) da matriz $\operatorname{adj} A_\alpha = [b_{ij}]$ é

$$b_{12} = C_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \alpha + 1 \end{bmatrix} = 2\alpha + 2\,.$$

c)
- $\beta \neq 2$

  O sistema é impossível
- $\beta = 2$

  O sistema é possível e indeterminado com a solução geral $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2, y = -1\}$ (G.I. = 1)