Ficha 1 | Matrizes e sistemas de equações lineares

Aulas práticas de Álgebra Linear

Licenciatura em Engenharia Naval e Oceânica
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

1º semestre 2020/21

Jorge Almeida e Lina Oliveira

Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

Índice

1

Matrizes e sistemas de equações lineares

Notação

Sendo A uma matriz:

Característica de A: $\operatorname{car}(A)$ ou $\operatorname{car} A$
Traço de A: $\operatorname{tr}(A)$ ou $\operatorname{tr} A$
Matriz inversa de A: A^{-1}
Matriz transposta de A: A^T
Operações elementares sobre as linhas de A (sendo α um escalar):

a) $L_i + \alpha L_j$: indica que se soma à linha i de A a linha j de A multiplicada por α

b) αL_i: indica que se multiplica a linha i de A por α

c) $L_i \leftrightarrow L_j$: indica que se troca a linha i de A com a linha j de A

Matrizes elementares de ordem n:

a) P_{ij}: matriz que resulta de I trocando a linha i com a linha j (sendo I a matriz identidade de ordem n e $i \neq j$)

b) $E_{ij}(\alpha)$ (com $i \neq j$): matriz que resulta de I somando à linha i a linha j multiplicada por α

c) $D_i(\alpha)$ (com $\alpha \neq 0$): matriz que resulta de I multiplicando a linha i por α

Observações

a) Apresenta-se abaixo um exemplo de várias possibilidades de escrever a solução geral de um sistema de equações lineares (supõe-se que neste exemplo as variáveis são x, y, z e w e que o sistema é indeterminado com grau de indeterminação 2):

- $\{(-z, -z-w, z, w) \,:\, z, w \in \mathbb{R}\}$
- $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x = -z \wedge y = -z - w\}$
- $\{(x, y, z, w) \,:\, x = -t \wedge y = -t - s \wedge z = t \wedge w = s \quad (t, s \in \mathbb{R})\}$
- $\{(-t, -t-s, t, s) \,:\, t, s \in \mathbb{R}\}$

b) Observe que um sistema de equações lineares não homogéneo é possível se, e só se, a característica da matriz do sistema é igual à característica da matriz aumentada.

c) O cálculo do grau de indeterminação de cada sistema deve ser sempre feito (quando aplicável). Identifique também as variáveis independentes (ou livres) e as dependentes.

d) Utilize como variáveis dependentes as que correspondem às colunas com pivôs.

e) Note que os pivôs de uma matriz em escada de linhas são números diferentes de zero, não necessariamente iguais a 1.

f) Sendo A uma matriz quadrada, relembre que $A^0 = I$ e que

$$A^n = \underbrace{AA\ldots A}_{n},$$

com $n \in \mathbb{N}$.

Sistemas de equações lineares

1-1) Identifique as equações que são lineares nas respectivas variáveis.

(a) $x_1 + 7^{-\frac{1}{3}}x_2 - \sqrt{5}x_3 = 1$ (b) $5x + xy - z = 0$

(c) $u = -\pi v + \dfrac{2}{3}w - \sqrt{3}z$ (d) $x^{\frac{2}{5}} + 8y - 5z = 7^{\frac{1}{3}}$

1-2) Utilizando o método de eliminação de Gauss ou de Gauss–Jordan, resolva cada um dos seguintes sistemas de equações lineares homogéneo.

(a) $\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 0 \\ w - y - 3z = 0 \\ 2w + 3x + y + z = 0 \\ -2w + x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$

1-3) Escreva as matrizes aumentadas dos sistemas de equações lineares não-homogéneos e resolva-os utilizando o método de eliminação de Gauss ou de Gauss–Jordan.

(a) $\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -2v + 3w = 1 \\ 3u + 6v - 3w = -2 \\ 6u + 6v + 3w = 5 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} w + 2x - y = 4 \\ x - y = 3 \\ w + 3x - 2y = 7 \\ 2u + 4v + w + 7x = 7 \end{cases}$

1-4) Resolva cada um dos sistemas de equações lineares correspondente à matriz aumentada indicada.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

1-5) Sem efectuar cálculos, determine quais dos seguintes sistemas de equações lineares homogéneos têm solução não-trivial. Justifique.

(a) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z - w = 0 \\ 7x + y - 8z + 9w = 0 \\ 2x + 8y + z - w = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ y - 8z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

1-6) Determine um sistema de equações lineares que tenha como solução geral o conjunto indicado.

a) $\{(1, 4, 6)\}$
b) $\{(t, 4, 6) : t \in \mathbb{R}\}$
c) $\{(-z, 4z, z) : z \in \mathbb{R}\}$
d) $\{(x, y, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

1-7) Quais das seguintes matrizes 3×3 são matrizes em escada de linhas? E em forma canónica de escada de linhas? Indique a característica de cada matriz.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(j) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2+i & 0 \\ 0 & 1 & 1+i \end{bmatrix}$ (k) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (l) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1-8) Considere as matrizes reais A e $\mathbf{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & -9 & \alpha^2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha - 3 \end{bmatrix}$$

a) Determine a característica da matriz A e da matriz aumentada $[A \,|\, \mathbf{b}]$ em função do parâmetro α.

b) Use os resultados da alínea anterior para determinar a natureza (em função de α) dos sistemas cuja matriz aumentada é $[A \,|\, \mathbf{b}]$, indicando em cada caso a solução geral.

1-9) Determine a natureza de cada um dos seguintes sistemas de equações lineares nas incógnitas x, y e z em função dos respectivos parâmetros.

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \alpha x + \beta z = 2 \\ \alpha x + \alpha y + 4z = 4 \\ \alpha y + 2z = \beta \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} -\,2z = 0 \\ cy + 4z = d \\ 4x + 5y - 2z = -2 \end{cases}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} x + y + z = 4 \\ z = 2 \\ (a^2 - 4)z = a - 2 \end{cases}$$

1-10) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \beta \\ \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

onde os parâmetros α, β designam números reais.

Selecione a afirmação verdadeira:

A) Existe um único valor de β para o qual o sistema que corresponde à matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \beta & 0 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

é impossível.

B) A característica da matriz A é 3 qualquer que seja α.

C) A característica da matriz A depende de α.

D) A característica da matriz A é inferior a 3 para um número infinito de valores de β.

1-11) Resolva o sistema de equações lineares homogéneo associado à matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & -2i \\ 0 & 1 & 1-i \end{bmatrix}$$

1-12) Considere o sistema de equações lineares cuja matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} 3-i & 1 & 5i & 4-i & 0 \\ 0 & 3 & -2i & 2 & \alpha \end{bmatrix},$$

onde α é um parâmetro complexo.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) Qualquer que seja o valor de $\alpha \in \mathbb{C}$, o sistema de equações é impossível.

B) Qualquer que seja o valor de $\alpha \in \mathbb{C}$, o sistema de equações é possível e tem grau de indeterminação 2.

C) Qualquer que seja o valor de $\alpha \in \mathbb{C}$, o sistema de equações é possível e tem grau de indeterminação 3.

D) Existem valores de α para os quais o sistema de equações é impossível.

1-13) Considere a matriz real:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ \alpha & 2\alpha & 3\alpha \end{bmatrix}$$

Selecione a afirmação verdadeira:

A) A característica da matriz A é 1 para $\alpha = 1$.

B) A característica da matriz A varia com o parâmetro α.

C) O sistema de equações lineares homogéneo associado à matriz dos coeficientes A é possível e indeterminado com grau de indeterminação igual a 1.

D) A característica da matriz A^T é 3 para $\alpha = 2$.

Cálculo matricial

1-14) Determine a matriz $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\cdots,r}$ que satisfaz as seguintes condições:

a) $a_{ij} = i + (-1)^{i+j}$ para todos i e j (com $r = 4$)

b) Para $r = 4$:

- $a_{1j} = j$ para todo j
- $a_{ij} = a_{ji}$ para todos i e j
- $a_{ij} = a_{i+1,j+1}$ para $i, j = 1, 2, 3$

c) $a_{ij} = a_{j-i}$, onde a_{-n}, a_{-n+1}, ..., a_{-1}, a_0, a_1,..., a_{n-1}, a_n são números complexos e $r = n + 1$

1-15) Sejam A uma matriz 4×2, B uma matriz 4×2, C uma matriz 2×2, D uma matriz 4×2 e E uma matriz 2×4 . Determine quais das seguintes expressões matriciais estão bem definidas, e nesses casos indique o tipo da matriz resultante.

(a) BA (b) $AC + D$ (c) $AE + B$ (d) $AB + B$

(e) $E(A + B)$ (f) $E(AC)$ (g) $E^T A$ (h) $(A^T + E)D$

1-16) Calcule os seguintes produtos de matrizes.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

1-17) Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & -10 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcule:

a) A coluna 2 da matriz AB.

b) A linha 1 da matriz BA.

c) A entrada-(23) da matriz AB.

d) A característica da matriz $A + B$.

1-18) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

Mostre que $\mathbf{u}$ é combinação linear das colunas de A.

1-19) Calcule se possível $A + B$, $B + C$, $2A$, AB, BA e CB:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \sqrt{2} \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \pi \\ \sqrt{3} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

1-20) Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ i & 2 & -6 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Se for possível, calcule:

(a) $A - A$ (b) $\operatorname{tr} C$ (c) $2\operatorname{tr}(-B)$ (d) $A^T + B^T$
(e) $B^T - C^T$ (f) $(B - C)^T$ (g) CC^T (h) $\operatorname{tr}(C^T C)$

1-21) Obtenha uma expressão para A^n:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

1-22) Sendo A e B matrizes quadradas da mesma ordem, prove que:

a) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$

b) $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr} A$ (para qualquer escalar α)

c) $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^T$

1-23) Uma matriz quadrada A diz-se *simétrica* se $A = A^T$ e *anti-simétrica* se $A = -A^T$. Complete os dados das seguintes matrizes de modo a obter proposições verdadeiras.

a) A matriz $\begin{bmatrix} \square & \square & 3 \\ -1 & \square & 2 \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$ é anti-simétrica.

b) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1/2 & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$ é simétrica e verifica a igualdade $AA^T = I$.

1-24) Suponha que A é uma matriz invertível. Prove que se A é uma matriz simétrica (respetivamente, anti-simétrica), então A^{-1} é também uma matriz simétrica (respetivamente, anti-simétrica).

1-25) Construa uma matriz A simétrica, de característica 1, e tal que $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ seja uma linha de A.

1-26) Sendo A e B matrizes reais simétricas, prove que:

a) $A+B$ é uma matriz simétrica.

b) AB é uma matriz simétrica se e só se A e B comutam.

1-27) Utilizando o método de eliminação de Gauss–Jordan, calcule, sempre que existir, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{(d)} \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \qquad \text{(e)} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix} \qquad \text{(f)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(g)} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix} \qquad \text{(h)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad \text{(i)} \begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(Sugestão para verificar a solução: Se uma matriz B é a matriz inversa de uma matriz A, que matriz é BA?)

1-28) Em cada alínea, use a informação dada para calcular a matriz A.

a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

b) $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

c) $(5A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

d) $(I + 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

1-29) Considere a seguinte matriz A_α, dependente do parâmetro real α:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \alpha \\ 1 & -1 & -1 \\ \alpha & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) A_α é invertível para qualquer valor de α.

B) Existem infinitos valores de α para os quais A_α não é invertível.

C) Existem exactamente dois valores de α para os quais A_α não é invertível.

D) Existe exactamente um valor de α para o qual A_α não é invertível.

1-30) Mostre que a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

não é invertível, quaisquer que sejam os valores de a, b, c, d, e, f, g e h.

1-31) Calcule, se existir, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes (com $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$).

(a) $\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$

1-32) Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule A^3, A^{-3}, $A^2 - 2A + I$ e $(A - I)^2$. Resolva a equação

$$(A + I)^2 X A^{-1} = A + A^T.$$

1-33) Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem. Prove que

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

se e só se A e B comutam.

1-34) Determine as matrizes A, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$, que permitem escrever os sistemas de equações lineares do Problema 1-3 na forma de equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

1-35) Seja A uma matriz de ordem 3 tal que $A^3 = -I$ e seja $\mathbf{b}$ uma matriz coluna de tipo 3×1.

Complete de modo a obter proposições verdadeiras:

a) $A^{-1} =$ ....

b) $\mathbf{x} =$ .... é solução da equação matricial $A^2\mathbf{x} = \mathbf{b}$

c) $\mathrm{car}(A)$ .... $\mathrm{car}(A^2)$

1-36) Considere o sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, onde A é $k \times p$. Diga quais das afirmações seguintes são verdadeiras.

a) A característica de A e a característica da matriz aumentada do sistema podem ser diferentes.
b) Se $k = p$, então o sistema é necessariamente determinado.
c) Se $k = p$, a solução nula é a única solução do sistema.
d) Se $k > p$, então a característica de A é menor ou igual a p.
e) Se $k > p$ e $\mathrm{car}(A) = p$, então o sistema é indeterminado.
f) Se $k < p$ e $\mathrm{car}(A) = k$, então o sistema é indeterminado.

1-37) Quais das seguintes matrizes são matrizes elementares?

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(e)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(f)} \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(g)} \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(h)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1-38) Calcule os seguintes produtos de matrizes.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

1-39) Indique qual a operação que se deve realizar com as linhas das seguintes matrizes (e determine a matriz elementar que lhe corresponde) para que estas se transformem na matriz identidade (de ordem apropriada).

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1-40) Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determine matrizes elementares E_1, E_2 e E_3 tais que $E_3E_2E_1A = I$.

b) Escreva A^{-1} como um produto de três matrizes elementares.

c) Escreva A como um produto de três matrizes elementares.

1-41) Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

Determine uma expressão para A da forma $A = E_1E_2E_3R$, onde as matrizes E_1, E_2 e E_3 são matrizes elementares e R é uma matriz em escada de linhas.

1-42) Mostre que se A é uma matriz 2×2 que comuta com qualquer outra matriz 2×2, então A é igual ao produto da matriz identidade por um escalar (A diz-se uma *matriz escalar*). Sugestão: Experimente multiplicar A por algumas matrizes com entradas iguais a 0 e 1.

1-43) Seja A uma matriz real 3×3 que satisfaz

$$A = E_1E_2R\,,$$

onde R é uma matriz em escada de linhas com característica 2, e

$$E_1 = D_3(-1) \qquad E_2 = E_{21}(3)\,.$$

Considere as afirmações seguintes:

I) A matriz A não é invertível.

II) Existe uma matriz escalar B tal que $AB \neq BA$.

III) A matriz A^T tem uma única coluna de zeros.

IV) O sistema de equações lineares

$$A^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pode ser possível e determinado.

A lista completa das afirmações correctas é:

A) II e III B) I e III C) I e IV D) I e II e III

1-44) Seja D uma matriz escalar $m \times m$ com entradas diagonais iguais a 5. Mostre que

a) para toda a matriz A de tipo $m \times n$, $DA = 5A$;

b) para toda a matriz B de tipo $n \times m$, $BD = 5B$.

Soluções

1-1) a) É linear nas variáveis x_1, x_2 e x_3.

b) Não é linear nas variáveis x, y e z.

c) É linear nas variáveis u, v, w e z.

d) Não é linear nas variáveis x, y e z.

1-2) O conjunto das soluções do sistema é:

a) $\{(0,0,0)\}$

b) $\{(-\frac{1}{3}x_3, -\frac{2}{3}x_3 - x_4, x_3, x_4) \;:\; x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$

A solução poderia igualmente ser escrita como, por exemplo, $\{(-\frac{1}{3}r, -\frac{2}{3}r - s, r, s) \;:\; r, s \in \mathbb{R}\}$. (Relembre as Observações no início desta ficha.)

c) $\{(w,x,y,z) \;:\; x = -w \wedge y = w \wedge z = 0 \quad (w \in \mathbb{R})\}$

1-3)

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix}$

Conjunto das soluções: $\{(3,1,2)\}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

Conjunto das soluções: $\{(-\frac{1}{7} - \frac{3}{7}x_3, \frac{1}{7} - \frac{4}{7}x_3, x_3) \;:\; x_3 \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3-4L_1]{L_2+L_1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3+L_2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

À matriz (*) corresponde um sistema de equações equivalente ao sistema inicial. Como se trata de uma matriz em escada de linhas, podemos resolver esse sistema de modo sistemático: a equação de baixo (sem contar com a equação trivial $0 = 0$) só tem uma variável dependente (x_2), que podemos calcular em função das variáveis independentes (x_3, neste caso) e substituir na equação imediatamente acima.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 7x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases} \to \begin{cases} 2x_1 + 2\left(\frac{1}{7} - \frac{4}{7}x_3\right) + 2x_3 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}x_3 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}x_3 \end{cases}$$

Alternativamente, podemos reduzir a matriz (*) à forma canónica de escada de linhas (método de Gauss–Jordan). O sistema que se obtém deste modo é de resolução imediata:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{7}L_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1-L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & 1 & 4/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{7}x_3 = -\frac{1}{7} \\ x_2 + \frac{4}{7}x_3 = \frac{1}{7} \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}x_3 \end{cases}$$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Conjunto das soluções: $\varnothing$ (não tem soluções)

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

Conjunto das soluções: $\{(-6-2v-3y, v, -2-y, 3+y, y) \,:\, v, y \in \mathbb{R}\}$

1-4) a) Conjunto das soluções: $\{(-45, -14, 6)\}$

b) Conjunto das soluções: $\{(5-4w, 2-8w, 2-w, w) \,:\, w \in \mathbb{R}\}$

1-5) Os sistemas das alíneas a), b) e d).

1-6) a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \\ z = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 4 \\ z = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

d) $-x - y + z = 0$

1-7) a) Sim (é matriz em escada); Sim (é matriz em forma canónica de escada); característica 3.

b) Sim; Sim; 2.

c) Sim; Sim; 2.

d) Sim; Sim; 2.

e) Não; Não; 2.

f) Sim; Não; 2.

g) Não; Não; 2.

h) Sim; Sim; 0.

i) Não; Não; 1.

j) Não; Não; 3.

k) Não; Não; 2.

l) Sim; Não; 2.

1-8) a)
- $\alpha = 3 \to \operatorname{car} A = \operatorname{car}[A|\mathbf{b}] = 1$
- $\alpha = -3 \to \operatorname{car} A = 1 \quad \operatorname{car}[A|\mathbf{b}] = 2$
- $\alpha \neq 3 \wedge \alpha \neq -3 \to \operatorname{car} A = \operatorname{car}[A|\mathbf{b}] = 2$

b)
- $\alpha = 3 \to$ possível e indeterminado (G.I. $= 2$)
  Conjunto das soluções: $\{(y - z, y, z) \,:\, y, z \in \mathbb{R}\}$
- $\alpha = -3 \to$ impossível
- $\alpha \neq 3 \wedge \alpha \neq -3 \to$ possível e indeterminado (G.I. $= 1$)
  Conjunto das soluções: $\{(y - \frac{1}{\alpha+3}, y, \frac{1}{\alpha+3}) \,:\, y \in \mathbb{R}\}$

1-9) a)

<table>
<tr><td rowspan="2">$\alpha \neq 0$</td><td colspan="2">$\beta \neq 2$ possível e determinado</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\beta = 2$ possível e indeterminado (G.I. $= 1$)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\alpha = 0$</td><td colspan="2">$\beta = 0$ impossível</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\beta \neq 0$</td><td>$\beta \neq 2$ impossível</td></tr>
<tr><td>$\beta = 2$ possível e indeterminado (G.I. $= 2$)</td></tr>
</table>

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ \alpha & \alpha & 4 & 4 \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_1} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ 0 & \alpha & 4-\beta & 2 \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_2} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ 0 & \alpha & 4-\beta & 2 \\ 0 & 0 & \beta-2 & \beta-2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz pode ser ou não uma matriz em escada, dependendo dos valores de α e β. A finalidade da eliminação de Gauss foi obter uma matriz para a qual seja fácil determinar a relação entre os valores dos parâmetros e as operações a efetuar para obter uma matriz em escada.

- Se $\alpha \neq 0$ teremos pivôs na primeira e segunda linha, e a matriz está em escada, independentemente do valor de β. A natureza do sistema irá depender de ser $\beta = 2$ ou $\beta \neq 2$.
- Para $\alpha = 0$, a matriz não está em escada, e é necessário prosseguir com a eliminação de Gauss. A entrada-(13) tem o valor β; se $\beta = 0$, deveríamos tentar trocar de linha de modo a obter um pivô nessa posição; no entanto, é imediato que o sistema é impossível, já que a primeira linha corresponde à equação $0 = 2$; assim, neste caso não se justifica o trabalho de reduzir a matriz a uma matriz em escada. Quanto ao caso $\beta \neq 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta & 2 \\ 0 & 0 & 4-\beta & 2 \\ 0 & 0 & \beta-2 & \beta-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{\beta}L_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2/\beta \\ 0 & 0 & 4-\beta & 2 \\ 0 & 0 & \beta-2 & \beta-2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3-(\beta-2)L_1]{L_2-(4-\beta)L_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{2}{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4\beta-8}{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\beta-2)^2}{\beta} \end{bmatrix}$$

b)

<table>
<tr><td colspan="2">$c \neq 0$</td><td colspan="2">possível e determinado</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$c = 0$</td><td>$d = 0$</td><td colspan="2">possível e indeterminado (G.I. = 1)</td></tr>
<tr><td>$d \neq 0$</td><td colspan="2">impossível</td></tr>
</table>

c)

$a = 2 \vee a = -\frac{3}{2}$	possível e indeterminado (G.I. = 1)
$a \neq 2 \wedge a \neq -\frac{3}{2}$	impossível

1-10) A)

1-11) Conjunto das soluções: $\{(0, (i-1)z, z) \ : \ z \in \mathbb{C}\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & -2i & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & 0 \\ 0 & 1-i & -2i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3-(1-i)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Uma vez que se trata de uma matriz na forma canónica de escada de linhas, a resolução (nas incógnitas (x, y, z)) é imediata:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = (i-1)z \end{cases}$$

1-12) B)

1-13) C)

1-14)

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{-n+1} & a_{-n+2} & a_{-n+3} & \cdots & a_1 \\ a_{-n} & a_{-n+1} & a_{-n+2} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$

1-15) a) Não definida.
b) 4×2
c) Não definida.
d) Não definida.

e) 2×2

f) 2×2

g) Não definida.

h) 2×2

1-16) a) $\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 11 \\ 8 & 16 & 17 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 6 & 6 & 6 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$

1-17) a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

c) -18

d) 2

1-18) $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

1-19)

$$B+C=\begin{bmatrix}4 & 2 & \pi\\ \sqrt{3} & -3 & 2\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix} \qquad 2A=\begin{bmatrix}2 & 8 & 2\sqrt{2}\\ -4 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1+4\sqrt{3} & -2+\sqrt{2} & \pi+8-\sqrt{2}\\ -2+\sqrt{3} & -2 & -2\pi-1\end{bmatrix} \qquad CB=\begin{bmatrix}3 & 6 & 3\pi\\ -2\sqrt{3} & 2 & -4\\ 0 & 5 & -5\end{bmatrix}$$

As restantes operações não são possíveis.

1-20) a) $A-A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

b) $\operatorname{tr} C = 18$

c) $2\operatorname{tr}(-B)=14$

d) Impossível.

e) $B^T-C^T=\begin{bmatrix}-11 & 2 & i\\ 3 & -3 & 2\\ 0 & 1 & -11\end{bmatrix}$

f) $(B-C)^T=\begin{bmatrix}-11 & 2 & i\\ 3 & -3 & 2\\ 0 & 1 & -11\end{bmatrix}$

g) $CC^T=\begin{bmatrix}81 & 0 & 0\\ 0 & 16 & 0\\ 0 & 0 & 25\end{bmatrix}$

h) $\operatorname{tr}(C^TC)=122$

1-21) a) $A^n=\begin{bmatrix}2^n & 0\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}$

b) Temos duas expressões, consoante n é par ou ímpar:

- n par ($n=2k$, com $k\in\mathbb{N}_0$): $A^n=A^{2k}=(-1)^kI$
- n ímpar ($n=2k+1$, com $k\in\mathbb{N}_0$): $A^n=A^{2k+1}=(-1)^kA$

1-23) a) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ -3 & -2 & 0\end{bmatrix}$

b) $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ ou $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

1-25) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 3 & 6 & 3 & 12\\ 4 & 8 & 12 & 16\end{bmatrix}$

1-27) a) $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

b) $-\frac{1}{39}\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$

c) A matriz não é invertível.

d) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{10} & -\frac{6}{5} \\ -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3-2L_1]{L_2-3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3-5L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{7}{4} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{2}{5}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_1-3L_3]{L_2+\frac{5}{2}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{11}{10} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

e) A matriz não é invertível.

f) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

i) A matriz não é invertível.

1-28) a) $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

b) $-\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

c) $-\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

d) $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} -9 & 1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

1-29) C)

1-31) a) $\begin{bmatrix} \alpha_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4^{-1} \end{bmatrix}$

(existe se e só se nenhum dos valores de α_1, α_2, α_3 e α_4 for nulo)

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_4^{-1} \\ 0 & 0 & \alpha_3^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha_2^{-1} & 0 & 0 \\ \alpha_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(existe se e só se nenhum dos valores de α_1, α_2, α_3 e α_4 for nulo)

c) $\begin{bmatrix} \alpha^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha^{-2} & \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ \alpha^{-3} & -\alpha^{-2} & \alpha^{-1} & 0 \\ -\alpha^{-4} & \alpha^{-3} & -\alpha^{-2} & \alpha^{-1} \end{bmatrix}$

(existe se e só se $\alpha \neq 0$)

1-32) $A^3 = \left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{smallmatrix}\right]$ $\quad A^{-3} = \left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ -6 & 1\end{smallmatrix}\right]$ $\quad A^2 - 2A + I = (A-I)^2 = \left[\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right]$ $\quad X = \left[\begin{smallmatrix}3/2 & 1/2\\ -3/2 & -1/2\end{smallmatrix}\right]$

1-34)

(a) $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & -7 & 4\end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}8\\ 1\\ 10\end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ -2 & 5 & 2\\ 8 & 1 & 4\end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix}0 & -2 & 3\\ 3 & 6 & -3\\ 6 & 6 & 3\end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\ -2\\ 5\end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2\\ 2 & 4 & 1 & 7 & 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix}u\\ v\\ w\\ x\\ y\end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}4\\ 3\\ 7\\ 7\end{bmatrix}$

1-35) a) $-A^2$
b) $-A\mathbf{b}$
c) $= 3 =$

1-36) a) Falsa.
b) Falsa.
c) Falsa.
d) Verdadeira.
e) Falsa.
f) Verdadeira.

1-37) a) Sim (é matriz elementar).
b) Sim.

c) Sim.
d) Não.
e) Sim.
f) Não.
g) Sim.
h) Não.

1-38) a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -8 & -10 & -12 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 23 & 28 & 33 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

1-39) a) Operação: $L_2 + 3L_1$ Matriz elementar: $E_{21}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

b) Operação: $\frac{1}{5}L_3$ Matriz elementar: $D_3(\frac{1}{5}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

c) Operação: $L_1 \leftrightarrow L_4$ Matriz elementar: $P_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) Operação: $L_2 + \frac{1}{5}L_3$ Matriz elementar: $E_{23}(\frac{1}{5}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1-40) a) $E_1 = E_{21}(5)$ $E_2 = P_{23}$ $E_3 = D_2(-\frac{1}{2})$

b) $A^{-1} = D_2(-\frac{1}{2})P_{23}E_{21}(5)$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1-41) $E_1 = P_{12}$ $E_2 = E_{31}(-2)$ $E_3 = E_{32}(1)$ $R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1-43) B)