

Apontamentos II

Transformações lineares

Álgebra Linear | aulas teóricas

Licenciatura em Engenharia Naval e Oceânica
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

1º semestre 2020/21

Lina Oliveira
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

Índice

| | |
|---|----------|
| Índice | i |
| 11 Transformações lineares | 1 |
| Transformações lineares | 1 |
| Matriz associada a uma transformação linear | 5 |
| Núcleo e imagem | 7 |
| Composição e invertibilidade | 13 |
| Mudança de base | 17 |
| Espaços próprios e subespaços invariantes | 20 |

Transformações lineares

Transformações lineares

Definição de transformação linear em espaços lineares. Exemplos de funções: reflexão, projeção ortogonal e translação. Matriz associada a uma transformação linear considerando as bases canônicas em \mathbb{K}^n e \mathbb{K}^k . Imagem de um segmento de reta através de uma transformação linear; imagem de um triângulo a partir das imagens dos seus vértices.

Sejam U e V espaços vetoriais reais (respetivamente, complexos). Uma função $T : U \rightarrow V$ diz-se uma **transformação linear** se, quaisquer que sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$(i) \quad T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T\mathbf{x} + T\mathbf{y}$$

$$(ii) \quad T(\alpha\mathbf{x}) = \alpha T\mathbf{x}$$

Proposição 1. *Sejam U e V espaços vetoriais e seja $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Então*

$$T\mathbf{0}_U = \mathbf{0}_V .$$

Note que este resultado tanto pode ser visto como uma consequência tanto de (i) como de (ii).

Exemplos. Determine quais das funções seguintes são transformações lineares.

- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ reflexão em relação ao eixo dos xx .
- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ projeção ortogonal no plano xy .
- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ translação pelo vetor $\mathbf{u} = (1, 0)$.

Transformações lineares

Solução. a) A função T desta alínea é definida, para todo o $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ de \mathbb{R}^2 , por

$$T(x_1, x_2) = (x_1, -x_2).$$

Verificar se se trata duma transformação linear consiste em verificar se ambas as propriedades (i) e (ii) são satisfeitas por esta função T . Começando com (ii), consideremos um real α e um vetor $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Então

$$\begin{aligned} T(\alpha(x_1, x_2)) &= T(\alpha x_1, \alpha x_2) \\ &= (\alpha x_1, -\alpha x_2) \\ &= \alpha(x_1, -x_2) \\ &= \alpha T(x_1, x_2), \end{aligned}$$

O que mostra que a propriedade (ii) é satisfeita.

Considerando agora os vetores $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, tem-se

$$\begin{aligned} T((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) &= T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (x_1 + y_1, -(x_2 + y_2)) \\ &= (x_1, -x_2) + (y_1, -y_2) \\ &= T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2), \end{aligned}$$

donde se conclui que T satisfaz (i). Tem-se assim que a função T é uma transformação linear em \mathbb{R}^2 .

b) Notando que a função T desta alínea é definida, para todo o vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de \mathbb{R}^3 , por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$$

e usando um procedimento análogo ao da alínea anterior, é fácil verificar que também se trata duma transformação linear.

c) Neste caso a expressão da função é $T(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2)$, sendo portanto $T(0, 0) = (1, 0)$. Deste modo $T(0, 0) \neq (0, 0)$, contrariando a Proposição 1. Temos pois que T não é uma transformação linear.

Imagem de um segmento de reta. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e considere o triângulo de vértices $\mathbf{a} = (0, 0), \mathbf{b} = (1, 1)$ e $\mathbf{c} = (2, 0)$. Sabendo que $T(\mathbf{b}) = (2, 1)$ e $T(\mathbf{c}) = (1, 0)$, represente geometricamente a imagem do triângulo através da transformação linear T .

Transformações lineares

Seendo \mathbf{x} um ponto que pertence ao segmento de extremos \mathbf{b} e \mathbf{c} , tem-se

$$\mathbf{x} = \mathbf{c} + \alpha(\mathbf{b} - \mathbf{c}) \quad \text{com} \quad \alpha \in [0, 1],$$

donde

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{c}) + \alpha(T(\mathbf{b}) - T(\mathbf{c})) \quad \text{com} \quad \alpha \in [0, 1].$$

Os segmentos de reta que unem dois pontos são transformados em segmentos de reta que unem as imagens desses pontos.

Matriz associada a uma transformação linear $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^k$. Sendo $\mathcal{E}_n = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ a base canónica ordenada de \mathbb{R}^n (respetivamente, de \mathbb{C}^n) e \mathcal{E}_k a base canónica de \mathbb{R}^k (respetivamente, de \mathbb{C}^k), tem-se

$$T\mathbf{x} = T(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n) = \alpha_1T\mathbf{e}_1 + \alpha_2T\mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_nT\mathbf{e}_n.$$

Representando por $[\mathbf{x}]$ um vetor \mathbf{x} quando escrito em forma de vetor coluna, obtemos

$$[\mathbf{T}(\mathbf{x})] = \underbrace{[[T\mathbf{e}_1] \mid [T\mathbf{e}_2] \mid \dots \mid [T\mathbf{e}_n]]}_{\text{matriz associada a } T} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Atendendo a que, qualquer que seja o vetor \mathbf{u} de \mathbb{R}^m , se tem $[\mathbf{u}] = [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}_m}$, onde $[\mathbf{u}]_{\mathcal{E}_m}$ é o vetor das coordenadas de \mathbf{u} na base \mathcal{E}_m , podemos reescrever (1) como

$$[\mathbf{T}(\mathbf{x})]_{\mathcal{E}_k} = \underbrace{[[T\mathbf{e}_1]_{\mathcal{E}_k} \mid [T\mathbf{e}_2]_{\mathcal{E}_k} \mid \dots \mid [T\mathbf{e}_n]_{\mathcal{E}_k}]}_{[T]_{\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_n}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}_n} \quad (2)$$

Ou seja,

Transformações lineares

$$[T\mathbf{x}]_{\mathcal{E}_k} = [T]_{\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_n} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}_n} \quad (3)$$

A matriz $[T]_{\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_n}$ que representa T em relação às bases canônicas de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^k também pode ser designada abreviadamente por $[T]$.

Exemplos. Determine a matriz associada a cada uma das transformações lineares seguintes.

- Em \mathbb{R}^2 : reflexão em relação ao eixo dos xx .
- Em \mathbb{R}^3 : projeção no plano xy .
- Em \mathbb{R}^2 : rotação em \mathbb{R}^2 em torno da origem de um ângulo θ no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio (neste caso, determine também a expressão analítica).

c) A matriz $[T]$ que representa a rotação T desta alínea tem como colunas as imagens dos vetores da base canônica \mathcal{E}_2 . Sendo $T(1, 0) = (\cos \theta, \text{sen } \theta)$ e $T(0, 1) = (-\text{sen } \theta, \cos \theta)$, tem-se

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Assim, qualquer que seja $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} T\mathbf{x} &= [T] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \cos \theta - x_2 \text{sen } \theta \\ x_1 \text{sen } \theta + x_2 \cos \theta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A expressão analítica é $T(x_1, x_2) = (x_1 \cos \theta - x_2 \text{sen } \theta, x_1 \text{sen } \theta + x_2 \cos \theta)$.

Matriz associada a uma transformação linear

Relação entre $\mathbb{M}_{k \times n}(\mathbb{K})$ e o conjunto das transformações lineares $T: U \rightarrow V$ entre um espaço linear U de dimensão n e um espaço linear V de dimensão k .

Matriz associada a uma transformação linear $T: U \rightarrow V$

Sejam U e V espaços vetoriais reais (respetivamente, complexos) tais que $\dim U = n$ e $\dim V = k$. Sendo $B_1 = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ uma base de U e B_2 uma base de V , tem-se

$$T(\mathbf{x}) = T(\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n).$$

Assim:

$$\begin{aligned} (T\mathbf{x})_{B_2} &= T(\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n)_{B_2} \\ &= \alpha_1 (T\mathbf{b}_1)_{B_2} + \alpha_2 (T\mathbf{b}_2)_{B_2} + \dots + \alpha_n (T\mathbf{b}_n)_{B_2} \end{aligned}$$

$$[T\mathbf{x}]_{B_2} = \left[[T\mathbf{b}_1]_{B_2} \mid [T\mathbf{b}_2]_{B_2} \mid \dots \mid [T\mathbf{b}_n]_{B_2} \right] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$[T\mathbf{x}]_{B_2} = \underbrace{\left[[T\mathbf{b}_1]_{B_2} \mid [T\mathbf{b}_2]_{B_2} \mid \dots \mid [T\mathbf{b}_n]_{B_2} \right]}_{[T]_{B_2, B_1}} [\mathbf{x}]_{B_1}$$

Ou seja,

$$[T\mathbf{x}]_{B_2} = [T]_{B_2, B_1} [\mathbf{x}]_{B_1}$$

onde $[T]_{B_2, B_1}$ é a **matriz que representa a transformação relativamente às bases B_1 e B_2** .

Transformações lineares

Temos assim que à transformação

$$\begin{aligned} T: U &\rightarrow V \\ \mathbf{x} &\mapsto T(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

corresponde uma outra transformação linear entre os espaços \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^k (respectivamente, entre os espaços \mathbb{C}^n e \mathbb{C}^k) definida por

$$\mathbf{y} \mapsto A\mathbf{y},$$

onde $A = [T]_{B_2, B_1}$.

Exemplo. Considere a transformação linear $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_1$ definida por

$$p \mapsto p',$$

onde p' designa a derivada de p . Determine a matriz que representa a transformação linear T quando se consideram as bases canónicas de \mathbb{P}_2 e de \mathbb{P}_1 .

Núcleo e imagem

Núcleo duma transformação linear T e núcleo da matriz associada a T . A imagem de uma transformação linear e o espaço das colunas da matriz que a representa. Transformações lineares injetivas e transformações lineares sobrejetivas; isomorfismo. Teorema das dimensões para transformações lineares.

Sejam U, V espaços vetoriais e sendo $T: U \rightarrow V$ uma transformação linear, o **núcleo** $N(T)$ da transformação T é o subespaço de U definido por

$$N(T) = \{\mathbf{x} \in U : T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_V\}.$$

A **imagem** $I(T)$ da transformação $T: U \rightarrow V$ é o subespaço de V definido por

$$I(T) = \{T(\mathbf{x}) \in V : \mathbf{x} \in U\}.$$

Núcleo e imagem de $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^k$

Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma transformação linear. Então

$$N(T) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^k}\}.$$

Sejam $A = [T]_{\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_n}$ a matriz que representa T em relação às bases canónicas de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^k , tem-se

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{sse} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

donde se conclui que

$$N(T) = N(A).$$

Quanto à imagem $I(T)$, temos, por definição, que

$$I(T) = \{T(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^k : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Transformações lineares

Atendendo a que

$$[T(\mathbf{x})] = A\mathbf{x},$$

a imagem $I(T)$ corresponde a obter todas as combinações lineares $A\mathbf{x}$ das colunas de A . Por outras palavras,

$$I(T) = C(A).$$

Obviamente tem-se

$$I(T) = \mathcal{L}(\{T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \dots, T(\mathbf{e}_n)\})$$

Ou seja, $\{T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \dots, T(\mathbf{e}_n)\}$ é um conjunto gerador de $I(T)$.

Teorema 1. (Teorema das dimensões) *Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma transformação linear. Então*

$$n = \dim N(T) + \dim I(T).$$

Demonstração. Este teorema é uma consequência imediata do teorema das dimensões para matrizes. Seja A a matriz $k \times n$ que representa T em relação às bases \mathcal{E}_n e \mathcal{E}_k . Então

$$\begin{aligned} n &= \dim N(A) + \text{car } A \\ &= \dim N(A) + \dim C(A) \\ &= \dim N(T) + \dim I(T) . \end{aligned}$$

□

Injetividade e sobrejetividade

Uma transformação linear $T: U \rightarrow V$ diz-se **injetiva** se, quaisquer que sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$,

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Rightarrow T(\mathbf{x}) \neq T(\mathbf{y})$$

ou, equivalentemente, se

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y}) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Note-se que

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y})$$

Transformações lineares

se e só se

$$T(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{y} \in N(T),$$

donde se conclui que

$$T(\{\mathbf{x}\} + N(T)) = \{T(\mathbf{x})\}$$

Proposição 2. *Seja $T: U \rightarrow V$ uma transformação linear. T é injetiva se e só se $N(T) = \{0\}$.*

Uma transformação linear $T: U \rightarrow V$ diz-se **sobrejetiva** se $I(T) = V$. Se T é injetiva e sobrejetiva, T diz-se uma transformação linear **bijetiva** ou um **isomorfismo**.

Exemplos. Determine a matriz $[T]$, o núcleo e a imagem das transformações T seguintes:

- (a) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ - rotação em torno da origem de $\pi/2$ radianos no sentido positivo ou direto (contrário aos ponteiros do relógio);
- (b) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ - projeção ortogonal no eixo dos xx ;
- (c) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ - reflexão em relação ao eixo dos yy ;
- (d) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $T(x, y, z) = (x - y, z)$.

Verifique se as transformações são sobrejetivas, injetivas ou isomorfismos.

Proposição 3. *Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. As afirmações seguintes são equivalentes.*

- (i) T é injetiva.
- (ii) T é sobrejetiva.
- (iii) T é um isomorfismo.

Transformações lineares

Demonstração. Provar-se-á apenas que (i) \Rightarrow (ii). O teorema das dimensões garante que

$$n = \dim N(T) + \dim I(T) \quad \text{donde} \quad n = 0 + \dim I(T)$$

e, conseqüentemente, $I(T) = \mathbb{R}^n$. □

N.B.- Todos os resultados acima relativos ao núcleo e à imagem duma transformação linear definida entre \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^k são igualmente válidos para transformações lineares $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k$.

Núcleo e imagem de $T: U \rightarrow V$

Sejam U e V espaços lineares reais (respetivamente, complexos), e considere a base $B_1 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ de U e a base $B_2 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ de V . Seja $T: U \rightarrow V$ uma transformação linear.

Como vimos anteriormente, o núcleo $N(T)$ da transformação T é o subespaço de U definido por

$$N(T) = \{\mathbf{x} \in U : T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Sendo $A = [T]_{B_2, B_1}$, tem-se

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{se e só se} \quad [T(\mathbf{x})]_{B_2} = \mathbf{0},$$

donde se conclui que

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{se e só se} \quad A[\mathbf{x}]_{B_1} = \mathbf{0},$$

e, portanto,

$$N(T) = \{\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n : (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in N(A)\}.$$

Note-se que $N(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ (respetivamente, \mathbb{C}^n).

Tal como foi definido anteriormente, a imagem $I(T)$ da transformação $T: U \rightarrow V$ é o subespaço de V definido por

$$I(T) = \{T(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in U\}.$$

Sendo

$$[T(\mathbf{x})]_{B_2} = A[\mathbf{x}]_{B_1},$$

pretendemos obter todas as combinações lineares $A[\mathbf{x}]_{B_1}$ das colunas de A . Por outras palavras, o conjunto dos vetores das coordenadas dos vetores de $I(T)$ coincide com $C(A)$. Note-se que $C(A) \subseteq \mathbb{R}^k$ (respetivamente, \mathbb{C}^k).

Assim,

Transformações lineares

$$I(T) = \{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_n : (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in C(A)\}.$$

Exemplo. Considere a transformação linear $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ definida por

$$p \mapsto p'$$

- Determine a matriz que representa a transformação linear T quando se consideram as bases canônicas de \mathbb{P}_2 e de \mathbb{P}_2 .
- Determine o núcleo e a imagem de T .
- Verifique se T é injetiva, sobrejetiva ou um isomorfismo.

Proposição 4. *Seja U um espaço vetorial sobre \mathbb{K} , e seja $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ uma base de U . A transformação linear $T : U \rightarrow \mathbb{K}^n$ definida por*

$$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_B$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Exercício. □

Teorema 2. (Teorema das dimensões) *Sejam U e V espaços lineares reais (respectivamente, complexos), e seja $\dim U = n$. Seja $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Então*

$$n = \dim N(T) + \dim I(T).$$

Demonstração. Este teorema é uma consequência imediata do Teorema 1 e da Proposição 4. □

Composição e invertibilidade

Transformação inversa e composição de transformações lineares. Espaços próprios e subespaços invariantes.

Composição de transformações lineares

Sejam U , V e W espaços vetoriais reais (respetivamente, complexos), e sejam $T: U \rightarrow V$ e $S: V \rightarrow W$

Consideremos a função composta $S \circ T$ definida por

$$\begin{aligned} S \circ T: U &\rightarrow W \\ \mathbf{x} &\mapsto S(T\mathbf{x}) . \end{aligned}$$

Esquemáticamente,

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{T} & V \\ & \searrow S \circ T & \downarrow S \\ & & W \end{array}$$

Facto 1. A função $S \circ T: U \rightarrow W$ é uma transformação linear.

A transformação linear $S \circ T$ é designada por **transformação composta**.

Suponhamos que U, V, W são espaços vetoriais sobre \mathbb{K} de dimensões

$$\dim U = n \quad \dim V = p \quad \dim W = k ,$$

e sejam B_U, B_V, B_W bases de U, V, W , respetivamente.

Considerando as matrizes $A = [T]_{B_V, B_U}$ e $B = [S]_{B_W, B_V}$ que representam as transformações T e S em relação às bases fixadas em U, V e W , tem-se que, qualquer que seja $\mathbf{x} \in U$,

$$\begin{aligned} [(S \circ T)(\mathbf{x})]_{B_W} &= [S(T\mathbf{x})]_{B_W} \\ &= B[(T\mathbf{x})]_{B_V} \\ &= BA[\mathbf{x}]_{B_U} . \end{aligned}$$

Transformações lineares

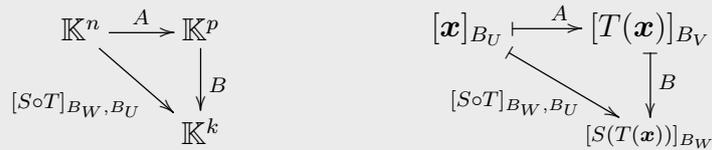
Donde se conclui que a matriz $[S \circ T]_{B_W, B_U}$ que representa a transformação $S \circ T$ é

$$[S \circ T]_{B_W, B_U} = BA.$$

Facto 2. A matriz $[S \circ T]_{B_W, B_U}$ que representa a transformação linear $S \circ T$ é

$$[S \circ T]_{B_W, B_U} = [S]_{B_W, B_V} [T]_{B_V, B_U}.$$

Os esquemas correspondentes em termos dos vetores das coordenadas são:



Exemplo. Sendo T a reflexão relativa ao eixo dos xx em \mathbb{R}^2 e sendo S a rotação em torno da origem em \mathbb{R}^2 , no sentido direto, determine:

- a) a matriz que representa $S \circ T$ em relação à base canónica \mathcal{E}_2 ;
- b) uma expressão analítica para $S \circ T$.

Transformações lineares

Transformação inversa

Sejam U, V espaços vetoriais reais (respetivamente, complexos) de dimensão n e sejam B_U, B_V as suas bases. Seja $T: U \rightarrow V$ um isomorfismo. Nestas circunstâncias, é possível definir a função

$$T^{-1}: V \rightarrow U \\ \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x},$$

onde $\mathbf{y} = T\mathbf{x}$.

Facto 3. A função T^{-1} é uma transformação linear.

Sendo $B = [T^{-1}]_{B_U, B_V}$ a matriz que representa T^{-1} quando se consideram as bases B_U de U e B_V de V , e sendo $A = [T]_{B_V, B_U}$ a matriz que representa T quando se consideram as mesmas bases, tem-se então que, qualquer que seja $\mathbf{x} \in U$,

$$\begin{aligned} [(T^{-1} \circ T)(\mathbf{x})]_{B_U} &= [T^{-1}(T\mathbf{x})]_{B_U} \\ &= [T^{-1}]_{B_U, B_V} [(T\mathbf{x})]_{B_V} \\ &= [T^{-1}]_{B_U, B_V} [T]_{B_V, B_U} [\mathbf{x}]_{B_U} \\ &= BA[\mathbf{x}]_{B_U}. \end{aligned}$$

Atendendo a que $T^{-1} \circ T$ é a transformação linear **identidade** I_U em U , i.e, a função que a cada $\mathbf{x} \in U$ faz corresponder $I_U(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, resulta $BA = I$. Deste modo

$$[T^{-1}]_{B_U, B_V} = ([T]_{B_V, B_U})^{-1}.$$

Exemplo. Seja U o subespaço do espaço dos polinómios reais \mathbb{P}_2 definido por

$$U = \{a_1t + a_2t^2 : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

e considere a transformação linear $T: U \rightarrow \mathbb{P}_1$ que a cada polinómio faz corresponder a sua derivada. Determine a matriz que representa a transformação T^{-1} relativamente à base $B_U = (t, t^2)$ em U e à base canónica de \mathbb{P}_1 .

No exercício seguinte vai encontrar um método diferente para deduzir que $[T^{-1}]_{B_U, B_V} = [T]_{B_V, B_U}^{-1}$.

Exercício. Seja $T: U \rightarrow V$ um isomorfismo e considere a transformação linear inversa

$$T^{-1}: V \rightarrow U$$
$$\mathbf{y} \mapsto \mathbf{x},$$

onde $\mathbf{y} = T\mathbf{x}$.

- Designando por A a matriz $[T]_{B_V, B_U}$ e supondo que $\dim U = n$, mostre que A é uma matriz $n \times n$ invertível. (Sugestão: use os Teoremas 1 e 2.)
- Use a alínea a) e a igualdade $\mathbf{y} = T\mathbf{x}$ para obter \mathbf{x} em função de \mathbf{y} , e conclua que $[T^{-1}]_{B_U, B_V} = A^{-1}$.

Mudança de base

Matriz associada a uma transformação linear em diferentes bases; matrizes semelhantes.

Matriz associada a uma transformação linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ em diferentes bases

Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear e consideremos uma base $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ de \mathbb{R}^n .

Dado um vetor arbitrário \mathbf{x} de \mathbb{R}^n , o vetor das coordenadas da imagem de \mathbf{x} pode ser calculado, quer usando a matriz $A = [T]_{\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_n}$, quer usando a matriz $B = [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$, tendo-se:

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{E}_n} = A[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}_n} \qquad [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = B[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

Por outro lado, podemos ver na figura seguinte que $[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{E}_n}$ também pode ser calculado à custa da matriz B :

$$\begin{aligned} [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{E}_n} &= M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}_n}^{-1} [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} \\ &= M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}_n}^{-1} B[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \\ &= M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}_n}^{-1} B M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}_n} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}_n} \end{aligned} \qquad \begin{array}{ccc} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}_n} & \xrightarrow{A} & [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{E}_n} \\ M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}_n} \downarrow & & \uparrow M_{\mathcal{E}_n \leftarrow \mathcal{B}} \\ [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{B} & [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} \end{array}$$

Obtemos assim

$$A = M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}_n}^{-1} B M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}_n}.$$

Exemplo. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a reflexão relativa à reta de equação $y = 2x$. Obtenha uma expressão analítica de T usando a matriz que representa a transformação relativamente à base $\mathcal{B} = ((1, 2), (2, -1))$.

Matriz associada a uma transformação linear $T: U \rightarrow U$ em diferentes bases

Consideremos agora o caso geral de se ter um espaço vetorial U e duas bases $B_1 = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ e $B_2 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$. Considerações análogas às

Transformações lineares

anteriores, levar-nos -ão à seguinte situação:

$$\begin{aligned}
 [T]_{B_1, B_1} &= M_{B_1 \leftarrow B_2} [T]_{B_2, B_2} M_{B_2 \leftarrow B_1} \\
 M_{B_1 \leftarrow B_2} &= M_{B_2 \leftarrow B_1}^{-1}
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 [\mathbf{x}]_{B_1} & \xrightarrow{A} & [T(\mathbf{x})]_{B_1} \\
 \downarrow M_{B_2 \leftarrow B_1} & & \uparrow M_{B_1 \leftarrow B_2} \\
 [\mathbf{x}]_{B_2} & \xrightarrow{B} & [T(\mathbf{x})]_{B_2}
 \end{array}$$

onde $A = [T]_{B_1, B_1}$ e $B = [T]_{B_2, B_2}$.

Tendo-se

$$\begin{aligned}
 [T(\mathbf{x})]_{B_1} &= M_{B_2 \leftarrow B_1}^{-1} [T(\mathbf{x})]_{B_2} \\
 &= M_{B_2 \leftarrow B_1}^{-1} B [\mathbf{x}]_{B_2} \\
 &= M_{B_2 \leftarrow B_1}^{-1} B M_{B_2 \leftarrow B_1} [\mathbf{x}]_{B_1}
 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$A = M_{B_2 \leftarrow B_1}^{-1} B M_{B_2 \leftarrow B_1}.$$

Proposição 5. *Seja U um espaço vetorial, seja $T: U \rightarrow U$ uma transformação linear e sejam B_1, B_2 bases de U . Então as matrizes $[T]_{B_1, B_1}$ e $[T]_{B_2, B_2}$ são matrizes semelhantes.*

Matriz associada a uma transformação linear $T: U \rightarrow V$ em diferentes bases

Sejam U, V espaços vetoriais reais (respetivamente, complexos) e sejam B_1 e B'_1 duas bases de U e sejam B_2 e B'_2 duas bases de V . Analogamente ao que tem vindo a ser deduzido nesta secção, tem-se:

$$\begin{aligned}
 [T]_{B_2, B_1} &= M_{B_2 \leftarrow B'_2} [T]_{B'_2, B'_1} M_{B'_1 \leftarrow B_1}
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 [\mathbf{x}]_{B_1} & \xrightarrow{A} & [T(\mathbf{x})]_{B_2} \\
 \downarrow M_{B'_1 \leftarrow B_1} & & \uparrow M_{B_2 \leftarrow B'_2} \\
 [\mathbf{x}]_{B'_1} & \xrightarrow{B} & [T(\mathbf{x})]_{B'_2}
 \end{array}$$

onde $A = [T]_{B_2, B_1}$ e $B = [T]_{B'_2, B'_1}$.

Transformações lineares

Calculando, tem-se

$$\begin{aligned}[T(\mathbf{x})]_{B_2} &= M_{B_2 \leftarrow B'_2} [T(\mathbf{x})]_{B'_2} \\ &= M_{B_2 \leftarrow B'_2} B [\mathbf{x}]_{B'_1} \\ &= M_{B_2 \leftarrow B'_2} B M_{B'_1 \leftarrow B_1} [\mathbf{x}]_{B_1}\end{aligned}$$

donde

$$A = M_{B_2 \leftarrow B'_2} B M_{B'_1 \leftarrow B_1}.$$

Espaços próprios e subespaços invariantes

Seja U um espaço vetorial sobre \mathbb{K} e seja $T: U \rightarrow U$ uma transformação linear.

Diz-se que o vetor $x \in U$, não nulo, é um **vetor próprio** de T se existir $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que

$$Tx = \lambda x.$$

Nestas condições, λ diz-se um **valor próprio** de T associado (ou correspondente) a x . O **espectro de T** , designado por $\sigma(T)$, é o conjunto dos valores próprios da transformação linear T .

Dado um valor próprio λ , o **espaço próprio** $E(\lambda)$ associado ao valor próprio λ é o núcleo da transformação linear $T - \lambda I$ (onde I designa a identidade em U):

$$E(\lambda) = N(T - \lambda I).$$

Seja B uma base de U e $A = [T]_{B_U, B_U}$, tem-se

$$Tx - \lambda x = \mathbf{0} \quad \text{se e só se} \quad (A - \lambda I)[x]_B = \mathbf{0},$$

donde

$$\sigma(T) = \sigma(A),$$

e

$$E(\lambda) = \{x \in U : (x)_B \in N(A - \lambda I)\}.$$

Exemplo. Determine os valores próprios e vetores próprios da reflexão em relação à reta de \mathbb{R}^2 com a equação cartesiana $y = x$.

Exemplo.

- Determine os valores próprios e vetores próprios da rotação em torno da origem em \mathbb{R}^2 de $\pi/2$, no sentido direto.
- Calcule os valores próprios (reais e complexos) da matriz que representa a rotação em relação à base canónica.

Transformações lineares

Subespaços invariantes

Seja U um espaço linear e seja $T : U \rightarrow U$ uma transformação linear. Diz-se que um subespaço W de U é um **subespaço invariante** de T se

$$T(W) \subseteq W.$$

Os subespaços $\{0\}$, U e os espaços próprios de T (se existirem) são exemplos de subespaços invariantes de T .