1. Para números complexos z e w qual das seguintes afirmações é verdadeira?

$$\boxed{z \cdot w = \mathcal{Re}(z) \cdot \mathcal{Re}(w) - \mathcal{Im}(z) \cdot \mathcal{Im}(w) + i\,\mathcal{Re}(z) \cdot \mathcal{Im}(w) + i\,\mathcal{Re}(w) \cdot \mathcal{Im}(z)}$$

2. O conjunto das soluções da equação $(z^2 - 1)^2 = -1$ é :

$$\boxed{\left\{\pm\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}, \pm\sqrt[4]{2}e^{-i\pi/8}\right\}}$$

$$\left\{\pm\sqrt{2}e^{i\pi/8}, \pm\sqrt{2}e^{-i\pi/8}\right\}$$

$$\left\{\pm\sqrt[4]{2}e^{i\pi/4}, \pm\sqrt[4]{2}e^{-i\pi/4}\right\}$$

$$\left\{\pm\sqrt{2}e^{i\pi/4}, \pm\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right\}$$

3. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) O *índice* de um ponto $a \in \mathbb{C}$ em relação ao caminho seccionalmente regular fechado $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{C} \setminus \{a\}$ é

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z+a}.$$

(b) O *índice* de um ponto $a \in \mathbb{C}$ em relação ao caminho seccionalmente regular fechado $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{C} \setminus \{a\}$ é $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$.

(c) O *índice* de um ponto $a \in \mathbb{C}$ em relação ao caminho seccionalmente regular fechado $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{C} \setminus \{a\}$ é

$$\int_\gamma \frac{dz}{z+a}.$$

(d) O *índice* de um ponto $a \in \mathbb{C}$ em relação ao caminho seccionalmente regular fechado $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{C} \setminus \{a\}$ é

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

4. O raio de convergência da série de Maclaurin, isto é a série de Taylor em torno da origem, de $\log(z + 1)$, onde log é logaritmo principal, é

$\boxed{1.}$

5. Considere a função

$$f(z) = \frac{z \operatorname{sen} z}{e^{z^2} - 1}.$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

a. A função f tem singularidades removíveis nos pontos 0, $\pm\sqrt{2k\pi}e^{i\pi/4}$, $\pm i\sqrt{2k\pi}e^{i\pi/4}$, com $0 < k \in \mathbb{Z}$.

b. A função f tem polos de ordem 1 nos pontos 0, $\pm\sqrt{2k\pi}e^{i\pi/4}$, $\pm i\sqrt{2k\pi}e^{i\pi/4}$, com $0 < k \in \mathbb{Z}$.

c. A função f tem uma singularidades removível na origem e polos de ordem 1 nos pontos $\pm\sqrt{2k\pi}e^{i\pi/4}$, $\pm i\sqrt{2k\pi}e^{i\pi/4}$, com $0 < k \in \mathbb{Z}$.

d. A função f tem um polo de ordem 2 na origem e polos de ordem 1 nos pontos $\pm\sqrt{2k\pi}e^{i\pi/4}$, $\pm i\sqrt{2k\pi}e^{i\pi/4}$, com $0 < k \in \mathbb{Z}$.

6. O valor do integral

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=3} \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3}\, dz$$

é dado pela fórmula:

a. $\displaystyle \lim_{z\to 0} \frac{(z-1)^3}{(z+2)^3} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{(z-1)^3}{z}\bigg|_{z=-2} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{z(z+2)^3}\bigg|_{z=1};$

b. $\displaystyle \lim_{z\to 0} \frac{(z-1)^3}{(z+2)^3} + \lim_{z\to -2}\frac{(z-1)^3}{z} + \lim_{z\to 1}\frac{1}{z(z+2)^3};$

c. $\displaystyle \boxed{\lim_{z\to 0} \frac{(z-1)^3}{(z+2)^3} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{(z-1)^3}{z}\bigg|_{z=-2};}$

d. $\displaystyle \lim_{z\to 0} \frac{(z-1)^3}{(z+2)^3} + \lim_{z\to -2}\frac{(z-1)^3}{z}.$

7. Para a um número real não nulo calcule $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\, dx$.

Considere a funcão
$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2+1}$$
Para $R > 1$ e o caminhos $\gamma(t) = t$ com $-R \leqslant t \leqslant R$ e $\sigma(t) = Re^{it}$ com $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, temos
$$\begin{aligned}\int_{\gamma+\sigma} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2i} = \frac{\pi}{e^a} \\ = \int_{-R}^{R} \frac{\cos(ax) + i\,\mathrm{sen}(ax)}{x^2+1}\,dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{iaR\cos t - aR\,\mathrm{sen}\,t}}{R^2e^{i2t}+1} iRe^{it}\,dt\end{aligned}$$
Como
$$\frac{\mathrm{sen}(ax)}{x^2+1}$$
é uma função ímpar temos
$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos(ax) + i\,\mathrm{sen}(ax)}{x^2+1}\,dx = \int_{-R}^{R} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,dx\,.$$
Além disso, temos para $a > 0$ e $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$
$$\begin{aligned}-aR \leqslant -aR\,\mathrm{sen}\,\theta \leqslant 0 \\ e^{-aR} \leqslant e^{-aR\,\mathrm{sen}\,\theta} \leqslant 1 \\ \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{iaR\cos t - aR\,\mathrm{sen}\,t}}{R^2e^{i2t}+1} iRe^{it}\,dt \right| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{e^{-aR\,\mathrm{sen}\,t}}{R^2+1} R\,dt \\ \leqslant \int_0^{\pi} \frac{R}{R^2+1}, dt = \pi \frac{R}{R^2-1}.\end{aligned}$$
Segue que no caso $a > 0$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e^a}.$$
Nos caso $a < 0$ temos $\cos(ax) = \cos(-ax)$ e portanto para $a < 0$ temos
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e^{-a}}.$$
Notamos podemos combinar o dois caso por
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e^{|a|}}.$$

8. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ uma região conexa. Mostre que se $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ é uma função analítica e $|f|$ é constante, então f é constante.

Sejam $u(x,y) = \mathcal{Re}\, f(x+iy)$ e $v(x,y) = \mathcal{Im}\, f(x+iy)$. Temos

$$
\begin{aligned}
u^2 + v^2 &= c \\
2uu_x + 2vv_x &= 0 \\
2uu_y + 2vv_y &= 0 \\
\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

em Ω. Notamos que

$$\det \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} = u^2 + v^2 = |f|^2 = c^2$$

em Ω. Se $c = 0$, então $f(x+iy) = 0$. Se $c^2 > 0$, então $\nabla u = (u_x, u_y) = (0,0)$. Se $z_0, z_1 \in \Omega$ existe um caminho $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ com $\gamma(0) = z_0$ e $\gamma(1) = z_1$. Obtemos

$$u(z_1) - u(z_0) = \int_\gamma \nabla u = 0$$

e portanto u é constante. Como $\nabla v = (-u_y, u_x) = (0,0)$ segue que f é constante.

Versão A do 2º Teste de
Análise Complexa e Equações Diferenciais
9 de julho de 2020

1. Qual das seguintes funções é uma solução do problema de valor inicial?

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y+1}\cos x, \qquad y(\pi) = 0$$

(a) $y(x) = (\operatorname{sen} x - 1)^2 - 1$

(b) $y(x) = 1 - (\operatorname{sen} x - 1)^2$

(c) $\boxed{y(x) = (\operatorname{sen} x + 1)^2 - 1}$

(d) $y(x) = 1 - (\operatorname{sen} x + 1)^2$

2. Qual das seguintes funções é uma solução do problema de valor inicial?

$$\frac{dy}{dt} + 2ty = 1, \qquad y(1) = 1$$

(a) $y(t) = e^{t^2-1} + e^{t^2}\int_1^t e^{-s^2}\,ds$

(b) $\boxed{y(t) = e^{1-t^2} + e^{-t^2}\int_1^t e^{s^2}\,ds}$

(c) $y(t) = e^{t^2-1} - e^{t^2}\int_1^t e^{-s^2}\,ds$

(d) $y(t) = e^{1-t^2} - e^{-t^2}\int_1^t e^{s^2}\,ds$

3. A equação

$$5x^4y + 6x^5y^2 + (2x^5 + 3x^6y)y' = 0$$

é redutível a exata e a função seguinte é um fator integrante.

(a) $\mu(x,y) = x$

(b) $\mu(x,y) = x^2y$

(c) $\boxed{\mu(x,y) = y}$

(d) $\mu(x,y) = xy$

4. Considere o *operador* **L** dado pela expressão

$$\mathbf{L}[y] = y''' + y' + t\cdot y.$$

Dado que $\mathbf{L}\left[\operatorname{sen} t\right] = t \operatorname{sen} t$ e $\mathbf{L}\left[t\right] = t^2 + 1$, uma solução da equação diferencial

$$\mathbf{L}\left[y\right] = 2t \operatorname{sen} t - t^2 - 1$$

é

(a) $y(t) = \operatorname{sen}(2t) - t$

(b) $y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) + t$

(c) $\boxed{y(t) = 2\operatorname{sen} t - t}$

(d) $y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) - t$

5. Se A é uma matriz 3×3 com coeficientes reais e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$A \cdot \mathbf{v}_1 = \lambda \cdot \mathbf{v}_1, \qquad A \cdot \mathbf{v}_2 = \lambda \cdot \mathbf{v}_2 + \lambda \cdot \mathbf{v}_1, \qquad A \cdot \mathbf{v}_3 = \lambda \cdot \mathbf{v}_3,$$

qual das seguintes expressões é a solução geral da equação diferencial $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$.

(a) $\mathbf{y} = e^{\lambda t}\left(c_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) + c_2 t \mathbf{v}_2\right)$

(b) $\mathbf{y} = e^{\lambda t}\left(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 t \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3\right)$

(c) $\mathbf{y} = e^{\lambda t}\left(c_1 \mathbf{v}_1 + (c_1 + c_2 t)\mathbf{v}_2 + c_3 t^2 \mathbf{v}_3\right)$

(d) $\boxed{\mathbf{y} = e^{\lambda t}\left((c_1 + t\lambda c_2)\mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3\right)}$

6. Considere o produto interno $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x)\, dx$, onde f e g são funções contínuas em $[-\pi, \pi]$. Dado que a série de Fourier da função

$$f(x) = x^2 \quad \text{para } |x| \leqslant \pi$$

é

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx\,,$$

qual das seguintes expressões é uma **consequência da identidade de *Parseval*** para a função f?

(a) $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3\sqrt{10}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{144}$

7. Considere a equação diferencial

$$y'' + 2by' + cy = f(t) \tag{1}$$

com $0 < b$, $b^2 < c$ e f uma função contínua em $[0, \infty[$.

i) Determine a solução geral da equação (1).

O polinómio característico é $\lambda^2 + 2b\lambda + c$ é as raízes são $-b + i\sqrt{c - b^2}, -b - i\sqrt{c - b^2}$. Sendo $\omega = \sqrt{c - b^2} > 0$, obtemos a solução geral da equação homogénea é

$$c_1 e^{-bt} \cos \omega t + c_2 e^{-bt} \operatorname{sen} \omega t. \tag{2}$$

Para determinar uma solução particular podemos usar o método de variação das constantes e obtemos uma solução particular

$$-\frac{e^{-bt} \cos \omega t}{\omega} \int_0^t e^{bs} f(s) \operatorname{sen} \omega s \, ds + \frac{e^{-bt} \operatorname{sen} \omega t}{\omega} \int_0^t e^{bs} f(s) \cos \omega s \, ds \,. \tag{3}$$

Logo a solução geral é a soma das equações em (2) e (3).

ii) Mostre que se $f(t)$ é uma função limitada, então cada solução da equação (1) é limitada.

Se $|f(t)| < M$ para $0 \leqslant x$, então temos para $y(t)$ uma solução

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\leqslant |c_1| \cdot |e^{-bt} \cos \omega t| + |c_2| \cdot |e^{-bt} \operatorname{sen} \omega t| \\
&\quad + \left| -\frac{1}{\omega} e^{-bt} \cos \omega t \int_0^t e^{bs} f(s) \operatorname{sen} \omega s \, ds \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{\omega} e^{-bt} \operatorname{sen} \omega t \int_0^t e^{bs} f(s) \cos \omega s \, ds \right| \\
&\leqslant |c_1| + |c_2| + 2 \frac{M e^{-bt}}{\omega} \int_0^t e^{bs} \, ds \\
&\leqslant |c_1| + |c_2| + 2 \frac{M e^{-bt}}{\omega} \frac{e^{bt} - 1}{b} \\
&\leqslant |c_1| + |c_2| + 2 \frac{M}{b\omega} (1 - e^{-bt}) \\
&< |c_1| + |c_2| + 2 \frac{M}{b\omega}.
\end{aligned}$$

8. Determine uma solução formal do problema

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x & x \in]0, \pi[, \ t > 0 \\
u(0, t) = 0, \ u(\pi, t) = 0 & t > 0 \\
u(x, 0) = f(x) &]0, \pi[,
\end{cases}$$

onde $f \colon]0, \pi[\to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Sendo

$$v(x) = \frac{\pi^2 x - x^3}{6}$$

e $u(x,t) = w(x,t) + v(x)$ pode usar o método de separação de variáveis para resolver o problema. Assim temos um problema de Dirichlet com solução

$$\frac{\pi^2 x - x^3}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx,$$

com

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(x) - \frac{\pi^2 x - x^3}{6} \right) \operatorname{sen} nx \, dx \,.$$