Probabilidades e Estatística

— TODOS OS CURSOS —

2^{o}semestre – 2019/2020
27/06/2020 – **09:00**

Duração: 60 minutos **2^{o}teste**

Pergunta 1

Numa unidade fabril, a produção de determinada componente eletrónica é assegurada por duas máquinas (A, B), sendo a máquina A responsável pela produção de a% das componentes. Sabe-se que: b% das componentes defeituosas são produzidas pela máquina A; c% das componentes produzidas pela máquina B são defeituosas.

Qual é a probabilidade de uma componente selecionada ao acaso ser defeituosa?

Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	Probabilidade
A = componente produzida pela máquina A	$P(A) = \frac{a}{100}$
B = componente produzida pela máquina B	$P(B) = 1 - \frac{a}{100}$
D = componente defeituosa	$P(D) = ?$
	$P(A \mid D) = \frac{b}{100}$
	$P(D \mid B) = \frac{c}{100}$

- **Prob. pedida**

$$
\begin{aligned}
P(D) &= P(D \cap A) + P(D \cap B) \\
&= P(D \mid A) \times P(A) + P(D \mid B) \times P(B) \\
&= P(A \mid D) \times P(D) + P(D \mid B) \times P(B) \\
[1 - P(A \mid D)] \times P(D) &= P(D \mid B) \times P(B) \\
P(D) &= \frac{P(D \mid B) \times P(B)}{1 - P(A \mid D)} \\
&= \frac{\frac{c}{100} \times \left(1 - \frac{a}{100}\right)}{1 - \frac{b}{100}}.
\end{aligned}
$$

Pergunta 2

Um lote de N processadores é aceite se uma amostra de n processadores, selecionados ao acaso e sem reposição, não contém quaisquer processadores defeituosos. Suponha que o lote contém M processadores defeituosos.

Sabendo que o lote não é aceite, qual é a probabilidade de a amostra conter no máximo um processador defeituoso?

Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

- **V.a. de interesse**

  X = número de processadores defeituosos numa amostra de n processadores selecionados ao acaso e SEM reposição de um lote com N processadores, dos quais M são defeituosos

- **Distribuição e f.p. de X**

  $X \sim \text{Hipergeométrica}(N, M, n)$

com: N (processadores no lote); M (processadores defeituosos no lote); n (processadores selecionados ao acaso e SEM reposição).

$P(X=x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = \{\max\{0, n-N+M\}, \ldots, \min\{n, M\}\}.$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X \leq 1 \mid X > 0) &= \frac{P(X=1)}{1-P(X=0)} \\ &= \frac{M \times \binom{N-M}{n-1}}{\binom{N}{n} - \binom{N-M}{n}}. \end{aligned}$$

Pergunta 3

A quantidade mensal de certa matéria prima usada num estaleiro naval é representada pela variável aleatória X com distribuição uniforme contínua com valor esperado μ e desvio padrão σ.

Obtenha $E(c + d\sqrt{X})$, o custo mensal esperado de tal matéria prima.

Indique o resultado com pelo menos três casas decimais.

- **Variável aleatória de interesse, distribuição e f.d.p.**

$$\begin{aligned} X &= \text{quantidade mensal de certa matéria prima usada num estaleiro naval} \\ X &\sim \text{uniforme}(a, b) \\ a, b &: \begin{cases} a > b \\ \frac{a+b}{2} = \mu \quad \Leftrightarrow \quad b = 2\mu - a \quad \Leftrightarrow \quad b = \mu + \sqrt{3}\sigma \\ \frac{(b-a)^2}{12} = \sigma^2 \quad \Leftrightarrow \quad (2\mu - a - a)^2 = 12\sigma^2 \quad \Leftrightarrow \quad (\mu - a)^2 = 3\sigma^2 \\ \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - (2\mu)\,a + (\mu^2 - 3\sigma^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow \quad a = \mu - \sqrt{3}\sigma \end{cases} \\ f_X(x) &= \begin{cases} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma}, & a = \mu - \sqrt{3}\sigma < x < \mu + \sqrt{3}\sigma = b \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned}$$

- **Valor esperado pedido**

$$\begin{aligned} E(c + d\sqrt{X}) &= c + d \times E(\sqrt{X}) = c + d \times \int_a^b \sqrt{x} \times \frac{1}{b-a}\, dx = c + \frac{d}{b-a} \times \left.\frac{x^{1.5}}{1.5}\right|_a^b \\ &= c + \frac{d}{1.5 \times (b-a)} \times (b^{1.5} - a^{1.5}) = c + \frac{d}{3\sqrt{3}\sigma} \times [(\mu + \sqrt{3}\sigma)^{1.5} - (\mu - \sqrt{3}\sigma)^{1.5}]. \end{aligned}$$

Pergunta 4

Considere que a variável aleatória X (respetivamente, Y) representa o número de lotes de explosivos de tipo A (respetivamente, B) que são vendidos semanalmente por uma empresa especializada em produtos utilizados em exploração mineira. Admita que o par aleatório (X, Y) possui função de probabilidade conjunta dada por

	Y		
X	0	d	$2d$
0	a	b	c
d	c	a	b
$2d$	b	c	a

Calcule a variância do número total de lotes de explosivos dos tipos A e B que são vendidos semanalmente.

Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

- **Cálculos auxiliares e variância pedida**

  A tabela acima permite-nos concluir que: $(a+b+c)=\frac{1}{3}$; $X \sim Y \sim$ uniforme$(\{0,1,2\})$;

$$\begin{aligned}
E(X) &= E(Y) \\
&= \sum_{x=0}^{2} x\,P(X=x\times d) \\
&= d; \\
V(X) &= V(Y)=E(X^2)-E^2(X)=\sum_{x=0}^{2}(x\times d)^2\,P(X=x\times d)-E^2(X) \\
&= \left(d^2\times\frac{1}{3}+(2d)^2\times\frac{1}{3}\right)-d^2 \\
&= \frac{2}{3}d^2; \\
E(XY) &= \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} x\,y\,P(X=x\times d,\,Y=y\times d) \\
&= d^2\times a+2d^2\times b+2d^2\times c+4d^2\times a \\
&= 2d^2\times(a+b+c)+3d^2\times a \\
&= \left(\frac{2}{3}+3a\right)\times d^2; \\
cov(X,Y) &= E(XY)-E(X)\times E(Y) \\
&= \left(\frac{2}{3}+3a\right)\times d^2-d^2 \\
&= \left(3a-\frac{1}{3}\right)\times d^2; \\
V(X+Y) &= V(X)+V(Y)+2\times cov(X,Y) \\
&= \frac{2}{3}d^2+\frac{2}{3}d^2+2\times\left(3a-\frac{1}{3}\right)\times d^2 \\
&= \left(6a+\frac{2}{3}\right)\times d^2.
\end{aligned}$$

Pergunta 5

Admita que as frações de ocupação de discos rígidos são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas à variável aleatória X com função de densidade de probabilidade

$$f_X(x)=\begin{cases}(\alpha+1)\,\alpha\,x^{\alpha-1}(1-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}$$

e variância $V(X)=\frac{2\alpha}{(\alpha+2)^2\,(\alpha+3)}$.

Obtenha um valor aproximado para a probabilidade de a fração média de ocupação de n discos rígidos ser superior a b.

Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

- **V.a., distribuição, valor esperado e variância comuns**

$$\begin{aligned}
X_i &= \text{fração de ocupação do discos rígido} i, \quad i=1,\ldots,n \\
X_i &\overset{i.i.d.}{\sim} X \\
E(X_i) &= E(X) \\
&= \int_0^1 x\times(\alpha+1)\,\alpha\,x^{\alpha-1}(1-x)\,dx \\
&= \alpha\int_0^1(\alpha+1)\,x^{\alpha}\,dx-\frac{(\alpha+1)\alpha}{\alpha+2}\int_0^1(\alpha+2)\,x^{\alpha+1}\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(X_i) &= \alpha\ x^{\alpha}\Big|_0^1 - \frac{(\alpha+1)\alpha}{\alpha+2}\ x^{\alpha+2}\Big|_0^1 \\
&= \alpha - \frac{(\alpha+1)\alpha}{\alpha+2} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+2} \\
V(X_i) &= V(X) \\
&= \sigma^2 \\
&= \frac{2\alpha}{(\alpha+2)^2\,(\alpha+3)}
\end{aligned}
$$

- **V.a. de interesse**

  $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ = fração média de ocupação de n discos rígidos

  $E(\bar{X}) = \cdots = \mu$

  $V(\bar{X}) = \cdots = \frac{\sigma^2}{n}$

- **Valor aproximado da prob. pedida**

$$
\begin{aligned}
P(\bar{X} > b) &\stackrel{TLC}{\simeq} 1 - \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{b - \frac{\alpha}{\alpha+2}}{\sqrt{\frac{\frac{2\alpha}{(\alpha+2)^2\,(\alpha+3)}}{n}}}\right).
\end{aligned}
$$