MODELAÇÃO E SIMULAÇÃO

MEEC – IST, TESTE N0.2, 30/05/20

Duração: 2 horas

O símbolo (+) denota perguntas de "maior dificuldade"

Problema No. 1 Estabilidade de Sistemas Não Lineares. Teoria de estabilidade de Lyapunov [5 v]

Um veículo desloca-se num fluido à velocidade v, sob o efeito de uma força externa u. Considere que a massa do veículo é m=1kg, e que o veículo está sujeito a uma força de arrasto dada $f(v)$. A física do problema dita que a força de arrasto não linear satisfaz as condições

$$f(0) = 0 \ \ ; vf(v) > 0 \ \ para \ \ v \neq 0$$

ou seja, $f(.)$ passa pela origem e está localizada nos 1^o e 3^o quadrantes. Sendo assim, a dinâmica do veículo é dada por

$$\dot{v} = -f(v) + u$$

P1.1 [2v] Pretende-se controlar a velocidade v para um valor desejado mas fixo, dado por $v=v^*>0$. Para isso, propõe-se a lei de controlo

$$u = f(v^*) - k(v - v^*)$$

Mostre que a velocidade do veículo tende assimptoticamente para v^* qualquer que seja o valor inicial $v(0)$ de v. Passos a seguir: i) escreva as equações que ditam a evolução do erro de velocidade $e=v-v^*$ e ii) mostre que as trajectórias de $e(t)$ tendem para 0.

P1.2 [2v] Na alínea anterior assumiu-se que se pode medir exactamente o erro de velocidade $e=v-v^*$. Suponha agora que o erro e é dado por um sensor com características não lineares, que fornece medidas de $e=v-v^*$ através da relação $g(e)$, onde $g(.)$ satisfaz duas condições: i) $g(0)=0$ e ii) $eg(e)>0$ para $e\neq 0$. Mostre que com uma simples modificação da lei de controlo linear descrita em P1.1 , isto é, com

$$u = f(v^*) - kg(e); k > 0$$

o erro e continua a tender assimptoticamente para 0 qualquer que seja o erro inicial (isto é, prove a estabilidade assimptótica global da origem $e=0$ do sistema).

P1.3 (+) [1v] **Considere novamente a questão P.1.1,** onde se assumiu que se conhece exactamente a função $f(v)$, de modo a poder calcular $f(v^*)$. *Esta hipótese não se verifica na prática***.** A fim de ultrapassarmos esta dificuldade e conseguirmos ao mesmo tempo uma lei de controlo mais genérica, poderia parecer à primeira vista ser adequado adoptar uma simples lei de controlo da forma

$$u = \hat{f}(v) - k(v - v*)$$

com $\hat{f}$ *(.)* uma estimativa "adequada" da função real *f(.)*, de modo a tentar "cancelar" o efeito desta função e tornar o sistema linear. Esta abordagem pode ser perigosa dado o facto de existir uma discrepância entre a função real e a sua estimativa. Suponha no entanto que a estimativa é por defeito e tem o valor $\underline{0}$ quando $v=0$, de modo que a **diferença entre a estimativa e a função real se encontra nos 1º e 3º quadrantes**, ou seja,

$$\tilde{f}(v) = f(v) - \hat{f}(v);\ \tilde{f}(0) = 0,\ \ e\ \ v\tilde{f}(v) > 0,\ v \neq 0$$

Não é difícil provar que esta lei de controlo não "funciona", pelo que se sugere a lei de controlo reformulada com efeito integral, definido por

$$u = \hat{f}(v) + k\xi$$

$$\tfrac{d\xi}{dt} = -(v - v^*)$$

onde ζ representa o estado adicional associado ao integrador. **Prove que com esta lei de controlo** o sistema de controlo total tem o ponto de equilíbrio definido por $v=v^*$, $\zeta=\zeta^*$ (com ζ^* a determinar), e que esse ponto de equilíbrio é globalmente assimptóticamente estável. ***Para resolver esta alínea, será necessário fazer uso do princípio de invariância de La Salle.***

PROBLEMA N0.2 - Estimação dos parâmetros de um sistema dinâmico [5v]

Considere um corpo que se desloca na atmosfera a altitude constante, e se desloca com velocidade horizontal $v>0$, sujeito à acção da força F, com dinâmica

$$\dot{v} = -(\beta_1/m)v - (\beta_2/m)v^2 + F/m$$

onde $m>0$ representa a massa do corpo e β_1, $\beta_2>0$ são respectivamente os coeficiente de atrito linear e quadrático. A força F é gerada por um propulsor a hélice que roda à velocidade angular $\eta>0$, sendo

$$F = \gamma\eta^2; \gamma > 0$$

onde $\gamma>0$ é um parâmetro que capta a eficiência do sistema de propulsão. A massa m é conhecida e igual a *1 Kg*. Planeia-se uma experiência para determinar os valores de β_1, β_2 e γ partir de medidas de v e η em instantes sucessivos t_0, t_1, ...t_N (com $N+1$ o número de amostras de cada uma dessas varáveis). Para atacar este problema, considere o modelo total discretizado da dinâmica (com período de amostragem *1s*) dado por

$$v_{k+1} = v_k - \beta_1 v_k - \beta_2 v_k^2 + \gamma u_k^2$$

onde $u=\eta$, k denota o índice dos instantes de amostragem t_k com $k=0, 1, ...N$ e v_k e u_k são os valores medidos de u e v nos vários instantes de amostragem.

P2.1 [2v] Indique o funcional de mínimos quadrados a minimizar.

P2.2 [3v] Derive o sistema de equações lineares que permitem determinar as estimativas dos parâmetros β_1, β_2 e γ.

PROBLEMA N0.3 - Sistemas de acontecimentos discretos [6v]

Um parque de diversões convidou a família FELIZ a passar um dia de lazer jogando 3 tipos de jogos denominados *G1, G2, e G3*. A família joga somente um jogo de cada vez, e é obrigada a mudar de jogo ao fim de uma hora. A transição entre jogos é efectuada após consulta de um quadro que indica qual o próximo jogo atribuido. No entanto, o quadro não é determinístico: a decisão àcerca do próximo jogo é feita através de um gerador aleatório que reflecte as probabilidade de transição entre jogos, impostas pela direcção do parque. A probabilidade de a família transitar do jogo G*i* para o jogo *Gj; i,j=1,2,3* é dada pela entrada $a_{i,j}$ da matriz A, especificada a seguir (*i* e *j* são respectivamente a linha e coluna da matriz)

P3.1 [2v] Considere que

$$A = \begin{bmatrix} k & (1-k)/2 & (1-k)/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

com ***k*** fixo e ***0<k<1.***

i) Represente graficamente a Cadeia de Markov associada a este sistema de eventos discretos
ii) Prove que se ***0<k<1,*** então existem e são bem definidos ***os*** valores limites p^*_1, p^*_2, e p^*_3 das probabilidades p_1, p_2, e p_3 de a família FELIZ ser encontrada (ao fim de um longo dia de jogos) a jogar respectivamente os jogos *G1, G2,* e *G3*. **Para isso, basta provar que a matriz *A* é regular**. Descreva o algoritmo a utilizar para calcular analíticaments os valores de p^*_1, p^*_2, e p^*_3 *em função de k>0*

P3.2 [2v] **Suponha agora que *k=1*** e mostre que neste caso a matriz *A* não é regular. Como a condição de regularidade para a existência de probabilidades limite é suficiente mas não necessária, coloca-se a dúvida se as probabilidades limite p^*_1, p^*_2, e p^*_3 são bem definidas. Mostre que isso acontece para este caso particular. Para isso, mostre que a partir de uma distribuição de probabilidades inicial arbitrária $p_1(0)$, $p_2(0)$, e $p_3(0)$, ao fim de 2 transições as probabilidades convergem para [*1, 0, 0]*. Justifique, com base num raciocínio de ordem intuitiva, o resultado obtido (ou seja, é um resultado expectável?).

P3.3 [2v] **Suponha que k=0** e mostre que neste caso a matriz *A* também não é regular. Mais uma vez, coloca-se a dúvida se as probabilidades limite p^*_1, p^*_2, e p^*_3 são bem definidas. Mostre que ao contrário do que acontece par*a k=1,* neste caso particular existe pelo menos uma distribuição inicial $p_1(0)$, $p_2(0)$, e

$p_3(0)$ para o qual as probabilidades $p_1(k)$, $p_2(k)$, e $p_3(k)$; $k=1, 2, 3,.....$ exibem um padrão periódico no tempo, pelo que não convergem. Sugestão: faça $p_1(0)=0$, $p_2(0)=1$, e $p_3(0)=0$. Dé uma explicação intuitiva para este resultado por análise da "forma gráfica" da cadeia de Markov do sistema discreto.

Moral da história: cuidado com cadeias de Markov não regulares!

PROBLEMA N0.4 – Modelação de Veículos Robóticos [4v]

Considere um corpo rígido com massa $m=1kg$ que se move no espaço, em 2D, sem atrito (ver Fig. 3). Seja {B} um referencial solidário com o corpo, e {U} um referencial de inércia. A velocidade linear inercial do corpo tem components u e v em $\{B\}$, respectivamente segundo os versores x_B e y_B, e velocidade nula segundo z_B (movimento no plano). A velocidade rotacional em torno de z_B denota-se por r. Note que $r=d\psi(t)/dt$, onde $\psi(t)$ (denominado ângulo de "yaw") capta a rotação de {B} em relação a {U}. O corpo está equipado com actuadores que permitem imprimir forças X e Y segundo os eixos x_B e y_B e um binário N em torno do eixo z_B .

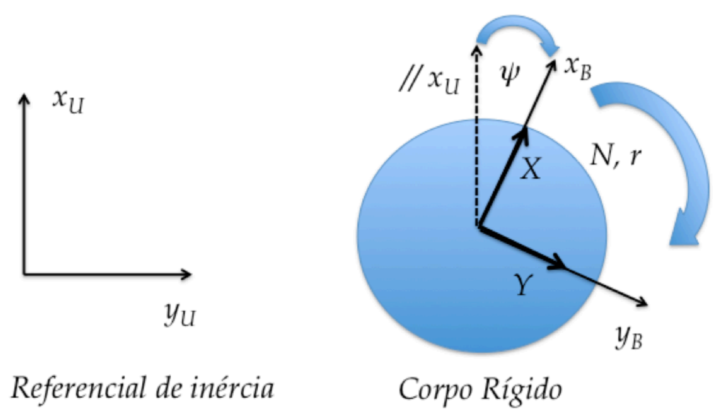

Fig. 3 Corpo Rígido em movimento

P4.1 [3v] Suponha que o corpo está animado das condições iniciais $r(0)=1$ $rads^{-1}$, $\psi(0)=0$, $u(0)=0$ ms^{-1}, $v(0)= 1ms^{-1}$ (corpo a rodar no espaço) e que se aplicam forças $X(t)=0$ N *e* $Y(t)=1$ N *(repare que esta forças estão expressas no referencial do corpo)* mas o binário $N(t)=0$; $t\geq0$. *Calcule* o vector velocidade do corpo expressa no referencial $\{U\}$, ou seja, o vector velocidade do centro de massa do corpo visto por um observador externo instalado em {U}.

Sugestão: escreva as equações da dinâmica em forma matricial e calcule a solução $[u(t)\ v(t)]^T$ utilizando transformadas de Laplace. Em seguida, calcule a velocidade ${}^UV$ expressa em {U} usando as equações da cinemática. Não esquecer que $X(t)$ e $Y(t)$ são escalões de Heaviside, e por isso $X(s)=Y(s)=1/s$.

Tabela de transformadas de Laplace:

i) *TL (cos bt)=s/(s^2+b)*
ii) *TL (sen bt)=b/(s^2+b)*

P4.2 (+) [1v] Pretende-se agora que o corpo, animado das condições iniciais $\psi(0)=0$, $r(0)=0$, u(0)=1 ms^{-1}, v(0)= 0 ms^{-1} descreva uma trajectória no referencial $\{U\}$ tal que:

1. O vector velocidade total (no referencial $\{U\}$) seja dado por ${}^{U}V=[1\ 0\ ]^T$ m/s (veículo com o centro de massa a progredir ao longo do eixo vertical x_U).

2. O veículo execute, para efeitos de observação do ambiente, um movimento oscilatório periódico em torno do eixo z_U de acordo com a expressão

$$\psi(t) = asin(rt);\ r, a > 0$$

onde a é amplitude da oscilação em torno de 0 e r é a velocidade de rotação. Calcule as força X*(t) e Y(t)* e o binário *N(t)* a aplicar ao corpo. *Comente o resultado obtido sob o ponto de vista físico.*