MODELAÇÃO E SIMULAÇÃO

TESTE No. 2 – PERGUNTAS VARIADAS

2020

MEEC – IST

PROBLEMA N0.1 - Estimação de Parâmetros

Sabe-se, por considerações de ordem física, que a grandeza z tem uma variação no tempo dada pela expressão

$$z(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 \sin t \ e^{-t} + \varepsilon(t)$$

Nesta equação, t é o tempo medido a partir do início da experiência, $\boldsymbol{a}=[a_0, a_1, a_2, a_3]^T$ é um vector dos parâmetros a estimar e ε(t) é um resíduo que traduz a existência de erros experimentais, que se assumem pequenos. Com o objectivo de estimar o vector constante ***a***, leva-se a cabo uma experiência com N medições durante a qual se regista o vector

$$\boldsymbol{t}=[t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_N]^T$$

dos tempos de medição, bem como o vector de observações correspondente
§

$$\boldsymbol{z}=[z_1, z_2, z_3, z_4, \dots, z_N]^T=[z(t_1), z(t_2), z(t_3), z(t_4), \dots, z(t_N)]^T.$$

Pretende-se desenvolver um algoritmo para obter uma estimativa do vector de parâmetros ***a*** recorrendo ao método dos mínimos quadrados. Complete as seguintes etapas do problema:

P1.1 Indique o funcional de mínimos quadrados a minimizer.

P1.2 Manipule as equações que permitem calcular ***a*** de modo a obter explicitamente o sistema compacto de equações $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, com M (uma matriz de *4x4)* e *b* (um vector de dimensão *4)* obtidos a partir dos dados experimentais.

PROBLEMA N0.2 - Estimação de Parâmetros

Considere um corpo na atmosfera que se desloca na horizontal com velocidade $v>0$, sujeito à acção da força F, com dinâmica

$$\dot{v} = -(\beta/mv^2) + F/m$$

onde m representa a massa do corpo e β é o coeficiente de atrito. Planeia-se uma experiência para determinar os valores de m e β a partir de medidas de v e F em instantes sucessivos t_o, t_1, ...t_N (com N+1 o número de amostras de cada uma dessas varáveis). Para atacar este problema, considere o modelo discretizado da dinâmica dado por

$$v_{k+1} = v_k - av_k^2 + bu_k$$

com a= β/m e $b=1/m$ e $u=F$ e k denota o índice dos instantes de amostragem com $k=0, 1, \dots N$. O problema converte-se assim em determinar os valores de a, b com base em medidas de v_k e u_k nos instantes de amostragem.

P2.1 Indique o funcional de mínimos quadrados a minimizar.
P2.2 Derive o sistema de equações lineares que permitem determinar as estimativas dos parâmetros a e b.

PROBLEMA N0.3 - Sistemas de Acontecimentos Discretos [5v]

Uma mosca voa ao longo de uma circunferência e visita 4 lugares denominados *L1, L2, L3, e L4* (estados discretos do sistema) distribuídos ao longo da circunferência, ordenados no sentido dos ponteiros do relógio. A cada instante em que pode tomar a decisão de voar, a mosca move-se para um dos lugares mais próximos (lugares vizinhos) do seguinte modo: movimenta-se no sentido dos ponteiros do relógio com probabilidade *0.3,* no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio com probabilidade *0.3,* e permanece no mesmo lugar com probabilidade *0.4,* independentemente da história passada dos seus movimentos. Seja p_i; $i=1, 2, 3$ a probabilidade de a mosca estar em *Li.*

P3.1 Represente graficamente a Cadeia de Markov com 4 estados *L1, L2, L3, e L4* associada a este sistema de eventos discretos e calcule a respectiva matriz de transição entre estados.

P3.2 Mostre que existem valores limites das probabilidades p_1, p_2, p_3, e p_4 quando o período de observação é arbitrariamente longo.

P3.3 Explique detalhadamente como calcularia analiticamente os valores de equilíbrio referidos em **P3.2** (não precisa de efectuar os cálculos numéricos).

P3.4 Suponha agora que existe uma aranha mortífera no lugar *L1.* Se a mosca "aterra" em L1, é seguramente apanhada pela teia de aranha. Reescreva a matriz de transição entre estados de modo a captar este facto. Suponha que a mosca começa no lugar *L3*. Calcule a probabilidade de a mosca ser comida ao fim de um voo. Justifique intuitivamente. Calcule a probabilidade de a mosca ser comida ao fim de dois voos.

PROBLEMA N0.4 – Modelação de Veículos Robóticos [3v]
Considere um corpo rígido com massa $m=1kg$ que se move no espaço, em 2D, sem atrito (ver Fig. 3). Seja {B} um referencial solidário com o corpo, e {U} um referencial de inércia. A velocidade linear inercial do corpo tem componentes u e v em *{B},* respectivamente segundo os versores x_B e y_B, e velocidade nula segundo z_B (movimento no plano). A velocidade rotacional em torno de z_B denota-se por r. Note que $r=d\psi(t)/dt$, onde $\psi(t)$ (denominado ângulo de "yaw") capta a rotação de {B} em relação a {U}. O corpo está equipado com actuadores que permitem imprimir forças X e Y segundo os eixos x_B e y_B e um binário N em torno do eixo z_B .

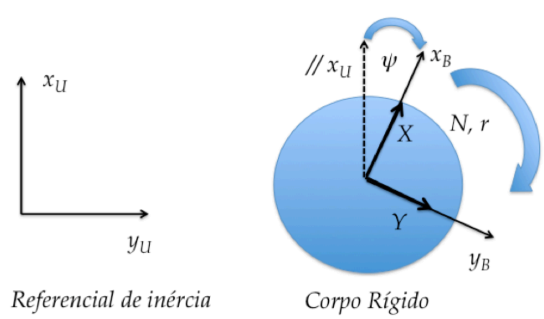

Fig. 2 Corpo Rígido em movimento

4.1 Suponha que $N(t)=0, t \geq 0$ e que o corpo está animado das condições iniciais $r(0)=1$ $rads^{-1}$, $\psi(0)=0$, $u(0)=-1$ ms^{-1}, $v(0)= -1ms^{-1}$ (corpo a rodar no espaço, com velocidades não nulas segundo os eixos x_B e y_B). Pretende-se que o movimento do corpo no referencial de inércia *{U}* seja tal que o vector velocidade total (no referencial *{U}*) seja dado por ${}^{U}V=[-1 \;\; -1\,]^T$ (veículo com o centro de massa a progredir segundo uma recta orientada a -135º). Calcule as força X*(t) e Y(t)* a aplicar ao corpo. *Comente o resultado obtido sob o ponto de vista físico.* ***Sugestão: utilize primeiro as equações da cinemática para calcular u(t) e v(t), e utilize depois as***

equações da dinâmica para calcular X(t) e Y(t).

P4.2 Suponha agora que o corpo está animado das condições iniciais *r(0)=1 rads*$^{-1}$, *ψ(0)=0,* u(0)=0 *ms*$^{-1}$, v(0)= 0*ms*$^{-1}$ (corpo a rodar no espaço, com velocidade linear igual a 0) e que se aplicam forças constantes X(t)=*Y(t)=1N (repare que esta forças estão expressas no referencial do corpo)* mas o binário *N(t)=0; t≥0. Calcule* o vector velocidade do corpo expressa no referencial *{U},* ou seja, o vector velocidade do centro de massa do corpo visto por um observador externo instalado em {U}.

Sugestão: escreva as equações da dinâmica e calcule a solução $[u(t)\ v(t)]^T$ utilizando transformadas de Laplace. Em seguida, calcule a velocidade ^{U}V expressa em {U} usando as equações da cinemática. Não esquecer que *X(t)* e *Y(t)* são escalões de Heaviside, e por isso *X(s)=Y(s)=1/s.*

Transformadas de Laplace de interesse:

- *i)* *TL (cos bt)=s/(s^2+b)*
- *ii)* *TL (sen bt)=b/(s^2+b)*