1º Trabalho Computacional - ANEDP

(3 a 17 de Abril de 2020)

$\boldsymbol{G}$ é o vosso número de grupo, $\quad \boldsymbol{G}_p = \mod(\boldsymbol{G}, 2)$

1)$_{[4.0]}$ Programe uma função MDF4 dando a aproximação $\tilde{u}$ de u, que seja $O(h^4)$, onde u é solução de

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t), u'(t)) & t \in [\boldsymbol{G}, 3+\boldsymbol{G}] \\ u(\boldsymbol{G}) = g, \ u'(3+\boldsymbol{G}) = 0 \end{cases}$$

[Para este efeito pode usar a função FindRoot do Mathematica.]

a) Apresente 3 exemplos de aproximação em que considera f linear e não linear, definindo a mesma solução exacta.

b) Para os exemplos anteriores, estabeleça gráficos log-log para confirmar a ordem de convergência.

c) Considere um exemplo em que a solução não é conhecida, e analise a convergência.

2)$_{[6.0]}$ Programe uma função LAP2 que devolva a aproximação $\tilde{u}$ de u que seja $O(h^2)$, onde u é solução de

$$\begin{cases} (1+\boldsymbol{G}_p)\partial_x^2 u + \Delta u - u = f & \Omega_q \\ u = g & \Gamma_a \cup \Gamma_b \cup \Gamma_q \\ \partial_y u = 0 & \Gamma_0 \end{cases}$$

Consideramos aqui $\partial\Omega_q = \Gamma_a \cup \Gamma_b \cup \Gamma_q \cup \Gamma_0$ com

$$\begin{cases} \Omega_q = \{(x,y) : a < x < b \wedge 0 < y < q(x)\} & \text{se } \boldsymbol{G}_p = 0 \\ \Omega_q = \{(x,y) : a < x < b \wedge q(x) < y < 0\} & \text{se } \boldsymbol{G}_p = 1 \end{cases}$$

onde q é um polinómio de grau 2 (escolhido) e temos

$$\Gamma_a = \{(a,y) : (a,y) \in \bar{\Omega}_q\} \quad , \quad \Gamma_b = \{(b,y) : (b,y) \in \bar{\Omega}_q\},$$
$$\Gamma_q = \{(x,y) : (x,q(x)) \in \bar{\Omega}_q\} \quad , \quad \Gamma_0 = \{(x,0) : a \leq x \leq b\}$$

Para esse efeito considere a implementação de um método SOR para resolver o sistema linear.

a) Apresente 2 exemplos de convergência escolhendo f, g, e sendo solução exacta $u(x,y) = \boldsymbol{G}\cos(xy)$.

b) Ilustre a convergência, mostrando como depende da precisão do método SOR e de h.

c) Fixando todos os valores e só variando a fronteira com $\pm q(x) = 1 + A(x-a)(b-x)$ trace o gráfico de $u(\frac{a+b}{2}, 0)$ em função de $A > 0$. Comente se pode determinar A (e assim a fronteira Γ_q) medindo u naquele ponto.

3)$_{[6.0]}$ Considere a equação de difusão

$$\begin{cases} \partial_t u = (3-\boldsymbol{G}_p)\partial_x^2 u + f & (a,b) \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & \Gamma_a \cup \Gamma_b \cup \Gamma_q \\ u(a,t) = \partial_x u(b,t) = \boldsymbol{G} & \text{se } \boldsymbol{G}_p = 0 \\ \partial_x u(a,t) = u(b,t) = \boldsymbol{G} & \text{se } \boldsymbol{G}_p = 1 \end{cases}$$

Programe uma função DIF1 que implemente um esquema explícito e DIF2 que implemente o esquema Crank-Nicolson.

a) Apresente 2 exemplos de aproximação considerando f, u_0, assim definindo uma solução exacta.

b) Compare a convergência de DIF1 e DIF2, usando gráficos log-log para a evolução do erro.

4)$_{[4.0]}$Implemente os métodos Lax e Lax-Wendroff como funções LAX e LAXW.
Ilustre com 2 soluções conhecidas a convergência desses métodos e compare a ordem de convergência usando gráficos log-log.

Observação: *O trabalho pode ser apresentado num ficheiro Mathematica, aí escrevendo as respostas e comentários, ou então essas respostas ou comentários são inclusas num ficheiro PDF anexo ao ficheiro Mathematica. A pertinência da escolha de funções, as respostas e comentários, a clareza e a eficiência da programação, contribuem para a classificação deste trabalho.*