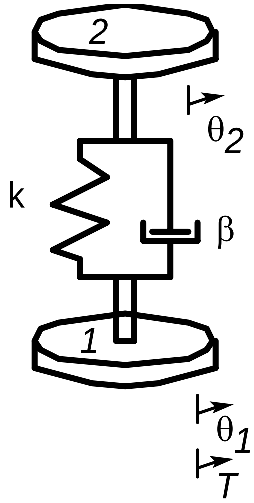
Modelação e Simulação

Problemas – 3 (Continuação)

P13. Considere o sistema que se representa na figura



Este sistema representa duas massas que rodam em torno de um eixo, acopladas por uma jumnta elástica com atrito. Pretendem representar um satélite em que o corpo principal do satélite (1) está ligado a um compartimento (2) onde se encontram instrumentos de medida, o qual está afastado para reduzir o ruído eléctrico. Devido às restrições de carga do satélite, o elemento de ligação não é rígido. Neste problema, pretende-se estudar o movimento do compartimento de instrumentos quando o satelite é movimentado por actuadores.

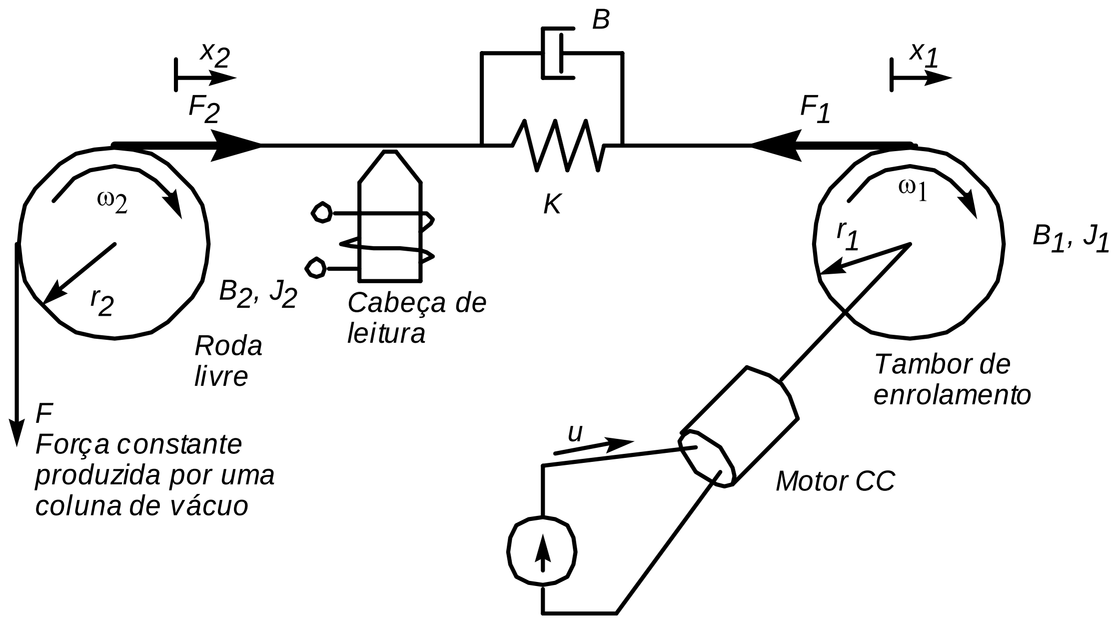
Na figura, T representa o binário aplicado ao corpo do satélite e θ_1 e θ_2 são respectivamente, os ângulos de rotação nos referenciais indicados do corpo principal e do compartimento de instrumentos.

a) Com base na lei de Newton para os corpos em rotação, escreva as equações que modelam o sistema.

b) Escreva um modelo de estado tomando como vector de estado o seguinte

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

P14*. A figura seguinte representa um diagrama simplificado de um sistema de enrolamento de fita magnética. A fita é passada à frente de uma cabeça magnética de leitura e enrolada num tambor rebocado por um motor de corrente contínua (CC).



A mola e o elemento de atrito indicvados na fita correspopndem à elasticidade e atrito interno desta, não sendo objectos separados.

Ecreva as equações que modelam o sistema na forma de um modelo de estado (sistema de equações diferenciais de 1ª ordem).

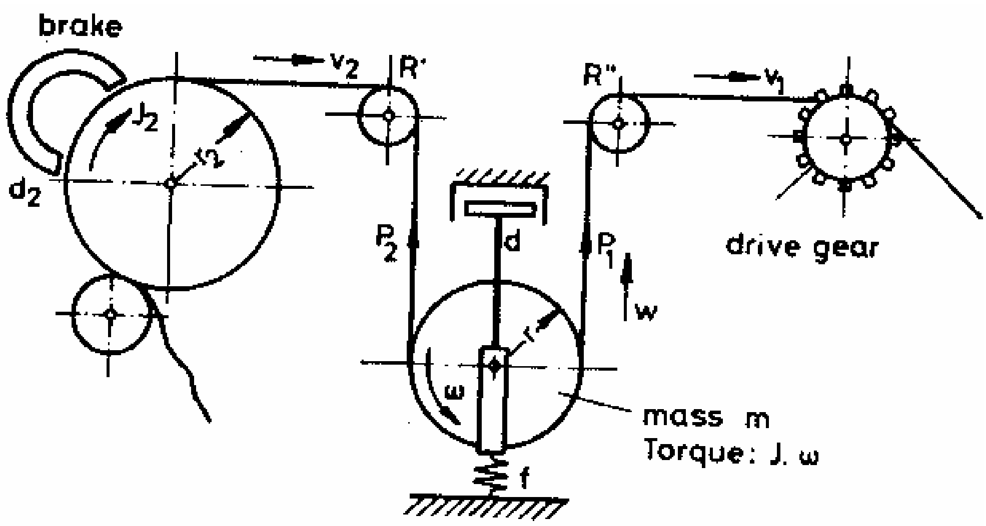
Sugestão: Siga os seguintes passos:

- Escreva as equações da lei de Newton para o tambor de enrolamento e para a roda livre em função das tensões da fita junto de cada um dos elementos de rotação, F_1 e F_2. Observe que o binário de uma força em relação a um eixo é o produto da força pelo comprimento do raio.;
- Relacione as velocidades lineares da fita junto de cada um dos elementos de rotação, $\dot{x}_1$ e $\dot{x}_2$ com as respectivas velocidades angulares, respectivamente do tambor (ω_1) e da roda livre (ω_2). Observe que a velocidade linear de um ponto da periferia de uma roda é o produto do raio da roda pela velocidade angular;
- Observe que as tensões da fita, F_1 e F_2 são devidas à elasticidade e ao atrito interno da fita. Escreva expressões para os binários gerados por estas forças de tensão no tambor e na roda livre. Estas expressões devem vir em função dops

deslocamentos da fita x_1 e x_2 e das suas derivadas (velocidade da fita junto de cada um dos elementos de rotação).

- Escreva as equações do motor.

P15. A figura mostra um sistema de enrolamento de uma fita (por exemplo um filme para projecção). Pode mostrar-se que este sistema corresponde a um filtro mecânico que reduz as oscilações induzidas pelos dentes da roda de reboque.



O objective da modelação consiste em relacionar a velocidade linear v_1 (entrada do sistema, imposta pela roda de reboque /*drive gear*) com a velocidade linear v_2 da fita à saída do tambor. Fazem-se as seguintes hipóteses:

- A fita é inextensível;
- As inércias das roldanas R' e R" são desprezáveis;
- Todos os tambores e roldanas giram com um atrito desprezável;
- O freio (*break*) exerece uma força de arrasto no tambor proporcional à velocidade linear;
- Não há deslizamento da fita.

Pretende-se escrever as equações que modelam o sistema. Para tal, execute os seguintes passos:

a) Escreva a lei de Newton para o movimento de rotação do tambor, mas em termos da velocidade linear v_2. Repare que a velocidade angular é o quciente da velocidade linear pelo raio.

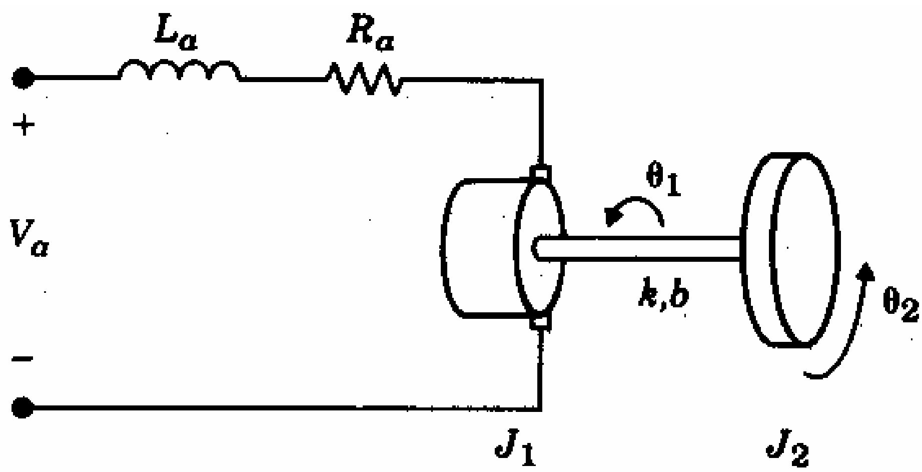
b) Escreva a lei de Newton para o movimento de rotação da roldana móvel. Designe por ω a velocidade de rotação da roldana móvel.

c) Escreva a lei de Newton para o movimento de translação vertical da roldana móvel. Designe por w o deslocamento para cima do eixo da roldana no referencial indicado na figura.

d) Escreva uma expressão para v_1 em função de r (raio da roldana móvel), ω (velocidade de rotação da roldana móvel) e $\dot{w}$ (velocidade de translação da roldana móvel segundo a vertical). Escreva uma expressão análoga para v_2.

O sistema de equações diferenciais que obteve permite modelar o sistema. Considerando incrementos em relação aos valores de P_1 e P_2 que compensam o peso, e tomando transformada de laplace, pode obter-se a função de transferência que relaciona os incrementos de v_1 e v_2. Esta função de transferência tem dois zeros e dois pólos, pelo que pode ser considerada como um filtro rejeita banda (*notsch*) por forma a impedir que variações de uma dada frequência de v_1 não se reflictam em v_2. Para os detalhes ver o exemplo 4 de K. H. Fasol and H. P. Jorgl, Principles of model building and identification, *Automatica*, 16(5):505-518, 1980. Esta revista pode ser encontrada na Biblioteca do Departamento de Matemática do IST.

P16. (*Adaptado de Franklin, Powell, Naeini*). Um problema típico do controlo de posição de sistemas electromecânicos consiste em modelar um motor eléctrico que reboca uma carga que tem um modo dominante de vibração. O problema põe-se no controlo da posição das cabeças de discos de computador, enrolamento de fitas e em muitas outras aplicações. A figura seguinte mostra um diagrama simplificado do sistema.



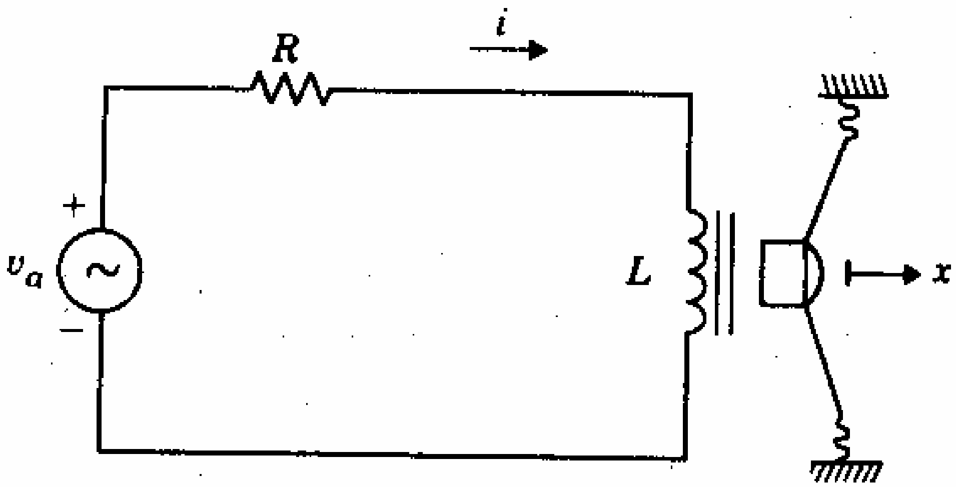
Nesta figura, um motor de corrente contínua de íman permanente actua sobre uma carga com momento de inércia J_2, à qual está ligado através de um veio flexível que pode ser modelado como uma mola de constante k em paralelo com uma fricção de constante b. Esta fricção corresponde à dissipação de energia associada à torção do veio. A figura mostra o circuito do rótor do motor, sendo J_1 o momento de inércia do veio do motor e B o seu coeficiente de atrito. O motor tem constante eléctrica K_e e constante de binário K_T.

a) Por aplicação da lei de Newton a cada um dos elementos que se movem independentemente (veio do motor e carga), e das leis que modelam o circuito elévtrico do rótor, escreva as equações que modelam o sistema.
b) Escreva um modelo de estado para o sistema na forma de um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem nas variáveis de estado definidas por

$$x = \begin{bmatrix}\theta_2 & \dot{\theta}_2 & \theta_1 & \dot{\theta}_1 & i_a\end{bmatrix}^T$$

em que i_a é a corrente no circuiro do rótor.

P17. A figura seguinte representa um circuito esquemático de um autofalante.



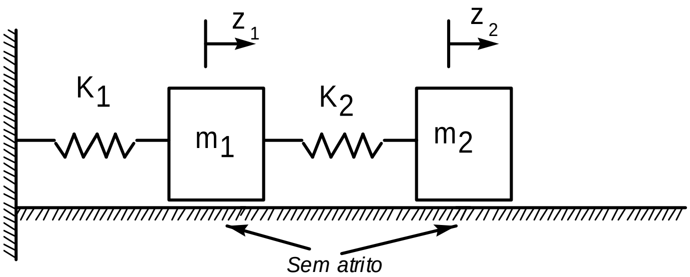
O objectivo do autofalante é reproduzir nos mopvimentos do cone (variável x) uma “imagem” da evolução temporal da tensão eléctrica v_a. De forma simplificada, um autofalente consiste numa bobina eléctrica (indutância L na figura) que cria um campo magnético, e que está acoplada ao cone do autofalente. O cone está apoiado nos bordos por suspensões que execem uma força desprezável. Existe um núcleo de material magnético que cria um campo magnético. Assim, quando a bobina é percorrida por uma corrente, sucedem dois fenómenos:

- A bobina, solidária com o cone, é actuada por uma força proporcional à corrente;
- Ao deslocar-se no campo magnético, a bobina induz uma tensão proporcional à velocidade $\dot{x}$ que se opõe à tensão v_a.

Escreva as equações que modelam este sistema.

P18. *Modelação de Sistemas Conservativos com a equação de Lagrange*.

Considere o sistema mecânico conservativo que se mostra na figura seguinte, em que as massas deslizam sem atrito na superfície horizontal.

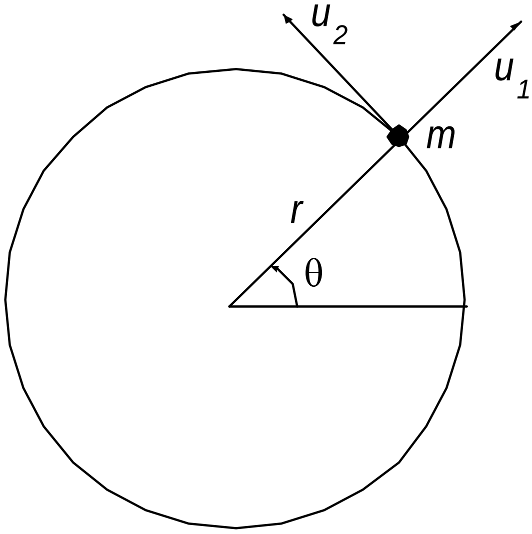


Escreva um sistema de equações diferenciais para modelar o sistema recorrendo à equação de Lagrange.

Sugestão: Faça modificações convenientes no exemplo com uma única massa, apresentado nos acetatos.

P19*. *Modelação de Sistemas Conservativos com a equação de Lagrange*.

Considere um satélite de massa m que se desloca num campo de forças de gravidade que varia com $-k/r^2$, tal como se mostra na fugura seguinte.



O satélite está equipado com actuadores que lhe permitem exercer forças radialmente, segundo u_1, e tangencialmente, segundo u_2,

A energia cinética é

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}_2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right)$$

A energia potencial é

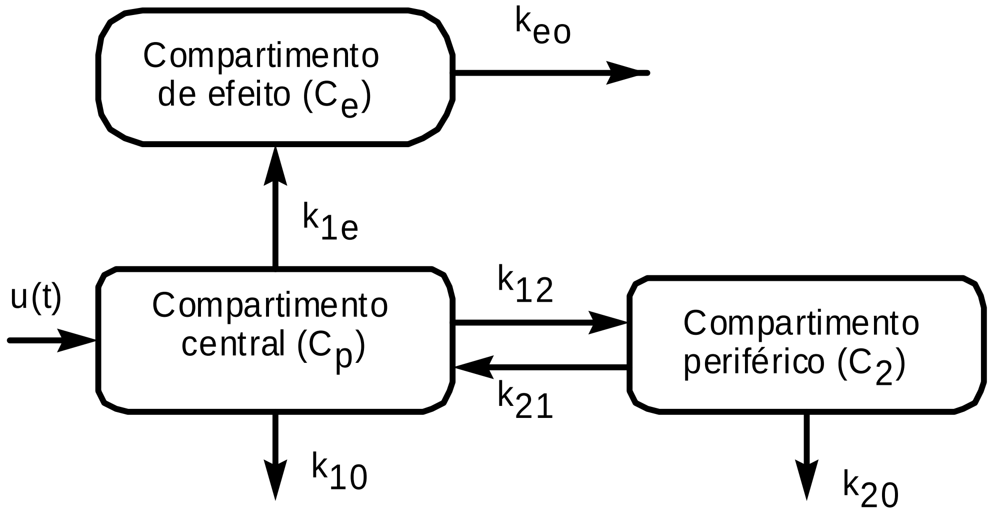
$$V = -\frac{k}{r}$$

Tome como coordenadas generalizadas $q_1 = r,\ q_2 = \theta$. Repare que a equação de Euler-Lagrange se desdobra em duas equações.

a) Escreva estas duas equações e resolva-as em ordem a $\ddot{r}$ e $\ddot{\theta}$.

b) Escreva um modelo de estado para o movimento do satélite.

P20. Os modelos farmacocinéticos/farmacodinâmicos relacionam as doses de um dado fármaco com a concentração plasmática (modelo farmacocinético) e com a concentração de efeito e o efeito (modelo farmacodinâmico e são muitas vezes representados por modelos compartimentais lineares em série com uma não linearidade estática (equação de Hill). A figura representa o modelo compartimental da infusão intravenosa do atracurio, um fármaco para induzir o bloqueio neuromuscular durante a anestesia geral.



Este modelo consta de 3 compartimentos: Na parte farmacocinética, o compartimento central, associado ao sistema cardiovascular e o compartimento periférico associado à gordura. Na parte farmacodinâmica, o compartimemnto de efeito. A concentração do cempartimento central é a concentração no plasma sanguíneo, c_p. A dose de fármaco administrada por unidade de tempo, $u(t)$, entra directamente no compartimento central dado que p fármaco é administrado por via intravenosa.

a) Escreva as equações que representam o modelo compartimental, tomando como variáveis de estado as concentrações nos 3 compartimentos.

b) Determine a função de transferência que relaciona a dose de fármaco administrada por unidade de tempo ($u(t)$) com a concentração de efeito.

P21. Um termómetro de vidro cheio de mercúrio estabilizou-se na tempertaura T_0 e é mergulhado no instante t_0 num líquido à temperatura constante T_L. Supõe-se que:

- A massa do termómetro é tão pequena que não perturba a temperatura do líquido.
- A resistência térmica entre o líquido e o vidro é de R_1 e a resistência térmica entre o vidro e o mercúrio é de R_2.
- A constante de capacidade térmica do vidro é C_V e a do mercúrio C_m.

Modele a evoluçºão das temperaturas do vidro e do mercúrio através de um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem.