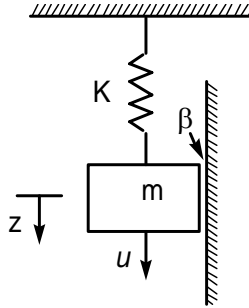


## Modelação e Simulação

### Problemas - 3

**P1.** Considere o sistema mecânico de translação esquematizado na figura seguinte

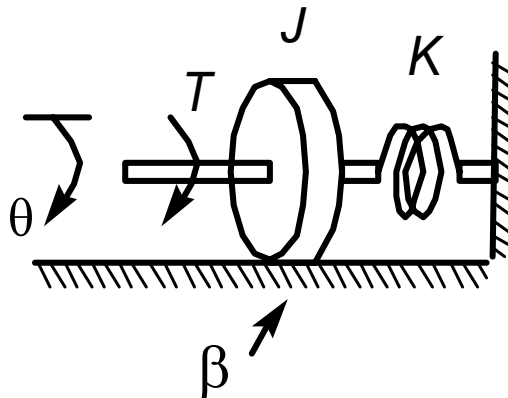


Assume-se que a força  $u$  indicada na figura é o remanescente de uma força que equilibra o peso.

- Escreva a lei de Newton para o movimento da massa.
- Escreva as que equações do modelo de estado do sistema, tomando como saída a posição da massa, e como variáveis de estado a posição e a velocidade da massa.
- Aplicando a transformada de Laplace com condições iniciais nulas, determine a função de transferência.
- Suponha que  $K/m = 1$ . Considere as situações  $\beta = 0$  e  $\beta \neq 0$ . Para cada uma delas, determine o valor dos pólos e marque a sua posição no plano complexo. Discuta face à sua intuição sobre o funcionamento do sistema.



**P2.** Este problema é muito semelhante ao anterior. A diferença é considerar uma massa em rotação. Considere o sistema mecânico de rotação esquematizado na figura seguinte

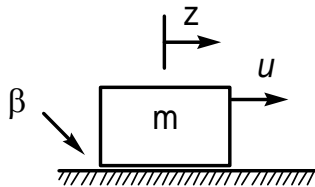


- Escreva a lei de Newton para o movimento da massa em rotação.

- b) Escreva as que equações do modelo de estado do sistema, tomando como saída a posição angular da massa, e como variáveis de estado a posição e a velocidade angulares da massa.
- c) Aplicando a transformada de Laplace com condições iniciais nulas, determine a função de transferência.
- d) Suponha que  $K/J = 1$ . Considere as situações  $\beta = 0$  e  $\beta \neq 0$ . Para cada uma delas, determine o valor dos pólos e marque a sua posição no plano complexo. Discuta face à sua intuição sobre o funcionamento do sistema.



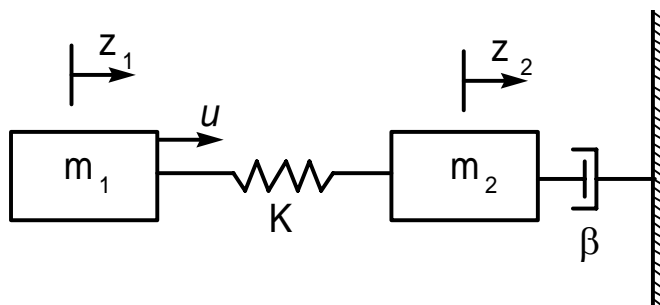
**P3.** Considere o sistema mecânico de translação da figura seguinte, em que  $u$  é uma força que actua sobre a massa.



- a) Por aplicação da lei de Newton, escreva uma equação diferencial que modele o movimento da massa.
- b) Tomando como variáveis a posição e a velocidade da massa, como entrada a força aplicada e como saída a posição, escreva as equações do modelo de estado na forma matricial.
- c) Determine a função de transferência que relaciona a força aplicada com a posição da massa.
- d) Suponha que a massa está inicialmente em repouso. Com base na função de transferência obtida na alínea anterior, esboce qualitativamente a evolução temporal da velocidade, supondo que a força tem uma evolução em escalão.



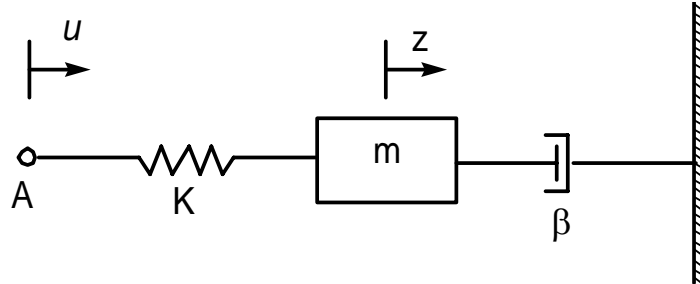
**P4.** Considere o sistema mecânico de translação da figura seguinte:



- a) Utilizando a lei de Newton, escreva uma equação diferencial que modele o sistema.

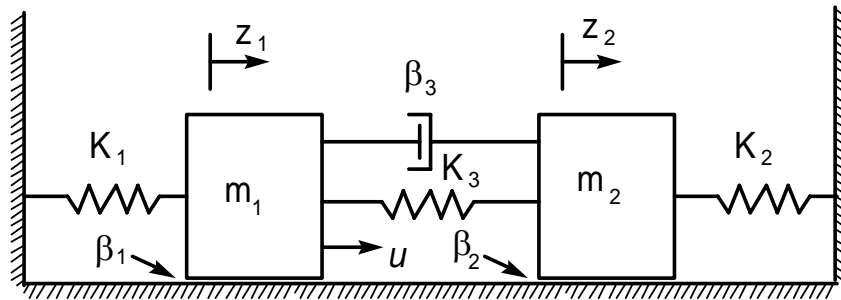
b) Tomando como entrada a força  $u$ , saída a posição  $z_2$  e estado as posições e velocidades das duas massas, escreva um modelo de estado para o sistema.

**P5.** Considere o sistema mecânico de translação da figura seguinte:



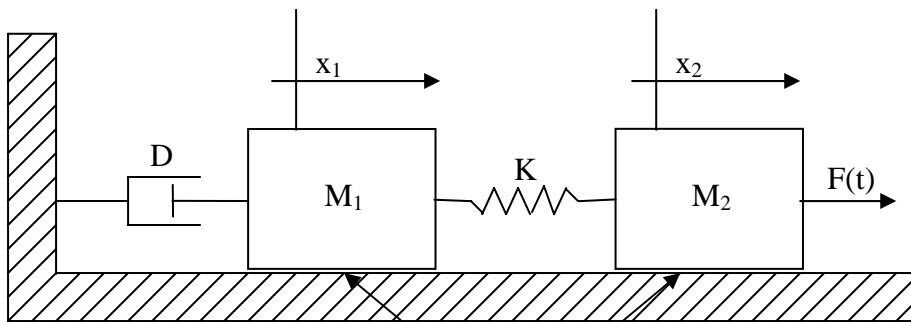
Deduz a função de transferência que relaciona a posição do ponto A com a posição da massa no referencial  $z$ . Note que  $u$  é uma posição e não uma força.

**P6.** Considere o seguinte sistema mecânico de translação:



Por aplicação da Lei de Newton, escreva as equações diferenciais que modelam o sistema. Obtenha a seguir um modelo de estado.

**P7.** Recorrendo à lei de Newton, determine uma representação na forma de modelo de estado para o sistema massa/mola/atrito representado na figura. Considere como entrada a força  $F(t)$  e como saída a posição  $x_2$  da massa  $M_2$ .



Não existe fricção



## P8. Modelo matemático da suspensão activa de um automóvel<sup>1</sup>

A aplicação de sistemas de controlo em veículos automóveis tem vindo a ser crescente em veículos quer de protótipo, quer comerciais. Isto é possível devido ao aumento da potência de cálculo e da memória instaladas nos computadores de bordo de veículos, e que permite a utilização de algoritmos cada vez mais potentes. Desenvolvem-se assim sistemas sofisticados em que o Controlo, a Electrónica e a Mecânica concorrem para atingir os objectivos. A palavra “Mecatrónica” foi criada para designar esta nova área interdisciplinar.

Um automóvel é um sistema complexo dado que possui várias massas interligadas por elementos elásticos não lineares e dissipativos, o que origina um modelo de estado com ordem elevada. Assim, os modelos mais completos têm em consideração as quatro rodas (com os respectivos subsistemas) e são utilizados para estudar as forças laterais e longitudinais que actuam sobre a viatura e o seu efeito nela.

Em certas situações é possível considerar modelos simplificados, reduzindo assim, quer a carga computacional, quer o esforço de projecto. Por exemplo, se a preocupação forem apenas as oscilações verticais a que está sujeito o passageiro, uma possibilidade frequentemente explorada é o chamado *modelo de 1/4 de automovel*.

Este modelo é assim denominado por considerar que uma viatura pode ser modelada por uma roda, uma massa não suspensa (eixo) e uma massa suspensa (chassis). Assume-se que a dinâmica de uma roda é igual à das restantes 3 e que a ligação entre elas é desprezável. Existem mesmo modelos físicos que permitem testar experimentalmente o modelo de 1/4 de automóvel (fig. P8-1).

---

<sup>1</sup> Este problema é baseado no Trabalho Final de Curso da LEEC de Miguel Louro *Bancada de ensaios e sistema de controlo para suspensão activa electromagnética*, orientado pelo prof. Jorge Esteves e concluído em 2000.

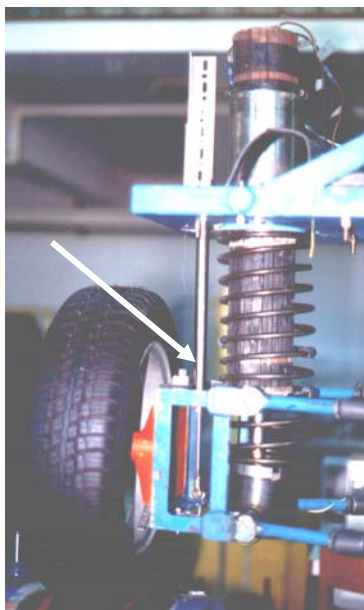


Fig. P8-1 – Bancada de testes de um modelo de ¼ de automóvel.  
A seta indica a colocação de um acelerómetro.

A fig. P8-2 representa esquematicamente o modelo de ¼ de automóvel.

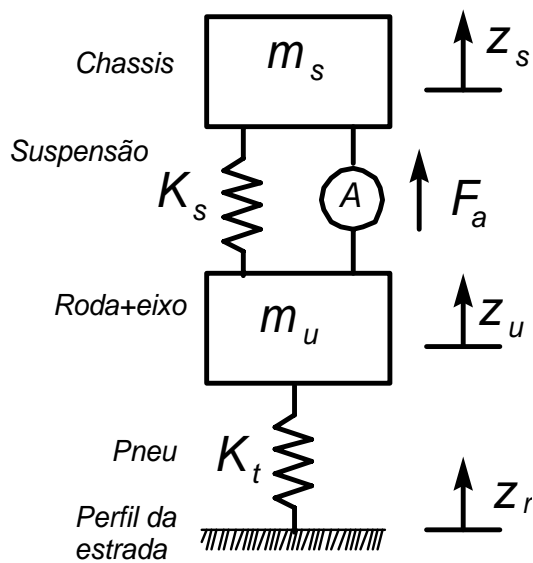


Fig. 2-2 – Modelo de ¼ de automóvel.

Neste modelo:

- $z_s$  – Posição da massa suspensa
- $z_u$  – Posição da massa não suspensa
- $m_s$  – Massa suspensa (chassis)
- $K_s$  – Constante de elasticidade da mola

$m_u$  – Massa não suspensa (pneu, eixo)

$K_t$  – Constante de elasticidade do pneu

$z_r$  – Posição da estrada

$F_a$  – Força imposta pelo actuador

A suspensão é constituída por uma mola e um actuador. A mola tem como objectivo reduzir a força feita pelo actuador. Em regime permanente (quando não há oscilações) o peso da massa suspensa é suportado pela mola e a força que o actuador tem de fazer é nula. O actuador é iuma máquina linear de ímans permanentes, que tem por objectivo aplicar uma força para contrariar as perturbações causadas pelo perfil da estrada quando este varia.

A tabela P8-1 dá valores típicos para os valores dos parâmetros do sistema.

$m_s$	$K_s$	$m_u$	$K_t$	$(F_a)_{máx}$
290 Kg	16812 Nm <sup>-1</sup>	59 Kg	190000 Nm <sup>-1</sup>	1000 N

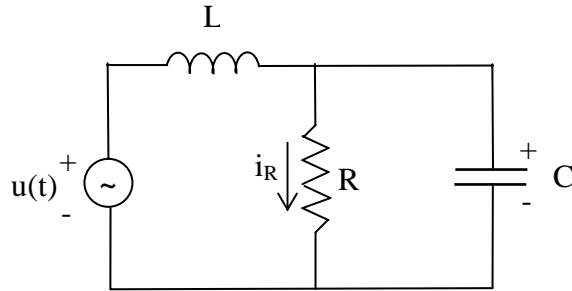
Tabela P8-1 – Parâmetros típicos do modelo de ¼ de automóvel.

Pretende-se o seguinte:

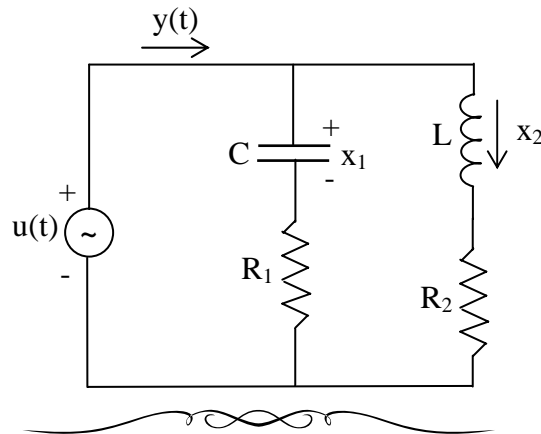
- Utilizando a lei de Newton, escreva as equações diferenciais que modelam o sistema da figura 2-2.
- Obtenha um modelo de estado, tomando como variáveis de estado as posições e velocidades das massas, como entrada o perfil da estrada e como saída a posição do chassis.
- Obtenha a função de transferência (use o MATLAB). Trace o respectivo diagrama de resposta em frequência e o mapa de pólos e zeros (use o MATLAB).



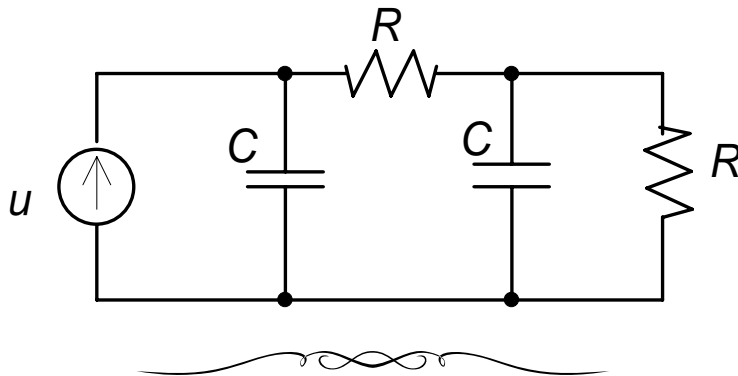
**P9.** Considere o circuito representado na figura, onde a tensão  $u(t)$  é a entrada e a corrente na resistência  $y(t)$  a saída. Determine uma representação em espaço de estados.



**P10.** Considere o circuito representado na figura, onde a tensão  $u(t)$  é entrada e a corrente  $y(t)$  a saída. Determine uma representação em espaço de estados.



**P11.** (Construção do modelo de estado a partir de equações fundamentais da Física, Química, etc.) Obtenha as equações do modelo de estado linear do circuito da figura seguinte. Tome como variáveis de estado as tensões nos dois condensadores e como variável de saída a tensão aos terminais da resistência da direita.



**P12.** Três espécies químicas  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  estão presentes reacção com constantes de taxa de reacção constantes  $K_{ij}$ , *i.e.*,  $S_i$  transforma-se em  $S_j$  à taxa  $K_{ij}x_i$ , em que  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são as concentrações das espécies. Escreva as equações de estado deste sistema na forma matricial.

