Modelação e Simulação

Problemas - 4

P1. Para cada uma das funções de transferência seguintes esboce qualitativamente a resposta no tempo ao escalão unitário usando (sempre que aplicável) informações sobre: Ganho estático, valor inicial e final da resposta e da sua derivada e posição dos pólos e zeros.

a) $G_1(s) = \dfrac{4}{s+2}$ b) $G_2(s) = \dfrac{-4}{s+2}$ c) $G_3(s) = \dfrac{4}{(s+2)^2}$ d) $G_4(s) = \dfrac{s}{s+2}$

e) $G_5(s) = \dfrac{1-s}{(s+2)(s+5)}$ f) $G_6(s) = \dfrac{1+s}{(s+2)(s+5)}$

P2. Considere o sistema linear e invariante no tempo descrito pela seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{3}{s^2 + 3s - 3}$$

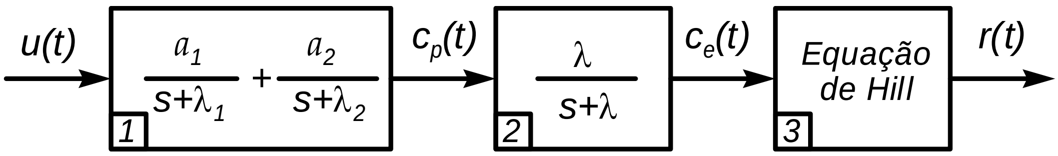
a) Determine o ganho desta função de transferência à frequência nula.
b) Qual o valor final da resposta ao escalão deste sistema.

Atenção: Determine os pólos do sistema.

P3. O bloqueio neuromuscular é uma das componnetes da anestesia geral, que visa privar o paciente, sujeito a uma cirurgia, de movimentos voluntários ou reflexos. Para tal, é injectada no paciente, ao longo do tempo, uma dose de fármaco que tem como efeito bloquear a junção neuromuscular. Deste modo, os sinais de comando dos nervos não se transmitem aos músculos o que impede que estes se mexam.

Um dos problemas que se põe ao anestesista é o de determinar a dose de fármaco para atingir o nível de bloqueio neuromuscular desejado. A partir dos anos 80, foram desenvolvidas várias técnicas, conhecidas genericamente como TCI (do Inglês *Target Control Infusion*) para fazer este cálculo automaticamente, algumas das quais estão disponíveis comercialmente (o primeiro recebeu o nome comercial de *Diprifusor*). Este problema mostra como calcular a dose a partir do inverso do ganho estático do modelo do bloqueio neuromuscular. É apenas uma parte da questão. A outra, tão ou mais importante, consiste em estimar os parâmetros do modelo.

A figura seguinte mostra um diagrama de blocos do modelo que relaciona a dose de fármaco $u(t)$ (expresso em $\left[\mu\, g\, kg^{-1} \min^{-1}\right]$) administrada com o nível de bloqueio neuromuscular $r(t)$ (expresso em percentagem, com $r(t) = 100\%$ coirreespondendo a uma actividade muscular normal e $r(t) = 0\%$ correspondendo à paralisia total).



Este modelo consiste numa parte linear dinâmica (blocos 1 e 2), que permite calcular as concentrações plasmática, $C_p(t)$, e de efeito, $C_e(t)$, e numa parte não linear estática descrita pela equação de Hill. Esta, permite calcularo nível de bloqueio neuromuscular $r(t)$ em função da concentração de efeito $C_e(t)$ através da expressão algébrica:

$$r(t) = \frac{100\, C_{50}^{\gamma}}{C_{50}^{\gamma} + C_e^{\gamma}(t)}$$

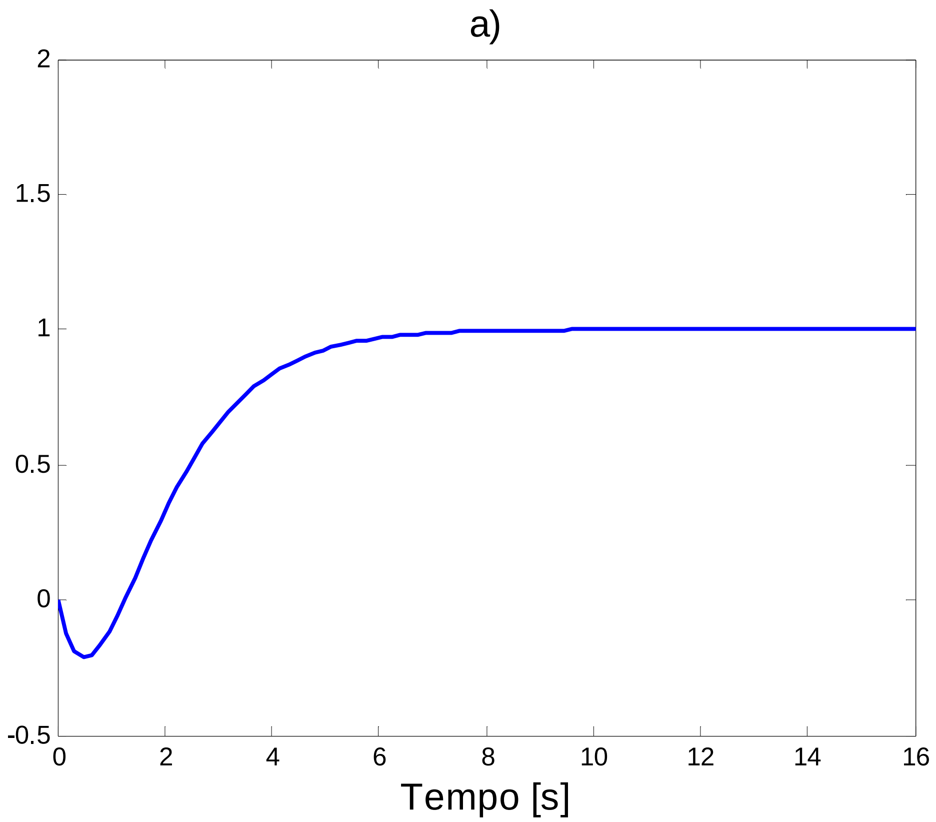
em que C_{50} e γ sãop constantes que dependem de paciente para paciente.

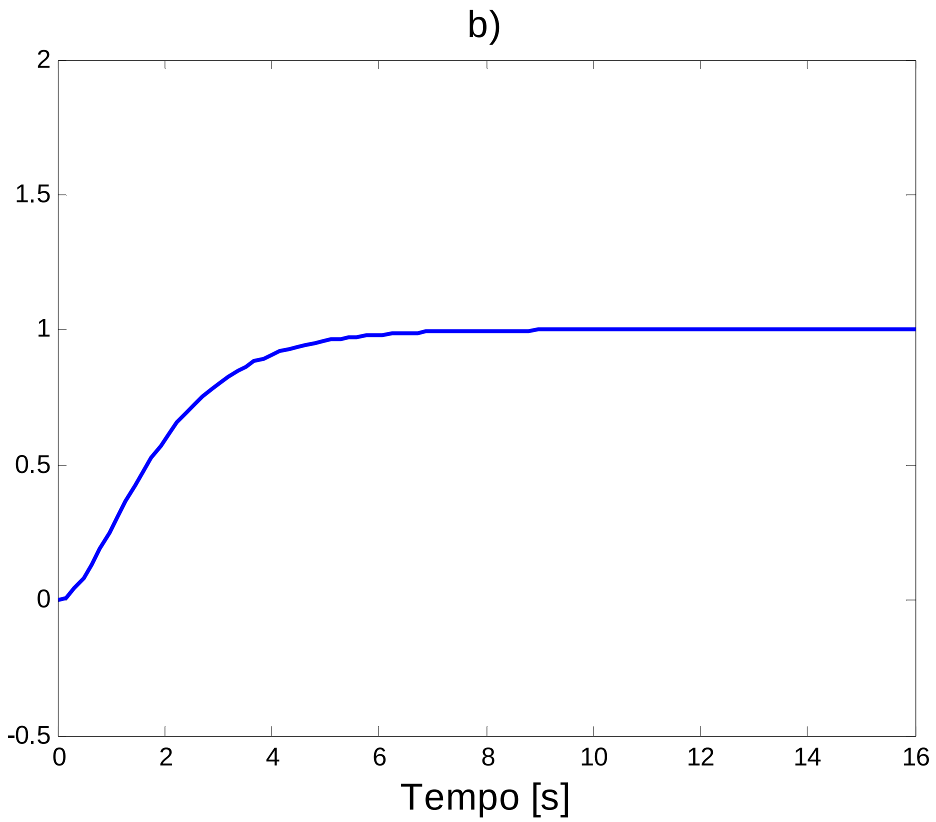
a) Mostre que C_{50} é o valor da concentração de efito $C_e(t)$ que faz com que o nível de bloqueio neuromuscular $r(t)$ seja de 50%.

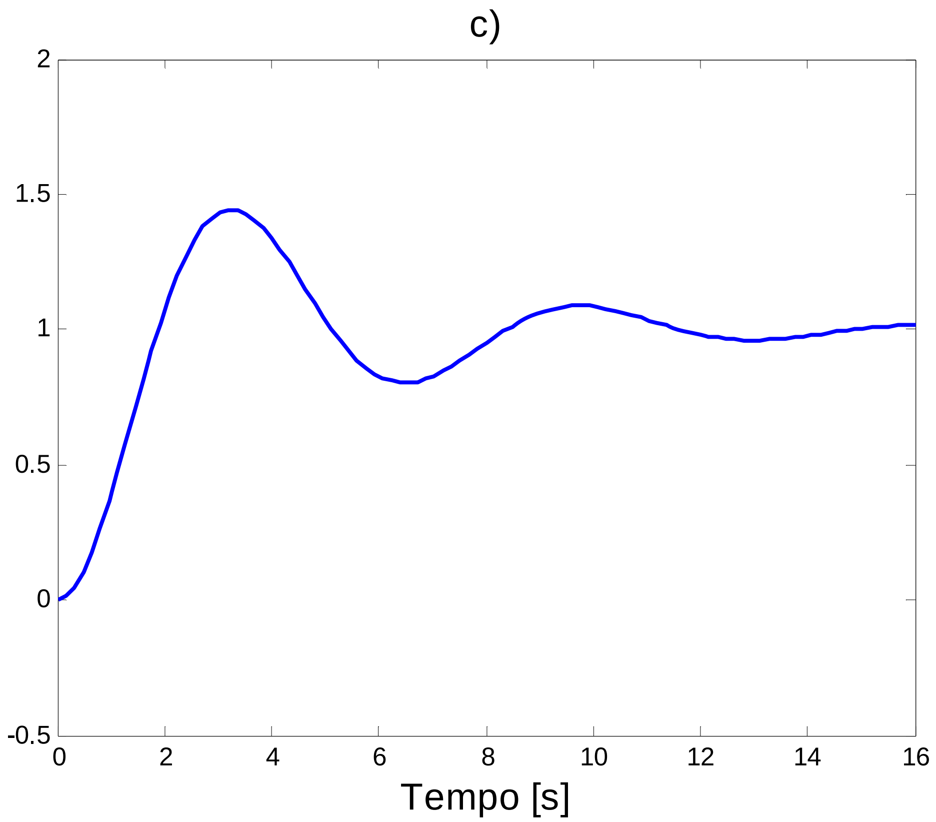
b) Tendo em conta o modelo da figura, determine um valor para a dose $u(t)$ tal que, se esta for mantida constante neste valor, $r(t)$ se aproxima de um valor de equilíbrio especificado. A dose deve ser expressa nos parâmetros do modelo e no nível de $r(t)$ desejado. Por outras palavras, pretende-se o inverso do ganho estático do sistema. Repare no entanto que este tem uma parte não linear.

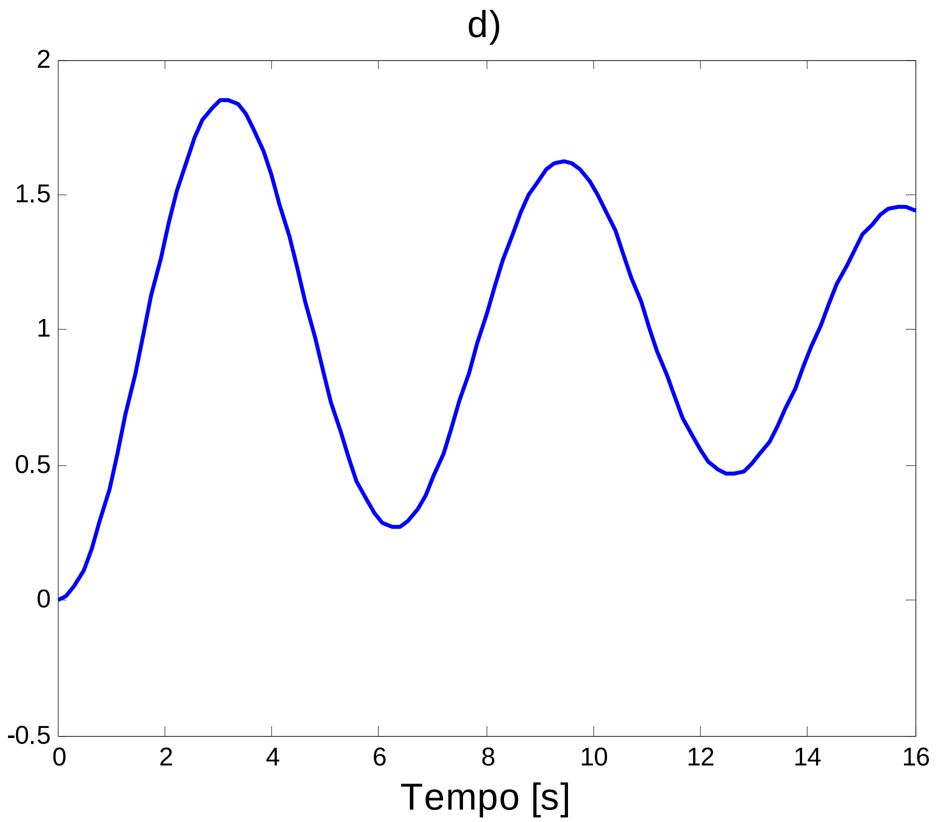
P4. Considere os gráficos de resposta ao escalão unirário que se mostram nas figuras seguintes e as funções de transferência de sistemas de 2ª ordem que se indicam a seguir aos gráficos. Indique a que função de transferência corresponde cada gráfico.

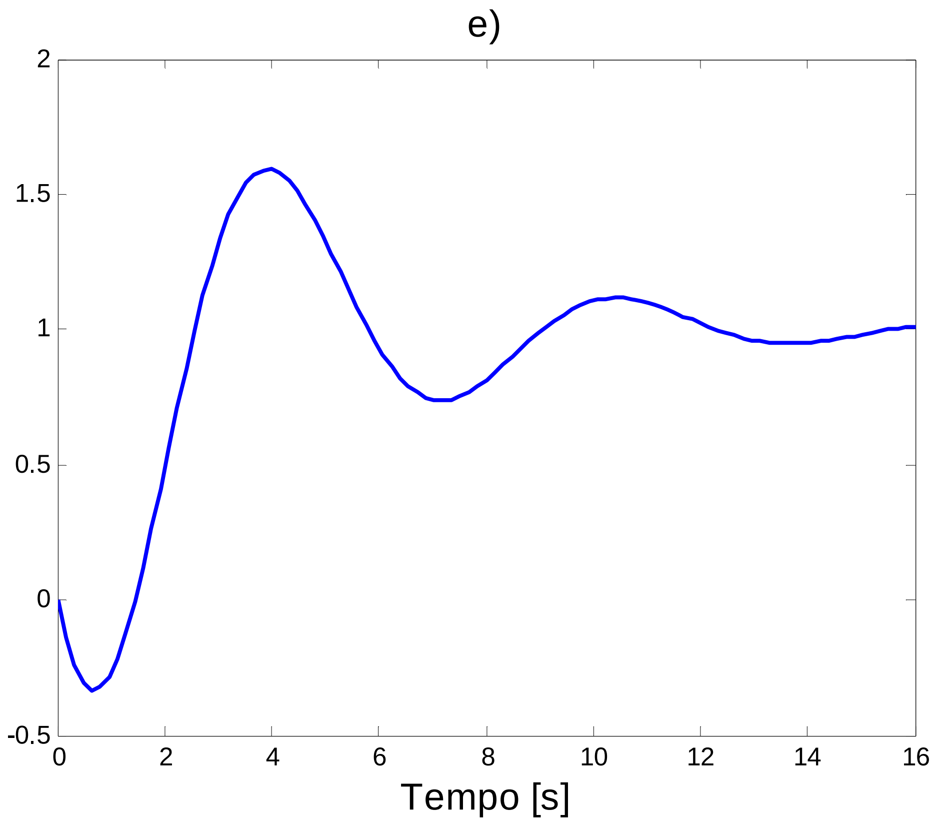
Sugestão: Determine ς e ω_n em cada caso e tenha em atenção a existência de zeros.

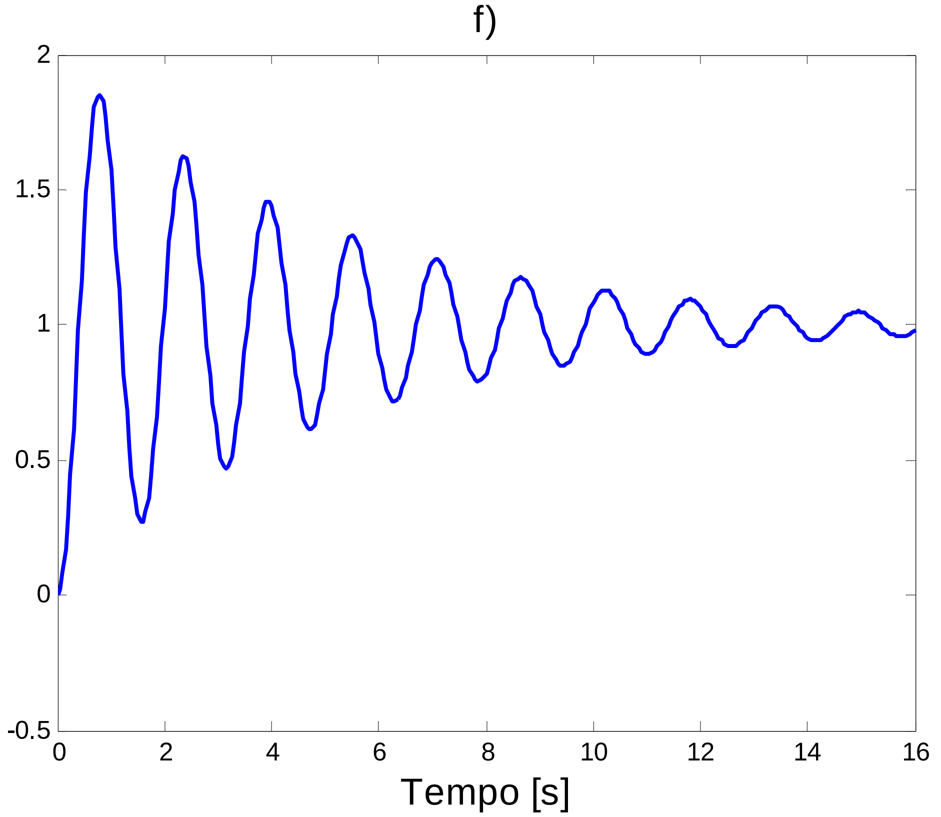

a)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0 2 4 6 8 10 12 14 16
Tempo [s]

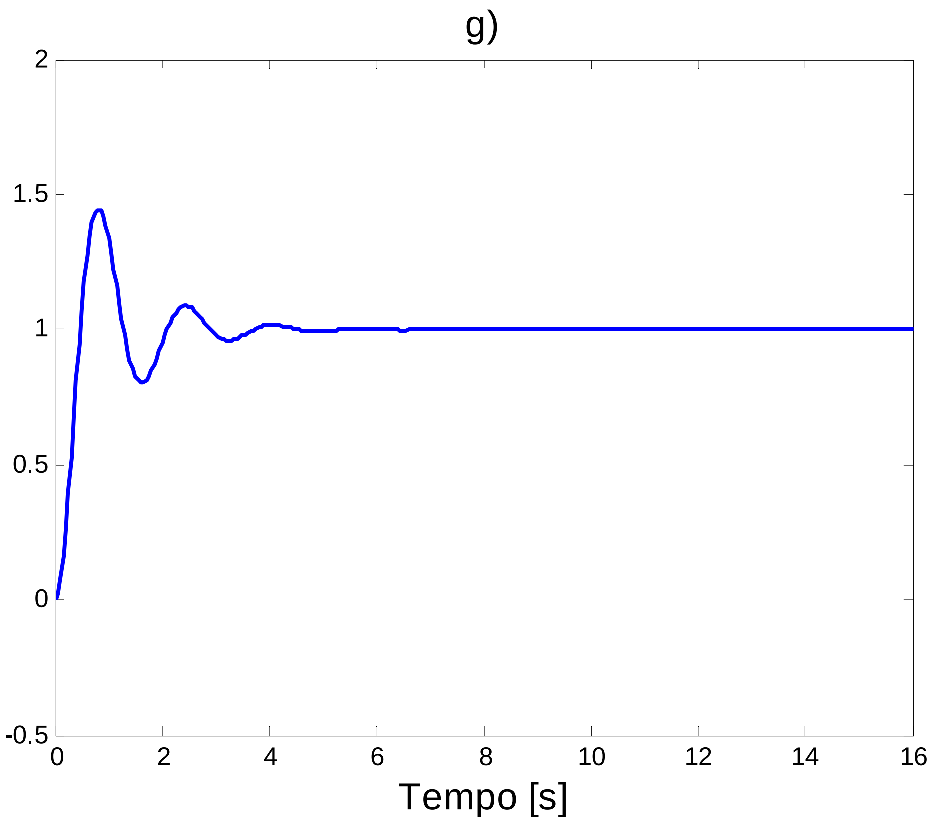

b)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0 2 4 6 8 10 12 14 16
Tempo [s]

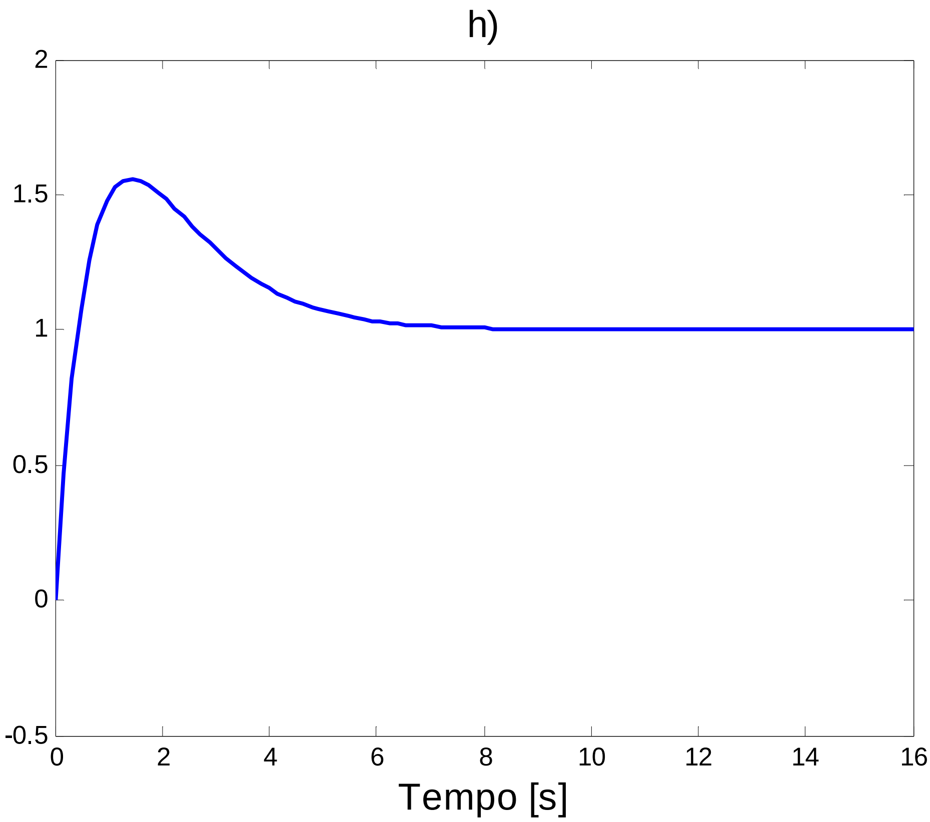

c)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
Tempo [s]


d)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
Tempo [s]


e)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0 2 4 6 8 10 12 14 16
Tempo [s]


f)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0 2 4 6 8 10 12 14 16
Tempo [s]



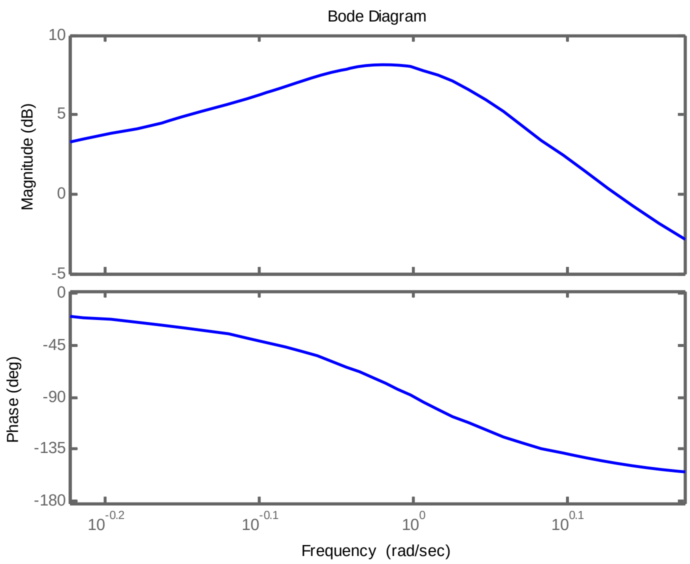


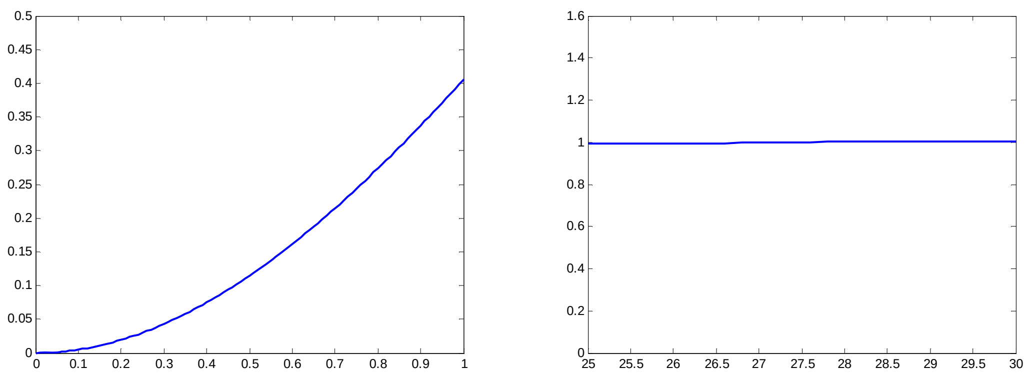
$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 0.1s + 1} \qquad G_2(s) = \frac{16}{s^2 + 2s + 16} \qquad G_3(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}$$

$$G_4(s) = \frac{-s+1}{s^2+2s+1} \qquad G_5(s) = \frac{16}{s^2+0.4s+16} \qquad G_6(s) = \frac{3.3333s+1}{s^2+2s+1}$$

$$G_7(s) = \frac{1}{s^2+2s+1} \qquad G_8(s) = \frac{-s+1}{s^2+0.5s+1}$$

P5. As figiuras seguintes representam a resposta em frequência numa banda de frequências significativas e dois pedaços da resposta no tempo ao escalão, partindo de condições iniciais nulas, (respectivamente no início e perto do fim do ensaio) de uma função de transferência.





Diga justificadamente a que função de transferência, de entre as hipóteses seguintes, pertencem estes troços de resposta.

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2+0.4s+2} \qquad G_2(s) = \frac{1}{s^2+0.4s+1} \qquad G_3(s) = \frac{3}{s^2+0.4s+1}$$

$$G_4(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \qquad G_5(s) = \frac{s+1}{s^2 + 0.4s + 1}$$

P6. Considere o sistema autónomo (sem entrada), descrito pela equação de estado homogénea

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} -2.5 & 0.5 \\ 0.5 & -2.5 \end{bmatrix}$$

a) Recorrendo à decomposição modal, escreva a solução desta equação de estado quando a condição inicial é

$$x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Resolva a mesma equação qundo a condição inicial é

$$x(5) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

P7. Considere o sistema autónomo (sem entrada), descrito pela equação de estado homogénea

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} -1.25 & 0.75 \\ 2.25 & 0.25 \end{bmatrix}$$

a) Indique uma condição inicial tal que o estado tenda para zero.
b) Indique uma condição inicial tal que o estado seja uma única exponencial crescente.
c) Esboce o retrato de fase.

P8. Considere os modelo de estado homogéneos, cujas matrizes da dinâmica são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para cada um deles, escreva a solução da equação de estado com condições iniciais dadas por

$$x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

P9. Considere o sistema linear e invariante de 2ª ordem, descrito pela equação

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Responda sucessivamente às seguintes perguntas:

a) Calcule os valores próprios e os vectores próprios da matriz A.

b) Com base nos valores próprios e nos vectores próprios escreva a solução da equação diferencial quando a condição inicial é $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -0.5 \end{bmatrix}$

c) Indique uma condição inicial tal que o estado do sistema tenda para zero quando o tempo $t \to \infty$.

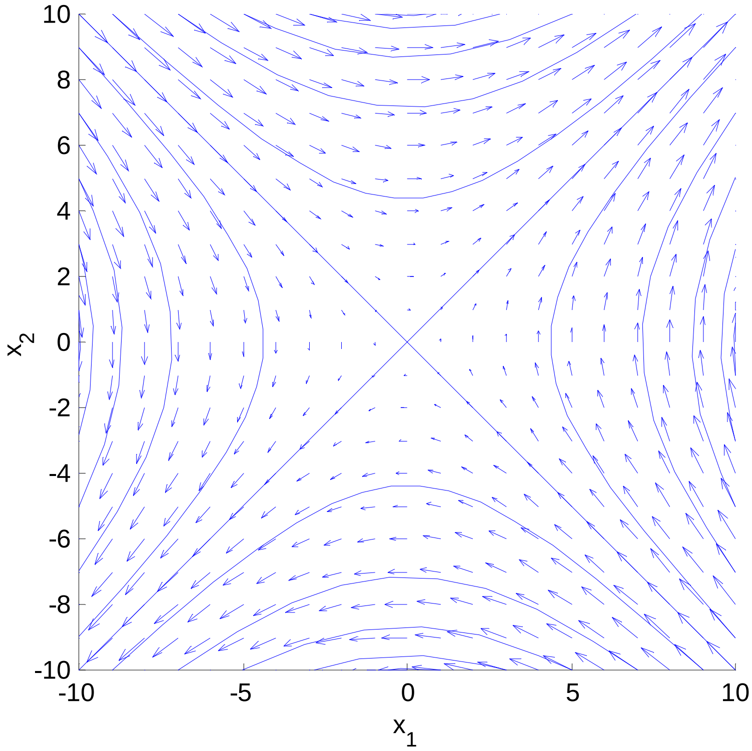
d) Esboce graficamente o retrato de fase do sistema representado pela equação diferencial.

P10. Considere as figuras seguintes, que correspondem a trajectórias no espaço de estado de 4 sistemas lineares de 2ª ordem, diferentes, com equação

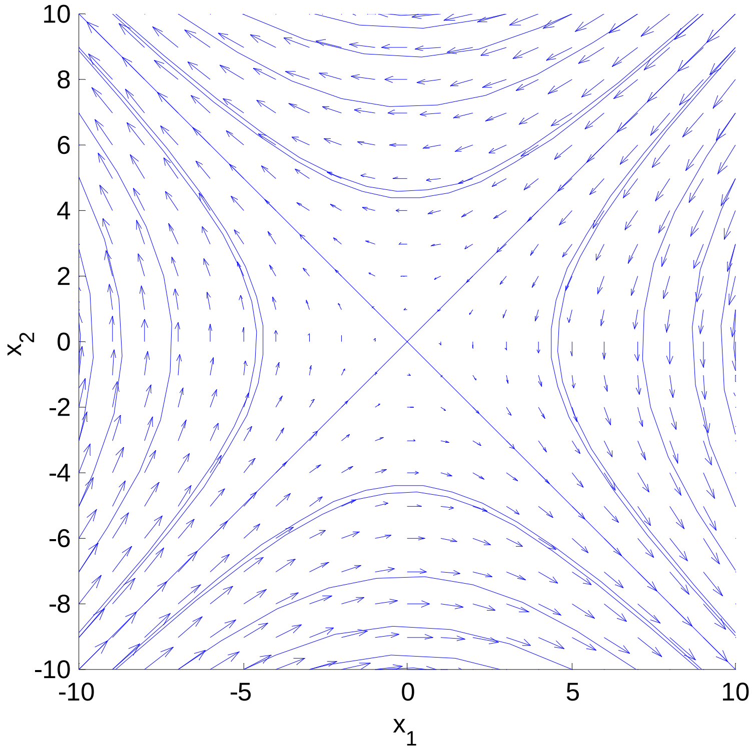
$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

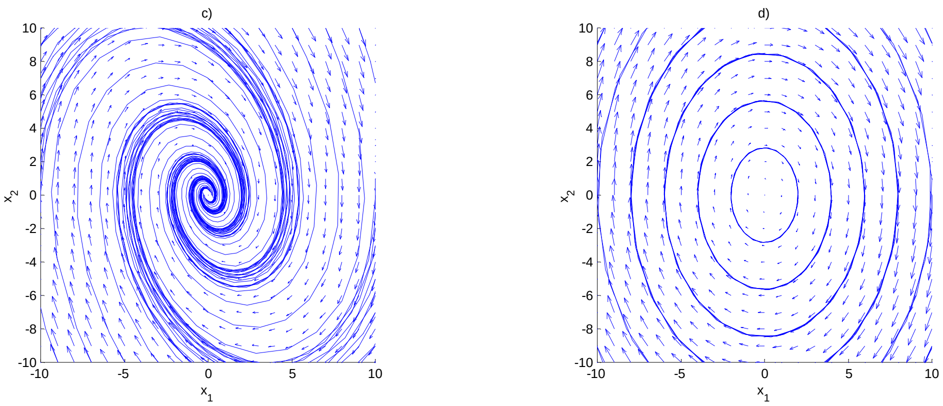
Estes retratos de fase estão identificados de *a)* a *d)* no topo de cada figura.

a)

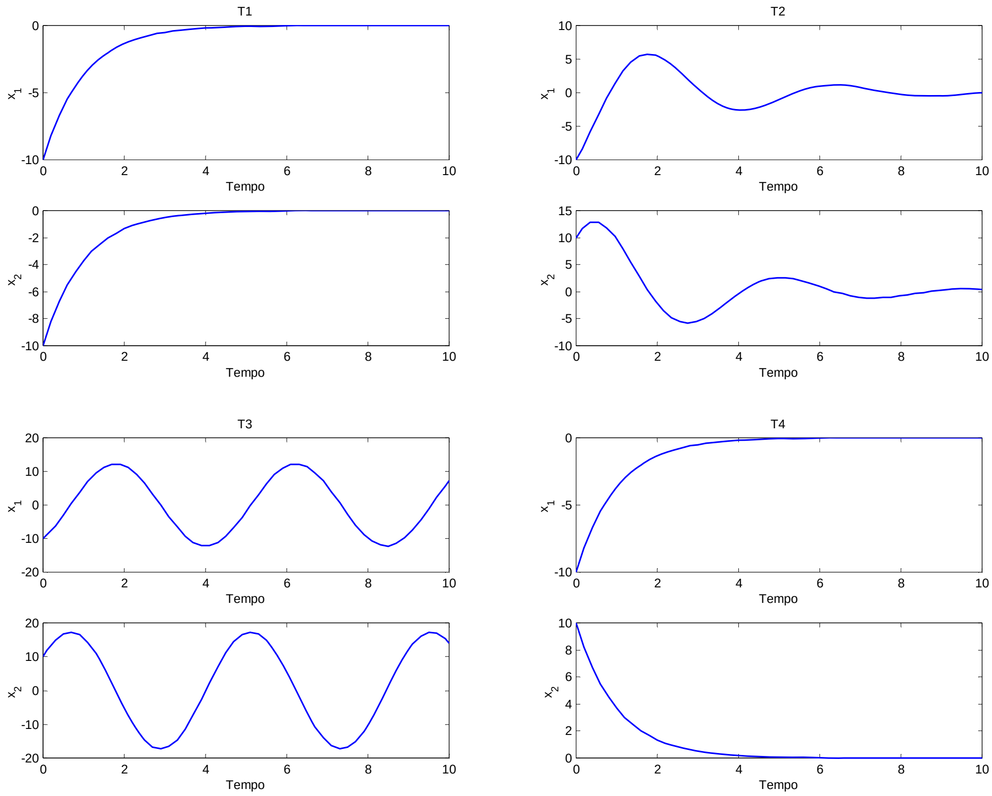


b)





Considere ainda as respostas temporais das duas components do estado partindo de uma dada condição inicial (que pode variar de figura para figura).



Finalmente, considere as seguintes matrizes da dinâmica

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.7 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

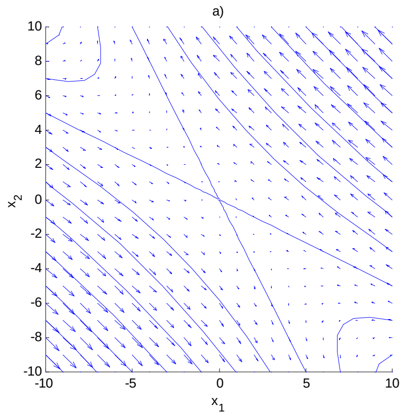
a) Diga qual das matrizes corresponde a qual retrato de fase. Deve justificar a sua resposta com base nos valores próprios e vectores próprios (calcule os vectores próprios apenas quando necessário). Pode ainda utilizar outros argumentos se a resposta baseada nos valores próprios e vectores próprios não fôr suficiente.

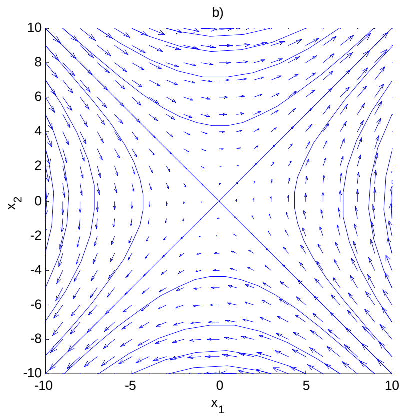
b) Diga qual das respostas temporais corresponde a qual retrato de fase. Justifique.

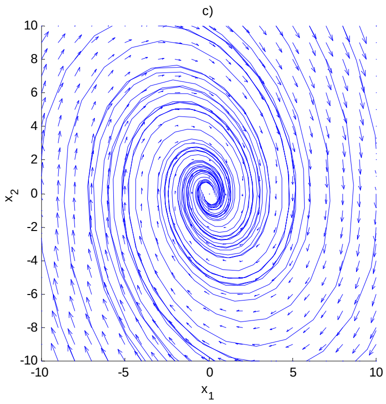
P11. Considere as figuras seguintes, que correspondem a trajectórias no espaço de estado de 4 sistemas lineares de 2ª ordem, diferentes, com equação

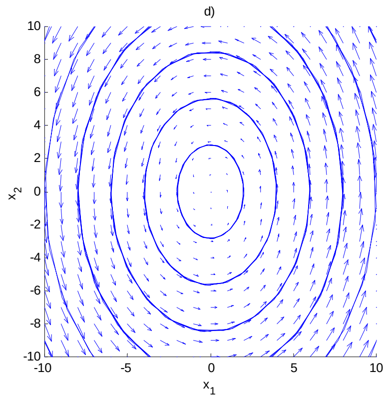
$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

Estes retratos de fase estão identificados de *a)* a *d)* no topo de cada figura.









Considere ainda as seguintes matrizes da dinâmica

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5/3 & -4/3 \\ 4/3 & 5/3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.6 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Diga qual das matrizes corresponde a qual retrato de fase. Deve justificar a sua resposta com base nos valores próprios e vectores próprios (calcule os vectores próprios apenas quando necessário).

b) Calcule a resposta $x(t)$ quando a matriz da dinâmica é a matriz A_3 do problema anterior, e a condição inicial é $x_1(0) = 1 \quad x_2(0) = 0$.

c) Indique uma condição incial não nula tal que o estado do sistema com matriz da dinâmica A_4 tenda para zero quando o tempo aumenta.

Soluções

P4- 1-d, 2-g, 3-c, 4-a, 5-f, 6-h, 7-b, 8-e.

P5- 2.