Modelação e Simulação

Problemas - 5

P1. A Teoria do Conflito de L. F. Richardson

Bibliografia: Braun, M. (1978). *Differential Equations and Their Applications*, Springer-Verlag, 374-381.

A praça Plekszy-Gladz em Szohôd, capital da Bordúria

A Sildávia e a Bordúria são dois países dos Balcãs que, embora pouco conhecidos da generalidade dos portugueses, estão ligados a um capítulo notável da história da tecnologia. Com efeito, foi da Sildávia que partiu o primeiro foguete que levou à Lua, e trouxe sãos e salvos de regresso, os primeiros seres humanos e um cão. Embora partilhem muitos traços comuns da sua cultura, em particular na alimentação, a história nem sempre registou relações pacíficas entre estes dois estados vizinhos. São estas relações, potencialmente conflituosas, que se pretendem analisar neste problema através de uma teoria devida a L. F. Richardson (que, tal como eu, nunca conheceu pessoalmente Plekszy-Gladz).

Sejam x_1 e x_2, respectivamente, a quantidade de armamento da Sildávia e da Bordúria. Richardson admitiu que a sua evolução no tempo se faz de acordo com o modelo:

$$\frac{dx_1}{dt} = kx_2 - \alpha x_1 + g$$

em que kx_2 é o termo que traduz o medo do adversário (quanto mais armado estiver, mais "nós" nos vamos armar para nos defendermos), αx_1 é um termo que traduz uma redução da taxa de crescimento do armamento devido ao custo e g traduz o aumento da taxa de armamento pelas "questões mal resolvidas do passado". Analogamente, a taxa de crescimento da Bordúria satisfaz:

$$\frac{dx_2}{dt} = lx_1 - \beta x_2 + h$$

a) Determine o ponto de equilíbrio do nível de armamentos;

b) Considere a situação em que os termos de "defesa" predominam, tendo-se

$$\frac{dx_1}{dt} = kx_2 \qquad \frac{dx_2}{dt} = lx_1$$

Determine as soluções deste sistema de equações diferenciais e conclua o que acontece a longo prazo

c) Dê condições para a a instabilidade do ponto de equilíbrio no caso geral. Intreprete.

[1]

P2. Os modelos de combate de Lanchester

Bibliografia: Braun, M. (1978). *Differential Equations and Their Applications*, Springer-Verlag, 381-390.

Durante as Guerras do Alecrim e Manjerona, a Brutópia enfrentou a República da Bananuela numa série de combates entre forças convencionais. A evolução do número de combatentes foi predita com notável precisão pelo modelo de Lanchester, depois aplicado na batalha de Iwo Jima, ocorrida na 2ª Guerra Mundial. Seja x_1 o número de combatentes da Brutópia e x_2 o número de combatentes da República da Bananuela. Num combate entre forças convencionais, admite-se que cada um dos elementos de cada uma das forças de combate está ao alcance da força inimiga. Quando um dos elementos é morto, o fogo é concentrado nos combatentes remanescentes. Deste modo, admite-se que a taxa de perdas de x_1 é igual a ax_2 para uma cosntante a. Se não houver reforços durante a batalha, o número de combatentes é então modelado por:

[1] Estes separadores foram inspirados pelos célebres bigodes de Plekszy-Gladz.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -ax_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -bx_1 \end{cases}$$

em que a e b são constantes. Considera-se que uma força de combate vence a batalha se se atingir uma situação em que o número de combatentes da força oponente é zero e o da sua própria diferente de zero.

Mostre que

i) Se $x_2(0) > \sqrt{\dfrac{b}{a}} x_1(0)$ então a força 2 ganha;

ii) Se $x_2(0) < \sqrt{\dfrac{b}{a}} x_1(0)$ então a força 1 ganha;

Isto mostra que, para ganhar, uma força tem de concentrar inicialmente combatentes em número suficientemente elevado.

P3. (*Construção do modelo estado linear por linearização em torno de um ponto de equilíbrio*) Considere o circuito eléctrico que se representa na fig. 1.

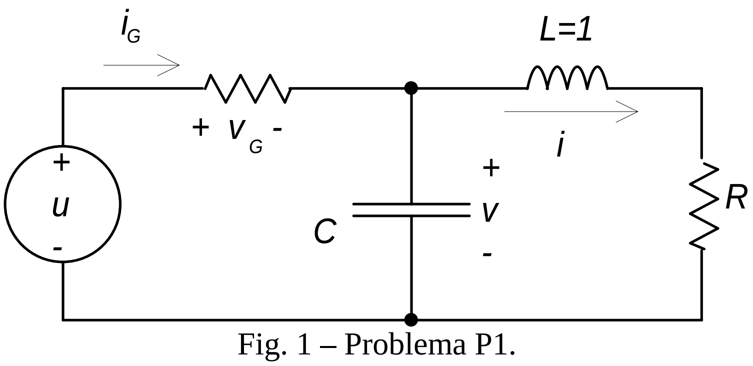

Fig. 1 – Problema P1.

A característica da condutância G é não linear, sendo definida por

$$i_G = g(v_G) = v_G(v_G - 1)(v_G - 4)$$

As equações de estado são

$$\frac{di}{dt} = -i + v$$

$$\frac{dv}{dt} = -i + g(u - v)$$

em que i e v são as variáveis de estado e u é a entrada.

a) Um dos estados de equilíbrio que ocorrem quando a entrada toma o valor constante $\bar{u} = 1$ é $\bar{i}_1 = \bar{v}_1 = 0$ (o índice refere-se ao "ponto de equilíbrio número

1”). Determine os outros dois pares de i e v que conduzem ao equilíbrio quando a entrada toma o mesmo valor.

b) Obtenha os modelos linearizados em torno dos três pontos de equilíbrio que determinou.

c) O que pode dizer sobre a estabilidade de cada um dos pontos de equilíbrio?

P4. Considere o modelo de estado não linear

$$\frac{dx_1}{dt} = (1 - x_1 - x_2)x_1$$
$$\frac{dx_2}{dt} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_2)x_2$$

a) Determine os pontos de equilíbrio (pense numa interpretação geométrica) e os sistemas linearizados em torno de cada um desses pontos.

b) Classifique em termos de estabilidade o sistema em torno dos pontos de equilíbrio. Desenhe qualitativamente o “retrato de fase” do sistema não linear a partir dos sistemas linearizados e dos sinais das derivadas.

P5. Foi recentemente descoberta na Melanésia uma ilha habitada apenas por duas novas espécies de herbívoros, a que foram dados os lindos nomes de Necs e Plaks. Após aturados estudos de uma competende equipa de biólogos concluiu-se que estas duas espécies competem entre si pelo alimento disponível, podendo o número médio dos seus efectivos ser modelado pelo sistema de equações diferenciais não lineares:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = N(1 - N - P) \\ \dfrac{dP}{dt} = P\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}P - \dfrac{3}{4}N\right) \end{cases}$$

em que N é o número de Necs e P é o número de Plaks. Estes números são normalizados pelo que, para obter os valores das populações é necessário multiplicá-los por 1000. Determine se é possível as duas espécies coexistirem a longo prazo.

Sugestão: Comece por mostrar que $N = 1/2$, $P = 1/2$ é um ponto de equilíbrio do sistema não linear e estude o que acontece às populações se este equilíbrio fôr ligeiramente perturbado.

P6. Considere o seguinte modelo para a competição entre duas espécies com efectivos N_1 e N_2 dado pelo sistema de equações diferenciais:

$$\frac{d}{dt}N_1(t) = (\lambda_1 - \gamma_1)N_1(t) - \delta_1\left[N_1(t) + N_2(t)\right]N_1(t)$$
$$\frac{d}{dt}N_2(t) = (\lambda_2 - \gamma_2)N_2(t) - \delta_2\left[N_1(t) + N_2(t)\right]N_2(t)$$

em que

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \gamma_1 = \gamma_2 = \delta_1 = \delta_2 = 1$$

a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema.
b) Linearize o sistema em torno de cada um dos pontos de equilíbrio e discuta o comportamento local com base nestas linearizações.
c) A partir dos resultados das alíneas anteriores e dos sinais da derivada, esboce aproximadamente o retrato de fase do sistema.

P7. Considere o sistema autónomo (isto é, sem entrada), de 2ª ordem, descrito pelo sistema de equações não lineares

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

Mostre que a origem é um ponto de equilíbrio do sistema. Obtenha as equações do sistema linearizado em torno da origem. Classifique a origem em termos dos valores próprios do sistema linearizado. Diga o que pode concluir daqui sobre o comportamento em torno da origem do sistema não linear.

P8. Considere o modelo epidemiológico simplificado em que x represrenta a população sã e y a população infectada, e K e L são parâmetros positivos:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -Kxy \\ \dfrac{dy}{dt} = Kxy - Ly \end{cases}$$

Recorrendo aos sinais da derivada esboce qualitativamente o retrato de fase deste sistema.

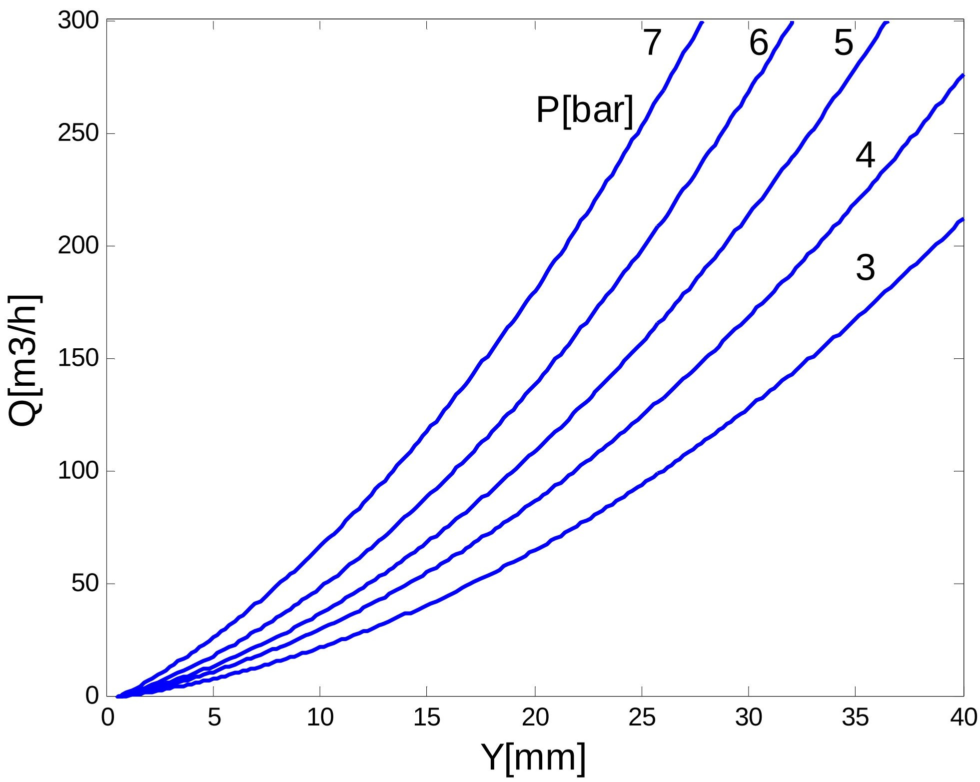

Fig. P9-1. Característica estática da válvula.

P9. A fig. P9-1 (acima) representa a característica estática de uma válvula. O comportamento estático da válvula é descrito por 3 variáveis:

- $Y\,[mm]$ = deslocamento do veio de abertura da válvula.
- $P\,[bar]$ = pressão na descarga (isto é, à saída da válvula).
- $Q\,[m^3/h]$ = caudal na descarga.

Considere o ponto de trabalho definido por $Y_0 = 25\,mm$ e $P_0 = 5\,bar$. Por linearização da característica, obtenha graficamente os coeficientes K_Y e K_P no modelo linearizado

$$\Delta Q = K_Y\,\Delta Y + K_P \Delta P$$

em que ΔY e ΔP são incrementos em relação ao ponto de operação.