Modelação e Simulação

Problemas - 1

P1. Considere-se um grande conjunto de células que têm poros tal como se mostra na fig. P1-1, através da qual a célula pode captar nutrientes.

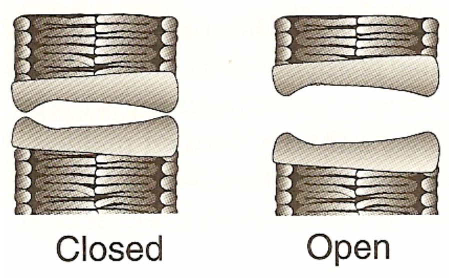

Fig. P1-1. os dois estados dos poros da parede de uma célula.

Estes poros podem estar num de dois estados designados por “Aberto (O)” e “Fechado” (C). Os poros podem transitar entre os dois estados de acordo com o diagrama seguinte:

$$C \underset{k^-}{\overset{k^+}{\rightleftarrows}} O$$

Este diagrama significa que a fracção de poros fechados em relação ao total de poros que, por unidade de tempo, se abre é dada (em média) por

$$J_+ = k^+ f_C$$

em que f_C é a fracção total de poros fechados. Analogamente, a fracção de poros abertos que, por unidade de tempo se fecha é dada (em média) por

$$J_- = k^- f_O$$

em que f_O é a fracção total de poros abertos.

a) Obtenha uma equação diferencial de 1ª ordem que modele a evolução no tempo da fracção de póros abertos $f_O(t)$.

b) Observando os sinais da derivada, trace qualitativamente a evolução de $f_O(t)$ paras várias condições iniciais.

Sugestão: Considere um pequeno intervalo de tempo genérico entre t e $t+\Delta$, e faça um balanço do número total de poros abertos nesse intervalo de tempo. Observe que existe uma relação entre f_O e f_C (qual é?).

P2. *Um modelo para a difusão da inovação*. Referência: Braun, *Differential equations and their applications*, Springer-Verlag, 1978, 37-42.

Considere-se a introdução de uma inovação tecnológica numa comunidade fixa de N agricultores no instante $t=0$. Seja $x(t)$ o número de agricultores que adoptaram a inovação no instante t. Faz-se a aproximação de considerar que $x(t)$ é uma função contínua, o que corresponde a assumir que há muitos agricultores.

Para obter uma equação diferencial que modele a evolução no tempo de $x(t)$, faz-se a hipótese de assumir que um agricultor só adopta a inovação depois de ser informado por um outro agricultor que a adoptou. Assim, num intervalo de tempo genérico de duração Δt, o número de agricultores Δx que adopta a inovação é directamente proporcional ao número de agricultores $x(t)$ que já a adoptaram e ao número de agricultores que ainda não a adoptaram.

a) Escreva uma equação diferencial verificada por $x(t)$.

b) Sem resolver explicitamente a equação, trace o andamento das soluções para várias condições iniciais, usando os sinais da derivada.

c) Mostre que o processo de adopção acelera até ao ponto em que metade da comunidade está consciente da inovação e que, após este ponto, o processo de adopção começa a desacelerar até se aproximar de uma taxa de inovação nula.

P3. Trace qualitativamente o andamento das soluções, para várias condições iniciais, para os sistemas sem entrada descritos pelas seguintes equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem:

a) $\dfrac{dx}{dt} = x(2-x)$

b) $\dfrac{dx}{dt} = -x(2-x)$

c) $\dfrac{dx}{dt} = x(2-x)(4-x)$

P5. Desenhe um diagrama de blocos usando apenas integradores como blocos dinâmicos que permita simular no SIMULINK os seguintes sistemas:

a) $\dfrac{dx}{dt} = -4x + 3u$

b) $\dfrac{dx_1}{dt} = x_2$, $\dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 - 0.5x_2 + u$