

## 5. Sistemas Não lineares

*Objectivo:* Após completar este módulo, o aluno deverá ser capaz de:

- 1) Aproximar um sistema não linear por um sistema linearizado em torno de um ponto de equilíbrio;
- 2) Aproximar um sistema não linear por uma combinação de múltiplos sistemas lineares;
- 3) Traçar qualitativamente o retrato de fase de um sistema não linear de 2<sup>a</sup> ordem, com base na linearização em torno dos pontos de equilíbrio e dos sinais da derivada.

## Um modelo para sistemas não-lineares

Vimos que muitos sistemas não lineares podem ser representados pelo modelo de estado não-linear:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, u) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= h(x)\end{aligned}$$

A primeira equação representa o modelo da dinâmica do estado  $x$

A segunda equação representa o modelo dos sensores, que relaciona o estado  $x$  com as observações  $y$ .

## Existência e unicidade da solução

É condição suficiente para que a solução de

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad x(0) = x_0$$

exista e seja **única**, que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  seja contínua numa vizinhança de  $x_0$ .

Nos sistemas lineares, a solução existe sempre e é única (Porquê?).

Nos sistemas não-lineares é possível encontrar exemplos em que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  não é única num ponto, pelo qual passam duas soluções (o teorema não é aplicável).

## Um exemplo de não unicidade de solução

$$\frac{dx}{dt} = x^{1/3} \quad x(0) = 0$$

Tem duas soluções:

$$x(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2} \quad \text{e} \quad x(t) = 0$$

Repare-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( x^{1/3} \right) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$$

**não** é contínua para  $x = 0$  (e portanto o teorema de unicidade **não** é aplicável).

## Singularidades na solução

A solução da equação de estado dos sistemas lineares existe para todo o tempo, entre o instante inicial e  $+\infty$ . Nos sistemas lineares, a solução pode tender para  $+\infty$ , mas apenas quando o tempo tende para  $+\infty$ .

Considere-se no entanto a equação não linear:

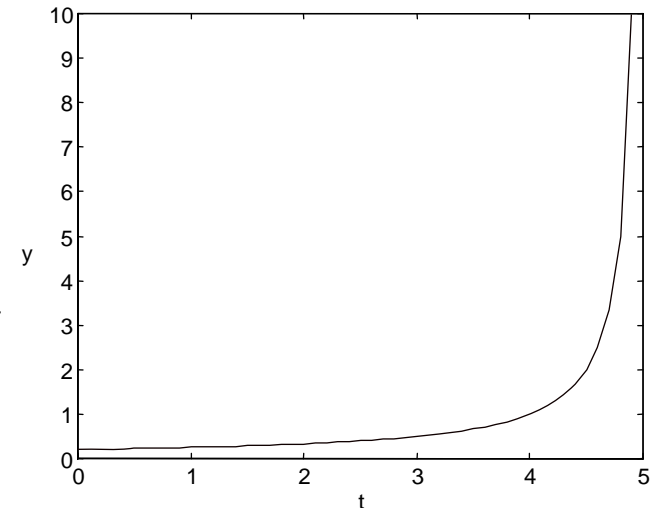
$$\frac{dx}{dt} = x^2 \quad x(0) = x_0$$

Esta equação pode ser facilmente integrada por separação de variáveis:

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{x^2} dx = t \quad \left. \frac{1}{x} \right|_{x_0}^{x(t)} = t$$

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t}$$

A solução só existe para  $t < \frac{1}{x_0}$



Simulação com  $x_0 = 0.2$

## Pontos de equilíbrio

Define-se ponto de equilíbrio como um ponto no espaço de estado tal que, se o estado for iniciado nele, permanecerá constante no tempo.

Dada a equação

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

os pontos de equilíbrio correspondem a valores do estado constantes, os quais são por conseguinte dados pelas raízes da equação algébrica:

$$f(x) = 0$$

## Pontos de equilíbrio dos sistemas Lineares

Para um sistema linear autónomo, descrito pela equação de estado

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

os pontos de equilíbrio são dados pelas raízes da equação algébrica linear:

$$Ax = 0$$

Se a matriz  $A$  não é singular, há um único ponto de equilíbrio, dado por  $x = 0$ .

Se a matriz  $A$  é singular, há uma infinidade de pontos de equilíbrio, que formam um hiperplano que passa sempre pela origem.

Ao contrário, nos sistemas não lineares podem existir múltiplos pontos de equilíbrio isolados.

## Determinação numérica dos pontos de equilíbrio

A determinação numérica dos pontos de equilíbrio faz-se com um método numérico que resolva o sistema de equações

$$f(\bar{x}) = 0$$

ou seja

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

A solução pode ser obtida com a função *fsolve* do MATLAB (Optimization toolbox). Uma outra alternativa é usar a função *trim*.



## A função *fsolve* do MATLAB

Informação adicional: Help sobre *Nonlinear Systems of Equations, Nonlinear Equations with Analytic Jacobian* e *fsolve*.

Exemplo: Resolver o sistema de equações

$$f_1 = (x_1 - 2)^2 x_2 = 0$$

$$f_2 = (x_2 - 2)^2 x_1 = 0$$

Criar no directório de trabalho o ficheiro *f.m* com o seguinte conteúdo:

```
function f=f(x);  
f(1)=(x(1)-2)^2*x(2);  
f(2)=(x(2)-2)^2*x(1);
```

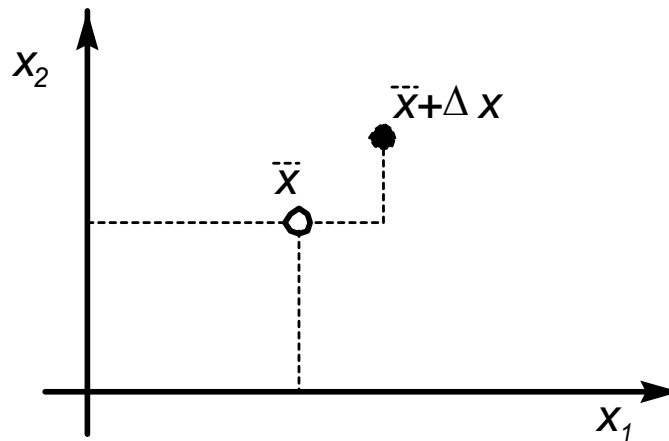
Correr *fsolve(@f,[5 6])*

## Linearização em torno de um ponto de equilíbrio

Seja  $\bar{x}$  um ponto de equilíbrio do sistema não linear

$$\dot{x} = f(x)$$

Pretende-se aproximar a dinâmica de um incremento  $\Delta x$  em torno do ponto de equilíbrio por um modelo linear.



$$\dot{x} = f(x) \qquad \frac{d}{dt}(\bar{x} + \Delta x) = f(\bar{x} + \Delta x)$$

$$\frac{d}{dt}\bar{x} + \frac{d}{dt}\Delta x \approx f(\bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} \Delta x$$

$$\frac{d}{dt}\bar{x} = 0 \quad \text{e} \quad f(\bar{x}) = 0 \quad (\text{porquê?})$$

$$\frac{d}{dt}\Delta x \approx \left[ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} \right] \Delta x$$

## Conclusão

A linearização do sistema não linear

$$\dot{x} = f(x)$$

em torno do ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  (solução de  $f(\bar{x}) = 0$ ) é dada pelo sistema linear

$$\frac{d}{dt} \Delta x = A \Delta x \quad \text{com a matriz } A \text{ dada por } A = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}} \right]$$

em que  $\Delta x$  é o incremento em torno de  $\bar{x}$ .

## Exercício

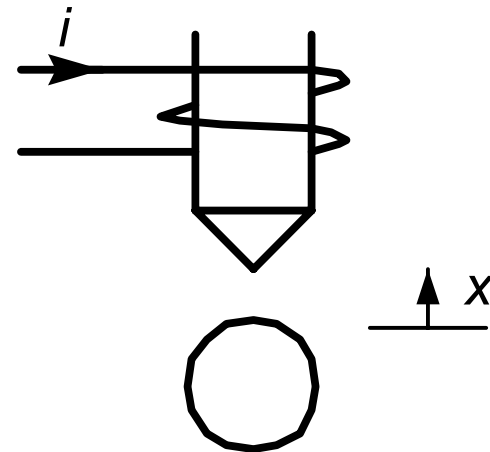
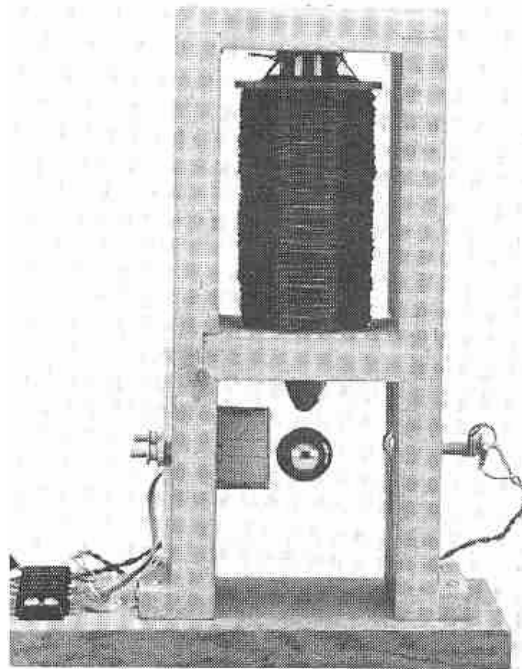
Obtenha uma aproximação linear do sistema com entrada  $u$  dado por

$$\dot{x} = f(x, u)$$

em torno do ponto de trabalho dado por  $x = \bar{x}$  e  $u = \bar{u}$ , supondo que a entrada  $\bar{u}$  e o estado  $\bar{x}$  em torno do qual se faz a variação estão em equilíbrio, ou seja, que se tem

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$$

## Exemplo: Suspensão magnética



Desprezando o atrito:  $m \ddot{x} = \varphi(x, i) - mg$

Massa da bola:  $8.4 \times 10^{-3} \text{ kg}$

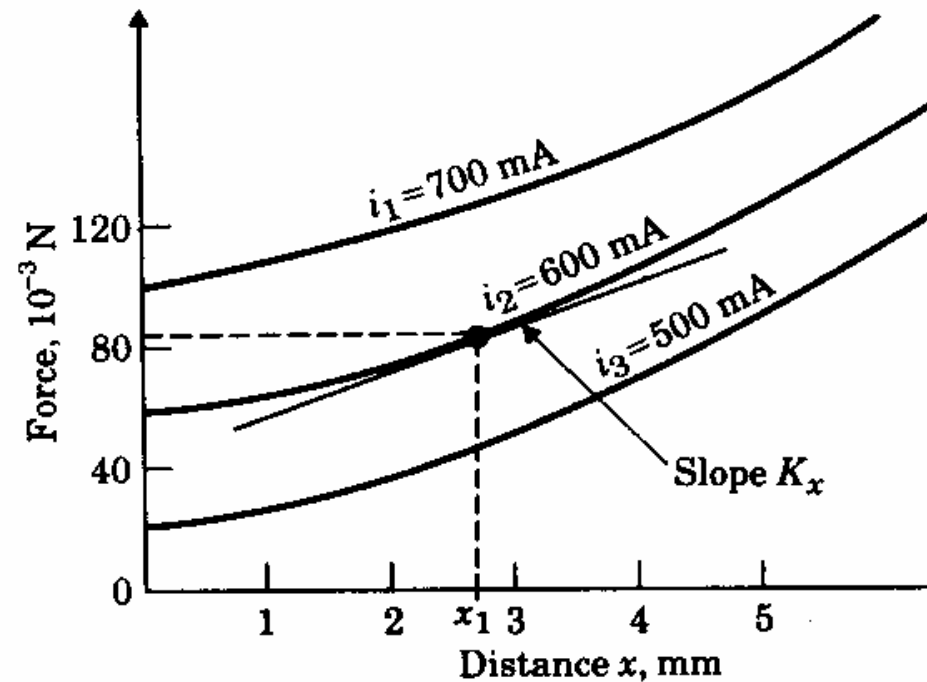
A força da gravidade é  $mg = 8.4 \times 10^{-3} \text{ kg} \times 9.8 \text{ ms}^{-2} = 82 \times 10^{-3} \text{ N}$

A bola está em equilíbrio quando a força electromagnética iguala o peso.

De acordo com a característica  $\varphi(x, i)$ , para uma corrente

$i = i_2 = 600 \text{ mA}$  a resultante das forças é nula quando a bola está na

posição  $x = x_1 = 2.6 \times 10^{-3} \text{ m}$ .



Na posição  $x = x_1 = 2.6 \times 10^{-3} \text{ m}$  e na corrente  $i = i_2 = 600 \text{ mA}$ , a força electromag. vem dada por  $\varphi(x_1, i_2) = 82 \times 10^{-3} \text{ N}$  e iguala o peso.



Linearização da característica de força:

$$\varphi(x_1 + \Delta x, i_2 + \Delta i) = \varphi(x_1, i_2) + K_x \Delta x + K_i \Delta i + \dots$$

$K_x$  é a inclinação no ponto  $x_1$  da curva de força versus  $x$  ao longo da curva  $i = i_2 = 600mA$ . O seu valor é aproximadamente  $14N/m$ .

$K_i$  é a taxa de variação de força com a corrente no ponto  $x_1$ .

No ponto  $x_1$ , quando  $i = i_1 = 700mA$ , a força é de  $122 \times 10^{-3} N$ .

Quando  $i = i_3 = 500mA$ , a força é de  $42 \times 10^{-3} N$ .

Assim:

$$K_i = \frac{122 \times 10^{-3} - 42 \times 10^{-3}}{700 \times 10^{-3} - 500 \times 10^{-3}} = 0.4 N / A$$

Aproximação linear:

$$m \ddot{x} = \varphi(x, i) - mg$$

$$\varphi(x_1 + \Delta x, i_2 + \Delta i) \approx \varphi(x_1, i_2) + K_x \Delta x + K_i \Delta i$$

$$x = x_1 + \Delta x \quad i = i_2 + \Delta i \quad \ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}(x_1 + \Delta x) = \frac{d^2}{dt^2} \Delta x$$

Assim:  $m \frac{d^2}{dt^2} \Delta x = K_x \Delta x + K_i \Delta i$  ou seja, em torno do ponto de equilíbrio:

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta x = 1667 \Delta x + 47.6 \Delta i$$

## Referência sobre o exemplo anterior

Franklin, Powell e Emami-Naeini. *Feedback control of dynamic systems*.  
Addison Wesley.

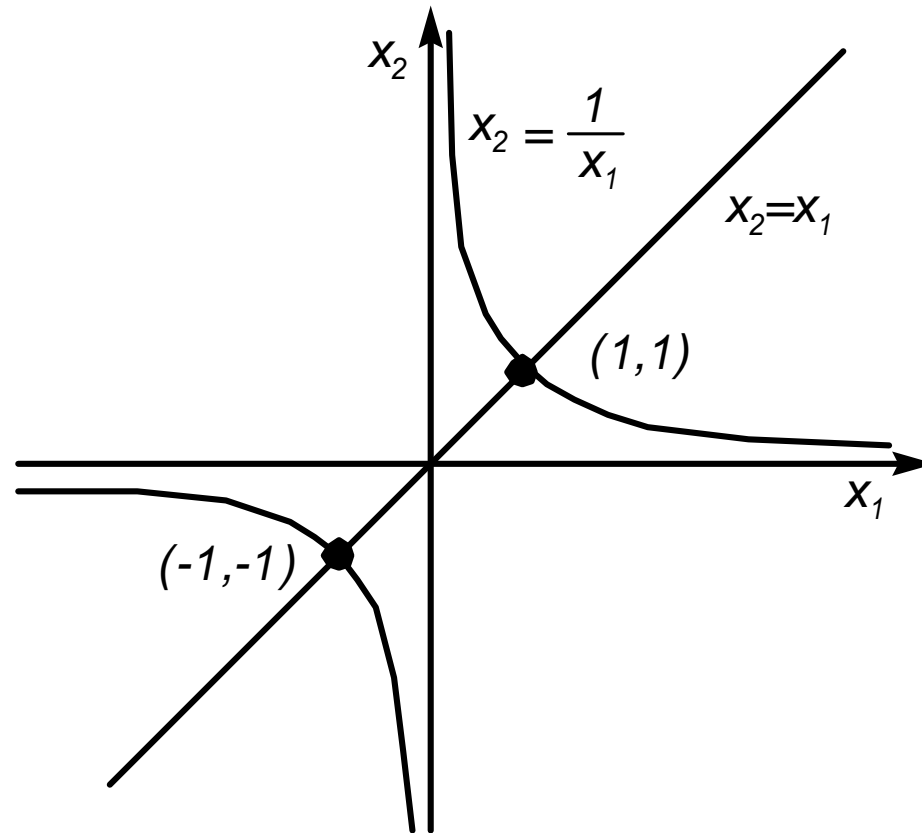
## Linearização em torno de um ponto de equilíbrio: Exemplo

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 1 - x_1x_2$$

Os pontos de equilíbrio correspondem aos pontos de intersecção da recta  $x_2 = x_1$  com a hipérbole  $x_1x_2 = 1$ . São dados por  $(-1, -1)$  e  $(1,1)$ .

Interpretação geométrica da solução do sistema de equações:



$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 = 0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 1 - x_1 x_2 = 0$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 1 - x_1x_2$$

A matriz das primeiras derivadas é

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathcal{F}_1}{dx_1} & \frac{\mathcal{F}_1}{dx_2} \\ \frac{\mathcal{F}_2}{dx_1} & \frac{\mathcal{F}_2}{dx_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x_2 & -x_1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz deve ser calculada em cada um dos pontos de equilíbrio.

**Ponto de equilíbrio (-1,-1):**

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathcal{F}_1}{dx_1} & \frac{\mathcal{F}_1}{dx_2} \\ \frac{\mathcal{F}_2}{dx_1} & \frac{\mathcal{F}_2}{dx_2} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=-1 \\ x_2=-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x_2 & -x_1 \end{bmatrix}_{\substack{x_1=-1 \\ x_2=-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Ponto de equilíbrio (1,1):**

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathcal{F}_1}{dx_1} & \frac{\mathcal{F}_1}{dx_2} \\ \frac{\mathcal{F}_2}{dx_1} & \frac{\mathcal{F}_2}{dx_2} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=1 \\ x_2=1}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x_2 & -x_1 \end{bmatrix}_{\substack{x_1=1 \\ x_2=1}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

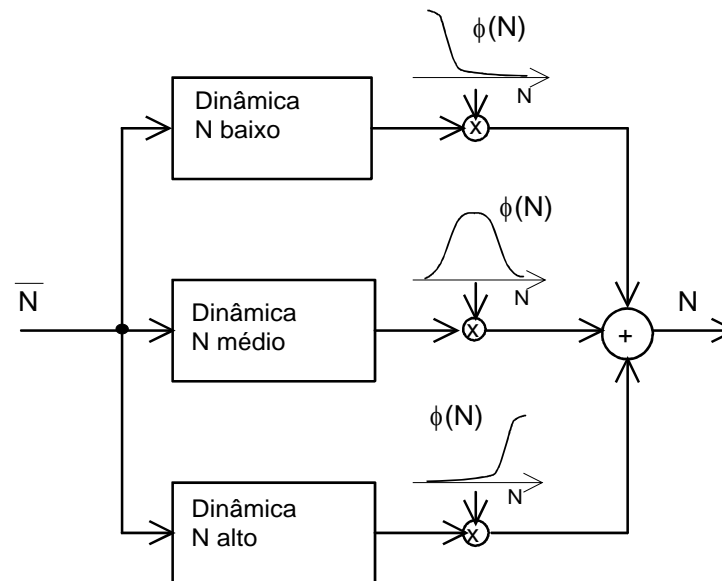
Estes resultados podem ser obtidos numericamente com a função *linmod*.



## Rede de modelos locais (*Local Model Network – LMN*)

*Objectivo:* Aproximar um modelo não linear por uma combinação pesada de modelos lineares válidos localmente.

*Exemplo:* Modelo de uma bomba com dinâmica não linear



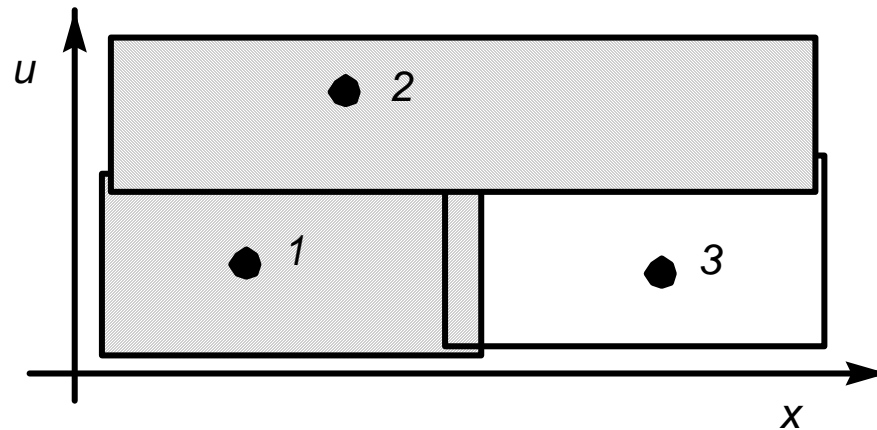
Modelo de estado não linear

$$\dot{x} = f(x, u)$$

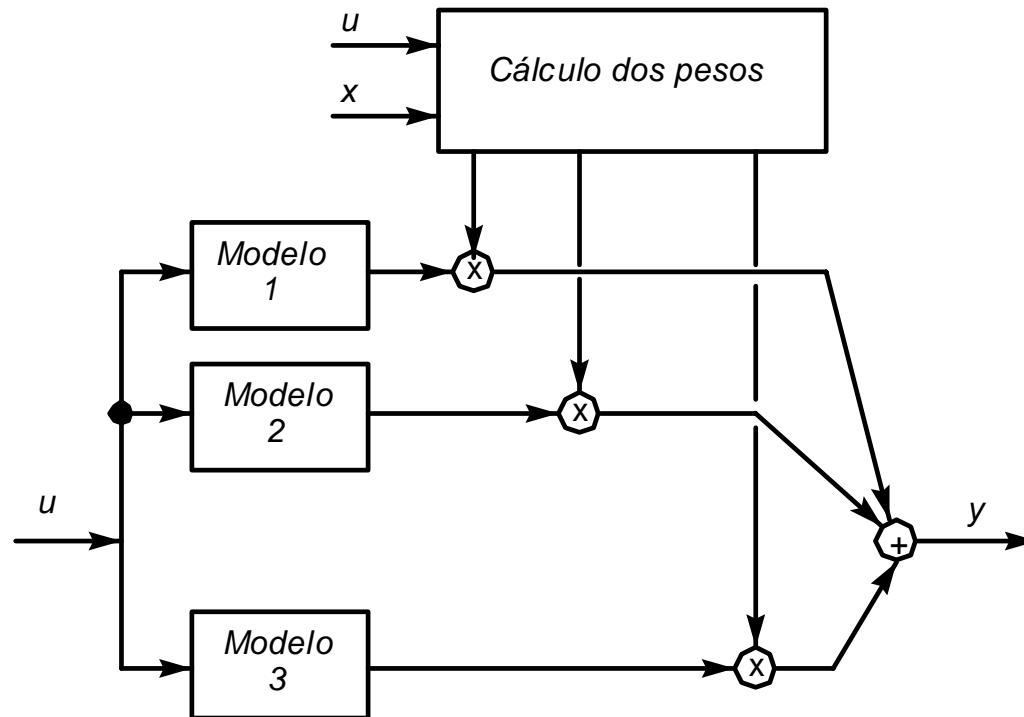
Linearização em torno de um ponto  $(\bar{x}_i, \bar{u}_i)$  não necessariamente de equilíbrio:

$$\dot{x} = f(\bar{x}_i, \bar{u}_i) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x}_i \\ u=\bar{u}_i}} \Delta x_i + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x}_i \\ u=\bar{u}_i}} \Delta u_i + \dots$$

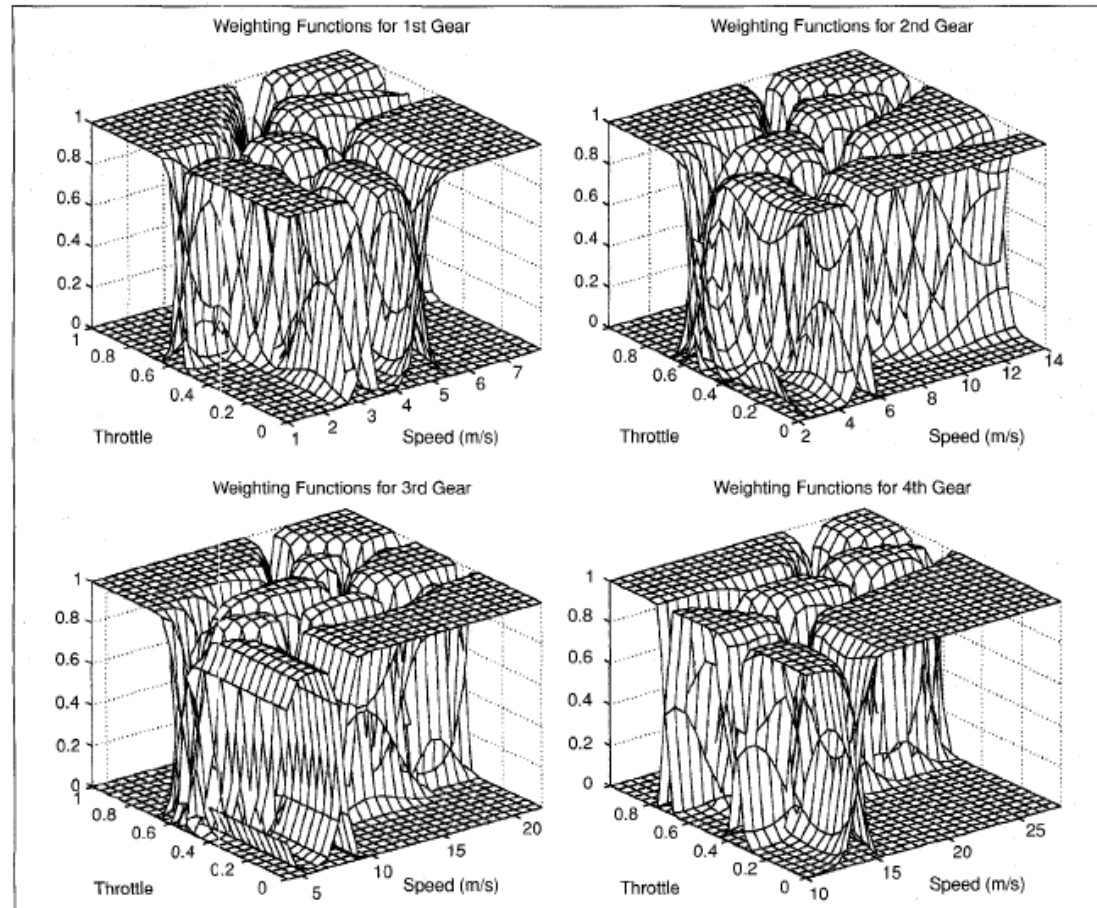
O plano  $(x, u)$  é “coberto” por  $N$  regiões (não necessariamente disjuntas) cada uma delas associada a um modelo linearizado em torno de  $(\bar{x}_i, \bar{u}_i)$  (ditos modelos locais).



O modelo global consiste na soma pesada das saídas dos diversos modelos locais:



## Exemplo: LMN do motor de um camião



## **Propriedades locais e propriedades globais**

As redes de modelos locais não replicam necessariamente bem as propriedades globais dos sistemas que aproximam. Por exemplo, os todos os modelos locais podem ser estáveis, mas isso resultar num modelo global instável.

Isto depende dos pesos e da maneira como se processam as transições entre estados entre zonas representadas por modelos locais diferentes.

O LMN tem no entanto um uso crescente, tal como as técnicas baseadas em modelos múltiplos.

## Referência sobre LMN

T. A. Johansen, K. J. Hunt e H. Fritz. A software environment for gain-scheduled Controller design. IEEE Control Systems Magazine, April 1998.

Esta referência pode facilmente ser encontrada no IEEEXPLORE, acessível através da rede sem fios do IST.

## Traçado qualitativo das soluções no plano de estado

A observação dos sinais da derivada (que indica se as variáveis são crescentes, decrescentes ou constantes) e a linearização permitem, para sistemas de 2ª ordem (com duas variáveis de estado), ter uma ideia do andamento qualitativo das soluções no plano de estado.

Vamos dedicar a nossa atenção a este assunto.



## Bibliografia

Há muitas referências que tratam o assunto a nível introdutório, tal como é feito aqui. O seguinte texto tem exemplos sobre dinâmica das populações, e trata a chamada teoria qualitativa das equações diferenciais:

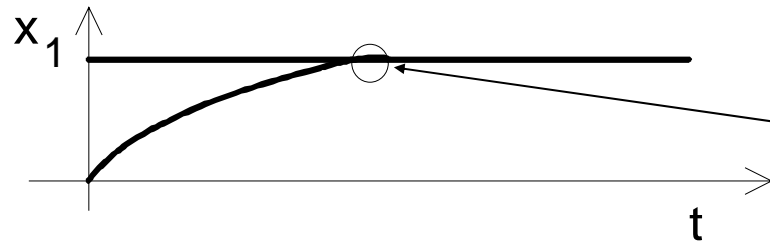
Braun, M. *Differential Equations and their applications*. Springer. Cap. 4

Um outro exemplo que dá um tratamento um pouco mais completo e aborda outros assuntos deste capítulo é:

Robinson, R. C. *An introduction to dynamical systems – continuous and Discrete*. Pearson (Prentice Hall). Caps. 4, 5.

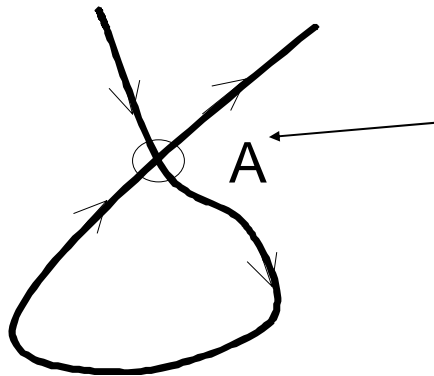
## Consequências da unicidade da solução

- Através de um ponto do espaço de estado passa no máximo uma trajectória.
- Uma solução que comece num ponto que **não** seja de equilíbrio, não pode atingir um ponto de equilíbrio num intervalo de tempo finito



Se isto fosse possível, por este ponto passariam duas soluções.

- Uma trajectória que passe pelo menos pelo menos através de um ponto que não seja ponto de equilíbrio, não pode reencontrar-se a si própria, a menos que seja uma curva fechada.



**Não** pode suceder se o ponto A não é ponto de equilíbrio.

## Uso dos sinais da derivada

- Quando a derivada de uma variável é positiva, a variável aumenta
- Quando a derivada é negativa, diminui
- Quando é nula, a variável mantém-se constante

Podemos usar a informação sobre os sinais das derivadas para determinar o sentido de andamento das trajectórias no plano de estado.

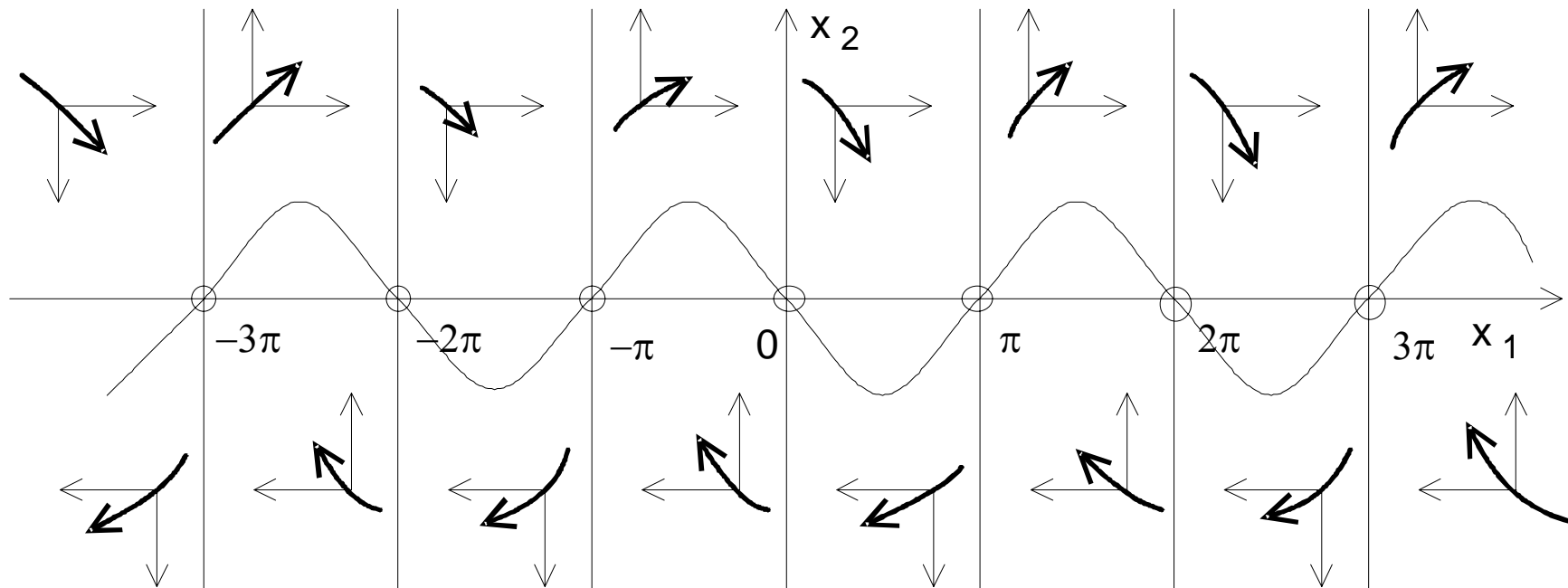
Repare-se que a equação se escreve

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

pelo que para cada ponto  $x$ , a derivada é  $f(x)$  e pode saber-se o seu sinal.

### Exemplo: Pêndulo não amortecido

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\sin(x_1) \end{cases}$$



## Relação entre o sistema não linear e as suas linearizações

A *intuição* sugere-nos que existe uma relação entre a solução da equação não-linear e a solução da equação linearizada em torno do ponto de equilíbrio considerado (pensemos na origem para fixar ideias). No entanto, ***a intuição nem sempre é o melhor guia...***

Repare-se que embora duas equações possam ser parecidas, nada nos garante que os comportamentos qualitativos das suas soluções não sejam muito diferentes. Os exemplos de sensibilidade a parâmetros sugerem que nem sempre a nossa intuição inicial se verifica.

Há no entanto situações em que existe uma relação estreita entre as soluções do sistema não-linear e da sua linearização em torno de um dado ponto de equilíbrio.

Estudam-se a seguir as condições precisas em que podemos tirar conclusões sobre o comportamento local de um sistema não linear a partir do estudo da sua linearização em torno de pontos de equilíbrio.

### Nota

Os resultados seguintes referem-se frequentemente à origem como ponto de equilíbrio. Isto é feito sem perda de generalidade. Com efeito se  $\bar{x}$  for um

ponto de equilíbrio de  $\frac{dx}{dt} = f(x)$

então a origem é um ponto de equilíbrio de

$$\frac{dz}{dt} = f(z)$$

com  $z = x - \bar{x}$ .



## Definição (Pontos de equilíbrio simples)

O sistema linear

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

diz-se **simples** se a matriz  $A$  é não singular.

Um **ponto de equilíbrio de um sistema não-linear diz-se simples** se o sistema linearizado em torno dele for simples.

Repare-se que um sistema não linear pode ter vários pontos de equilíbrio, sendo alguns simples e outros não.

## Relação entre o comportamento de sistemas lineares e não-lineares

Suponhamos que o sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

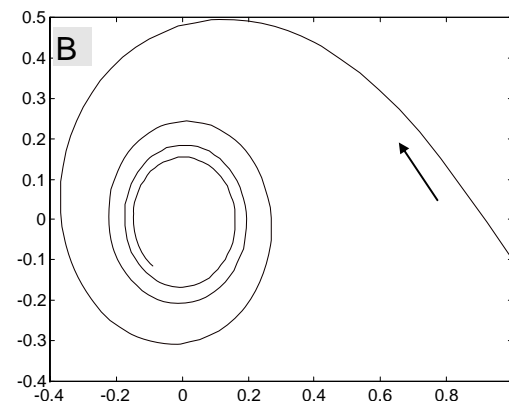
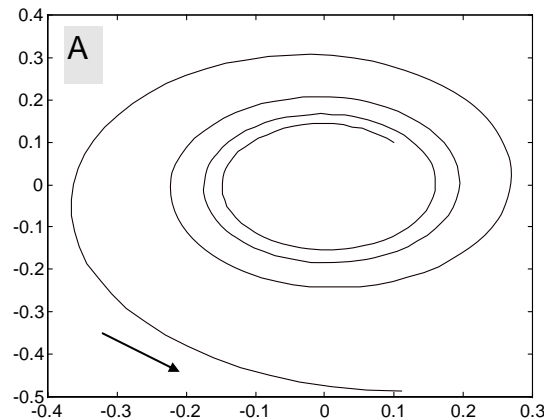
tem um ponto de equilíbrio **simples** em  $x = 0$ .

Numa vizinhança da origem os comportamentos no plano de estado do sistema não linear e da sua linearização são **qualitativamente equivalentes**, desde que o sistema linearizado não tenha valores próprios imaginários puros.

### Exemplo em que não há equivalência de comportamento

$$\begin{aligned}
 & \frac{dx_1}{dt} = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\
 \text{A)} & \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2)
 \end{aligned}
 \quad \text{e} \quad
 \begin{aligned}
 & \frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\
 \text{B)} & \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)
 \end{aligned}$$

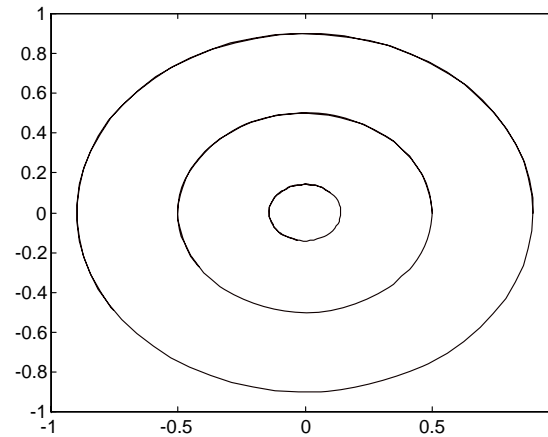
Os seus comportamentos em torno do ponto de equilíbrio (0,0) são muito diferentes: A é instável e B é estável



No entanto, ambos *têm a mesma linearização* em torno da origem, dada por

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1$$



Os valores próprios das matrizes do sistema linearizado em ambos os casos são imaginários puros.

Para se perceber como foi construído este exemplo, tenha-se em consideração que, em coordenadas polares  $(r, \theta)$ , as equações são

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r^3 & \frac{dr}{dt} &= -r^3 \\ \frac{d\theta}{dt} &= 1 & \text{e} & \frac{d\theta}{dt} = 1 \end{aligned}$$

Com base nestas equações, mostre que no primeiro caso a origem é um ponto de equilíbrio instável e, no segundo caso, um ponto de equilíbrio estável.

## Nota sobre o Teorema da Variedade Central

De acordo com o exposto anteriormente, quando há valores próprios da matriz do sistema linearizado que são imaginários puros, não se pode, conhecendo a estabilidade do sistema linearizado, dizer nada sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio em torno do qual se fez a linearização.

No entanto o **Teorema da Variedade Central** (*Center Manifold Theorem*) permite estudar a estabilidade do sistema original a partir de um problema mais simples, em que se estuda a estabilidade de um sistema com ordem  $n-p$ , sendo  $n$  a ordem do sistema original e  $p$  o número de valores próprios com parte real nula.

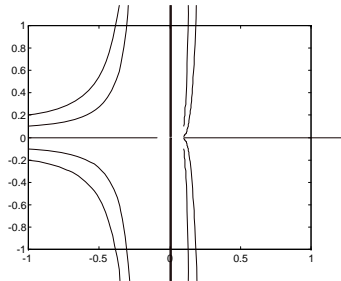
## Outro exemplo de não aplicabilidade do Teorema:

### Pontos de equilíbrio não simples

Sistema não linear

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1^2$$

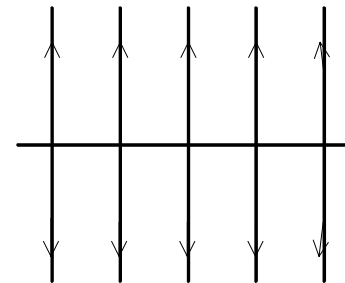
$$\frac{dx_2}{dt} = x_2$$



Sistema linearizado em torno da origem

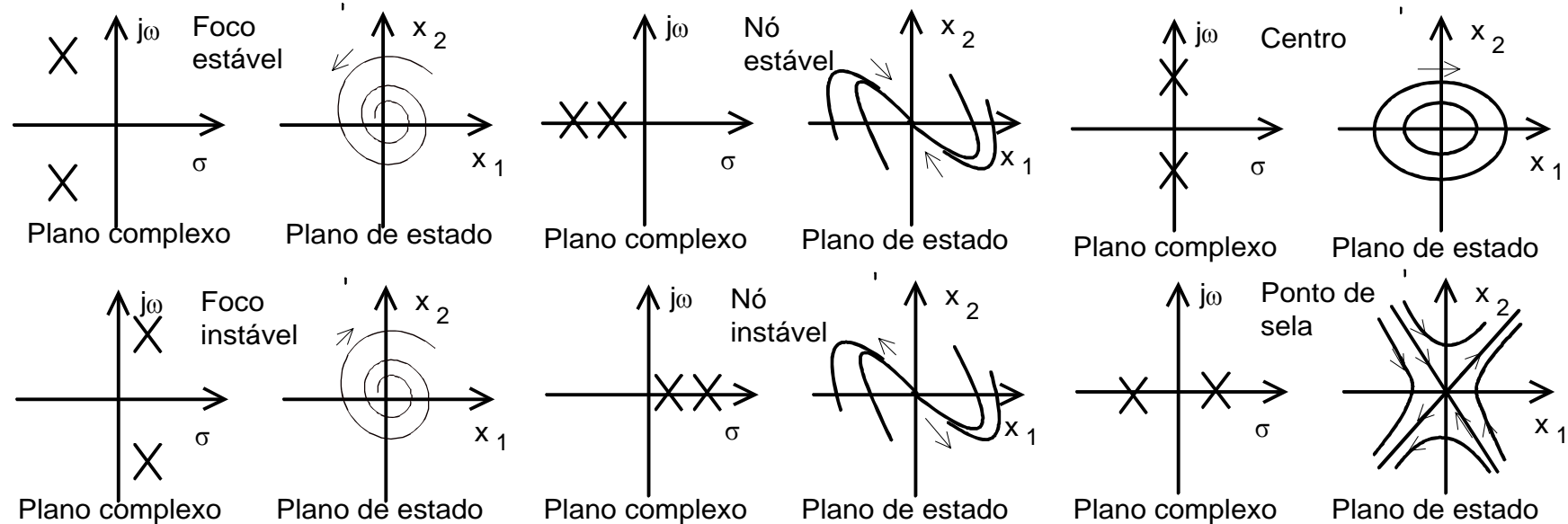
$$\frac{dx_1}{dt} = 0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2$$



A presença do termo não-linear modifica completamente neste caso o comportamento qualitativo da solução.

## Classificação da dinâmica em torno dos pontos de equilíbrio



Consoante a disposição no plano complexo dos valores próprios da matriz da dinâmica do sistema linearizado, assim será o andamento local das trajectórias de estado. Repare-se que no caso dos centros, não se pode dizer nada sobre o correspondente sistema não-linear.



## Método para traçado qualitativo das soluções

- Determinar os pontos de equilíbrio;
- Determinar o tipo dos pontos de equilíbrio (nó, foco, estável, instável, ...);
- A partir dos sinais da derivada, determinar os possíveis sentidos de andamento das variáveis de estado em cada uma das regiões do plano
- Incorporar outro tipo de informações (por exemplo, existência de trajectórias de estado fechadas);
- Traçar o andamento qualitativo das trajectórias de estado tendo em conta os passos anteriores.

## Exemplo de traçado das trajectórias no plano estado

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 1 - x_1 x_2$$

Os pontos de equilíbrio são dados por  $(-1, -1)$  e  $(1,1)$ .

**Ponto de equilíbrio (-1,-1):**

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathcal{F}_1}{dx_1} & \frac{\mathcal{F}_1}{dx_2} \\ \frac{\mathcal{F}_2}{dx_1} & \frac{\mathcal{F}_2}{dx_2} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=-1 \\ x_2=-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x_2 & -x_1 \end{bmatrix}_{\substack{x_1=-1 \\ x_2=-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Os valores próprios desta matriz são  $1 \pm j$ .

O ponto é portanto um foco instável.

**Ponto de equilíbrio (1,1):**

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=1 \\ x_2=1}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x_2 & -x_1 \end{bmatrix}_{\substack{x_1=1 \\ x_2=1}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

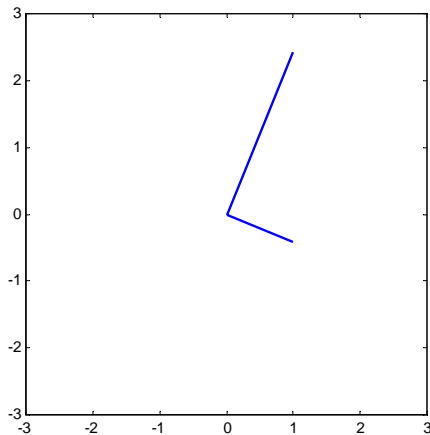
Os valores próprios desta matriz são  $\pm \sqrt{2}$ .

É portanto um ponto de sela.

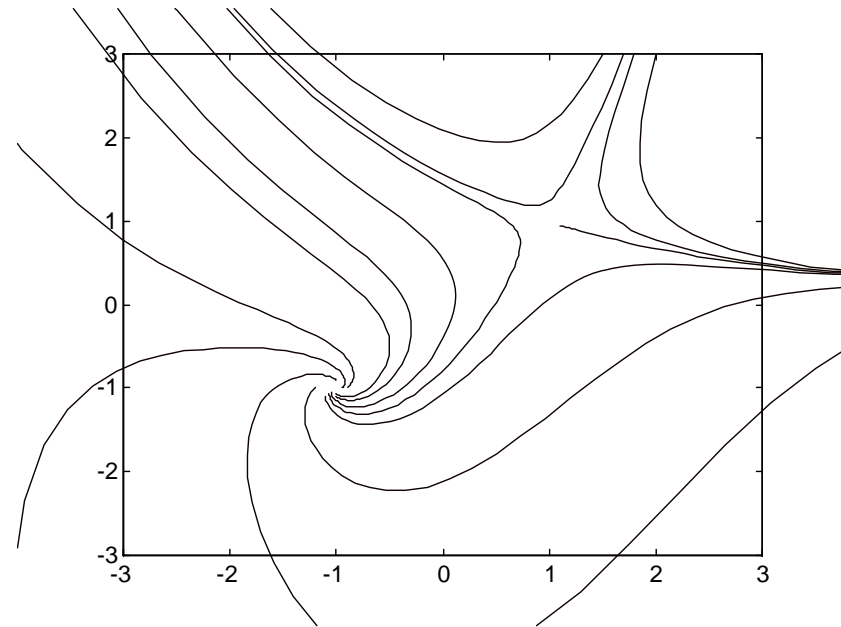
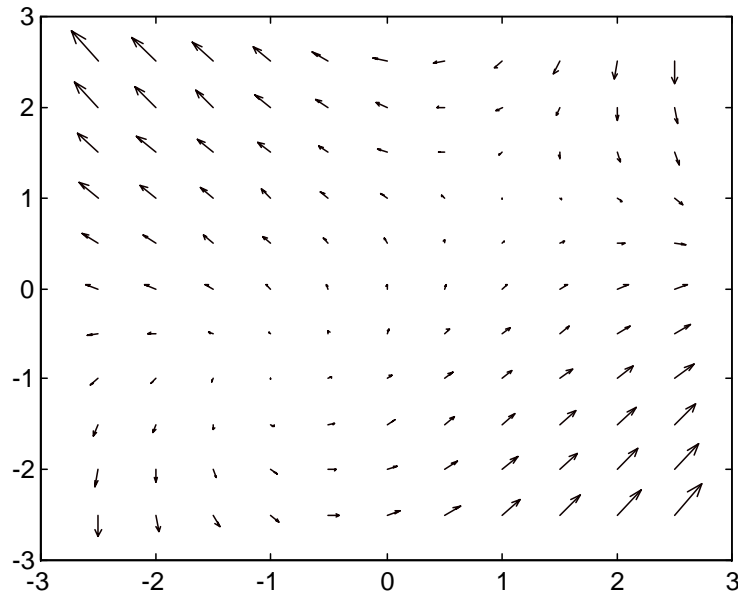
Vectores próprios (definem as direcções das assíntotas do ponto de sela):

Associado ao valor próprio  $+\sqrt{2}$ :  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Associado ao valor próprio  $-\sqrt{2}$ :  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$

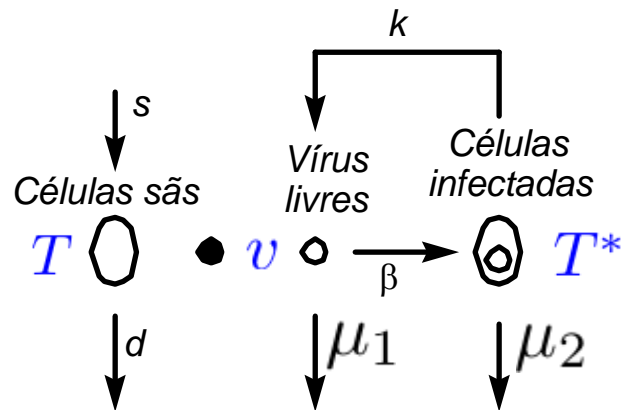


O campo de vectores associado à equação e o retrato de fase são:





### Dinâmica de infecção pelo HIV



$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = s - dT - \beta T v \\ \frac{dT^*}{dt} = \beta T v - \mu_2 T^* \\ \frac{dv}{dt} = k T^* - \mu_1 v \end{cases}$$

$T$  = Número de células T-CD4+ sãs por unidade de volume  $[mm^3] = [\mu l]$

$T^*$  = Núm. células T-CD4+ infectadas por unidade de volume  $[mm^3] = [\mu l]$

$v$  = Número de partículas de vírus por unidade de volume  $[mm^3] = [\mu l]$

## Pontos de equilíbrio

Os pontos de equilíbrio obtêm-se igualando as derivadas a zero:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT}{dt} = s - dT - \beta T v = 0 \\ \frac{dT^*}{dt} = \beta T v - \mu_2 T^* = 0 \\ \frac{dv}{dt} = k T^* - \mu_1 v = 0 \end{array} \right.$$

Há dois pontos de equilíbrio, correspondentes, respectivamente, a estados em que não há infecção e em que há infecção.



Estados de equilíbrio:

**Ausência de infecção (1)**

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_1^* \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{d} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Fase assintomática (2)**

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ T_2^* \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu_1 \mu_2}{\beta k} \\ \frac{s}{\mu_2} - \frac{d \mu_1}{\beta k} \\ \frac{ks}{\mu_1 \mu_2} - \frac{d}{\beta} \end{bmatrix}$$

## Sistema linearizado em torno de um ponto de equilíbrio

Ponto de equilíbrio:

$$\begin{bmatrix} T_0 & T_0^* & v_0 \end{bmatrix}^T$$

Dinâmica linearizada em torno deste ponto de equilíbrio:

$$A = \begin{bmatrix} -d - \beta v_0 & 0 & -\beta T_0 \\ \beta v_0 & -\mu_2 & \beta T_0 \\ 0 & k & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

## Estabilidade dos pontos de equilíbrio

A quantidade  $R_0 = \frac{\beta sk}{d\mu_1\mu_2}$  determina a estabilidade do estado equilíbrio em que se desenvolve a infecção.

- Se  $R_0 < 1$  o equilíbrio (1) (não infecção) é assintoticamente estável e o vírus não se desenvolve.
- Se  $R_0 > 1$  o equilíbrio (1) é instável e o equilíbrio (2) é localmente assintoticamente estável. O vírus vai espalhar-se após a infecção, atingindo-se o equilíbrio (2).

## Exemplo

$t$	Tempo	Dias
$d$	Taxa de mortalidade das células T sãs	0.02 por dia
$k$	Taxa de produção dos viriões pelas células T infectadas	100 por célula
$s$	Termo de fonte das células T sãs	$10 \text{ mm}^{-3}$ por dia
$\beta$	Taxa de infecciosidade dos viriões livres	$2.4 \times 10^{-5} \text{ mm}^{-3}$ por dia
$\mu_1$	Taxa de mortalidade do vírus	2.4 por dia
$\mu_2$	Taxa de mortalidade das células T infectadas	0.24 por dia

## Equilíbrio (1) – Ausência de infecção

Ponto de equilíbrio:

$$\begin{bmatrix} T_0 & T_0^* & v_0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Matriz da dinâmica do sistema linearizado:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.02 & 0 & -0.012 \\ 0 & -0.24 & 0.012 \\ 0 & 100 & -2.4 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tem valores próprios -0.02, 0.2183 e -2.8583. Há um valor próprio real positivo pelo que o ponto de equilíbrio é instável.

Em torno do ponto de equilíbrio (1), o valor próprio correspondente ao estado  $v$  é muito maior em valor absoluto que os outros dois.

Isto sugere que é possível simplificar o modelo, considerando apenas os estados  $T$  e  $T^*$ , uma vez que  $v$  atinge muito mais rapidamente o equilíbrio (em termos das outras duas variáveis).

Por outro lado, os valores próprios correspondentes a  $T$  e  $T^*$  são um positivo e o outro negativo, o que sugere um comportamento tipo ponto de sela no plano de estado destas variáveis, com um modo estável associado a  $T$  e um modo instável associado a  $T^*$ .

## Equilíbrio (2)– Infecção (fase assintomática)

Ponto de equilíbrio:

$$\begin{bmatrix} T_0 & T_0^* & v_0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 240.00 & 21.67 & 902.78 \end{bmatrix}^T$$

Matriz da dinâmica do sistema linearizado:

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.0417 & 0 & -0.0058 \\ 0.0217 & -0.24 & 0.0058 \\ 0 & 100 & -2.4 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tem valores próprios  $-0.0199 \pm 0.6658j$  e  $-2.6418$ . Todos os valores próprios têm parte real negativa, pelo que o ponto de equilíbrio é estável.

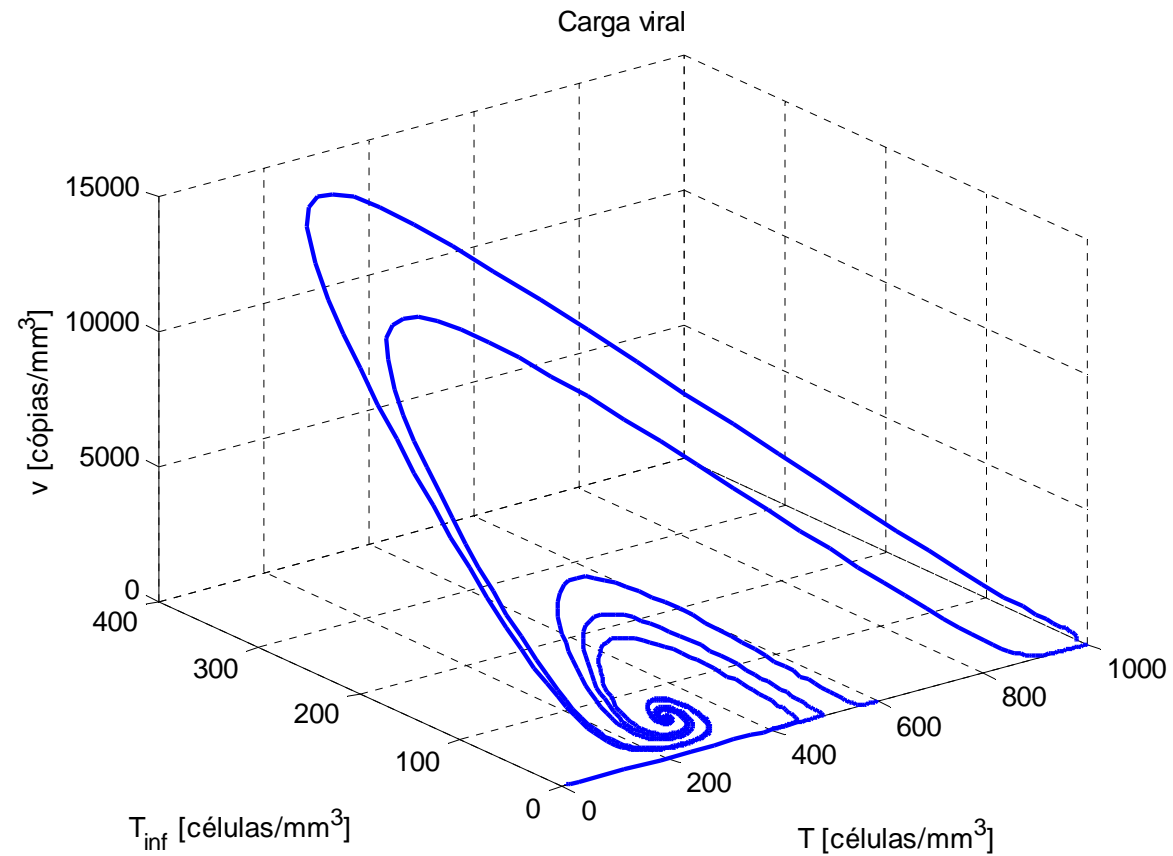
Uma vez mais, o valor próprio associado a  $\mathcal{V}$  é muito maior em valor absoluto que os outros dois.

Isto sugere uma vez mais que é possível simplificar o modelo, considerando apenas os estados  $T$  e  $T^*$ , uma vez que  $\mathcal{V}$  atinge muito mais rapidamente o equilíbrio (em termos das outras duas variáveis).

Por outro lado, os valores próprios correspondentes a  $T$  e  $T^*$  são complexos conjugados, o que sugere um comportamento tipo foco estável no plano destas variáveis.

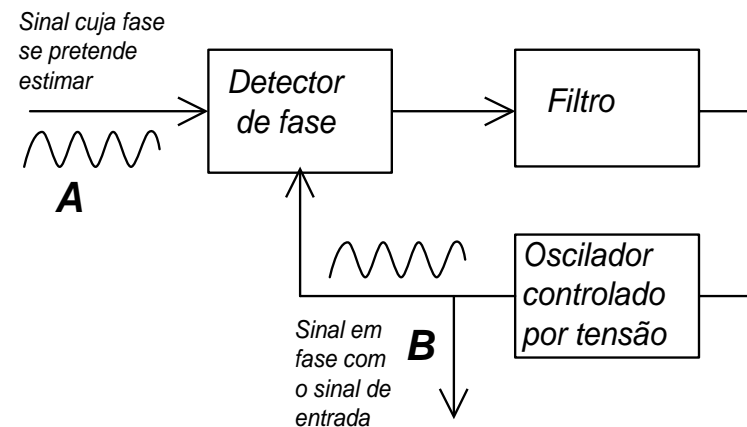


## Retrato de fase (tridimensional)



## Exemplo: O PLL

O PLL (*Phase Lock Loop* - malha de captura de fase) é um dispositivo não linear usado para resolver problemas de Telecomunicações (desmodulação de fase) e de Controlo (controlo de velocidade de precisão).



O PLL gera no ponto B um sinal em fase com o sinal de entrada em A, cuja fase se pretende determinar.

Modelo de um PLL:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \sin(\theta_i - x_1) - x_2$$

Admite-se que a fase do sinal de entrada é constante. A constante  $\theta_i$  representa a fase da sinusóide de entrada que se pretende estimar. A variável de estado  $x_1$  representa a estimativa dessa fase. Mostre que

$$\text{Ponto A: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Ponto B: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_i + \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

são dois pontos de equilíbrio do sistema.

- a) Calcule o sistema linearizado em torno de cada um destes pontos de equilíbrio.
- b) Para cada um dos sistemas linearizados que obteve em a) calcule os valores próprios e classifique-os qualitativamente (diga se são estáveis ou instáveis e se se trata de um nó, de um foco, de um centro ou de um ponto de sela).
- c) Diga, justificando, se pode concluir que o sistema não linear é assintoticamente estável em torno de cada um dos pontos de equilíbrio acima referidos.

## Exercício simples

Determine os pontos de equilíbrio e esboce o retrato de fase do sistema:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(1 - x_1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2$$

## Exercício

Nas impenetráveis florestas da Brutópia existem dois animais que competem entre si pela mesma fonte alimentar. Trata-se do Marsupilami (*Marsupilamis Simpaticus L.*) e do Monstro da Tasmânia (*Monstrus Ferocissimus L.*), representados em fotos (muito difíceis de obter) na figura 1.



Fig. 1 – O Marsupilami (à esquerda) e o Monstro da Tasmânia, cumprimentando os alunos de Modelação e Simulação.

Depois de porfiados esforços e após observações experimentais em que correram grandes riscos (quer o Marsupilami, quer o Monstro da Tasmânia são vegetarianos, mas os Brutopianos não) uma equipa de valentes biólogos do financiada pela FCT chegou à conclusão que as populações de Marsupilamis e de Monstros da Tasmânia podem ser modelados pelo sistema de equações diferenciais não lineares:

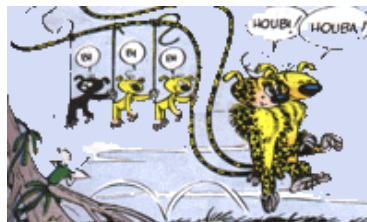
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(M_1 - \sigma_1 x_1 - \alpha_1 x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(M_2 - \sigma_2 x_2 - \alpha_2 x_1) \end{cases}$$

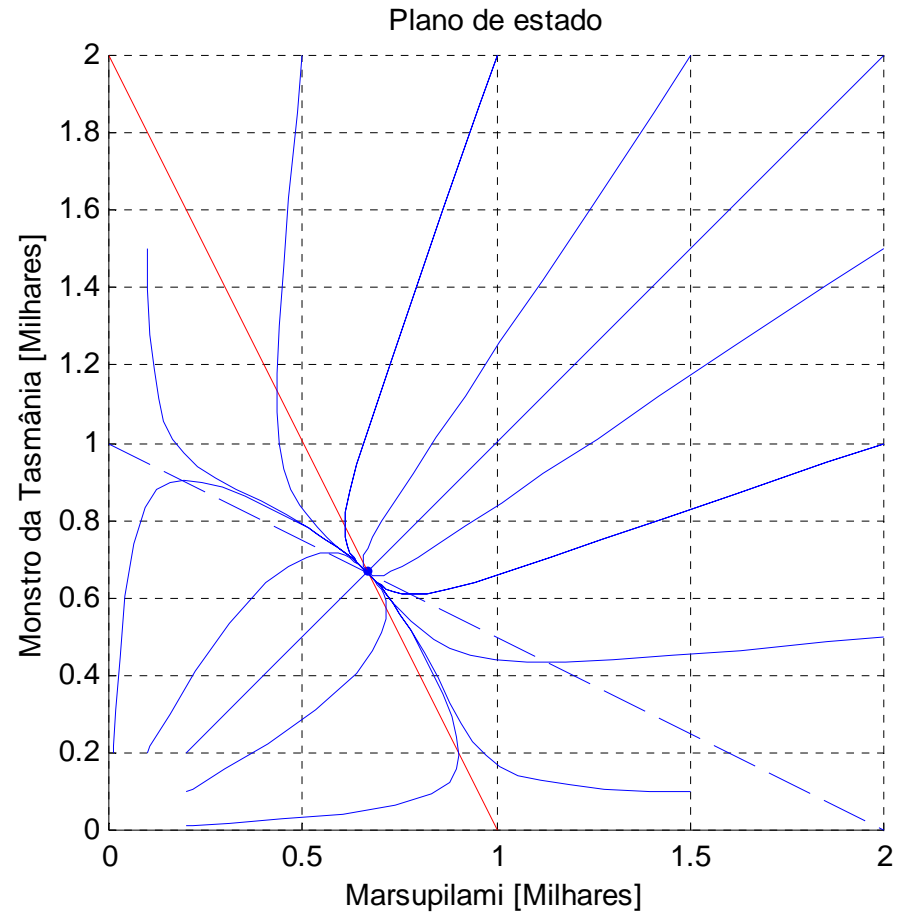
Particularize para a situação em que  $M_1 = M_2 = 1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$  e  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ . Determine todos os pontos de equilíbrio no primeiro quadrante do espaço de estados (isto é, para  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ ). Observe que há um deles que resulta da intersecção de duas rectas que correspondem a lugares geométricos em que as derivadas se anulam.

- a) Faça um diagrama em que representa estas rectas. Determine o ponto de equilíbrio em que as populações não se anulam simultaneamente, graficamente e analiticamente.



- b) Linearize o sistema em torno do ponto de equilíbrio em que ambas as populações são diferentes de zero. Que conclusões tira sobre a estabilidade deste ponto?
- c) Considere agora os outros pontos. Repita a linearização.
- d) Determine as zonas em que cada uma das derivadas é positiva e negativa.
- e) Esboce o retrato de fase do sistema.
- f) É possível observar-se durante um período de tempo longo uma situação em que apenas poucos casais de Monstros da Tasmânia coexistem com um número significativo (da ordem das centenas) de Marsupilamis?





Linearização em torno do ponto de equilíbrio onde ambos coexistem:

$$x_{eq} = 0.6667$$

$$0.6667$$

$$A1 = \begin{matrix} -0.6667 & -0.3333 \\ -0.3333 & -0.6667 \end{matrix}$$

$$V1 = \begin{matrix} -0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & -0.7071 \end{matrix}$$

$$D1 = \begin{matrix} -0.3333 & 0 \\ 0 & -1.0000 \end{matrix}$$

Linearização em torno do ponto de equilíbrio onde só há Marsupilamis:

$$x_{eq2} = 1$$

$$0$$

$$A2 = \begin{matrix} -1.0000 & -0.5000 \\ 0 & 0.5000 \end{matrix}$$

$$0 \quad 0.5000$$

$$V2 = \begin{matrix} 1.0000 & -0.3162 \\ 0 & 0.9487 \end{matrix}$$

$$0 \quad 0.9487$$

$$D2 = \begin{matrix} -1.0000 & 0 \\ 0 & 0.5000 \end{matrix}$$

$$0 \quad 0.5000$$