# 4.Sistemas lineares

*Objectivo*: Após completar este módulo o aluno deverá ser capaz de relacionar o tipo de resposta no tempo com a estrutura do sistema linear, definida pela posição dos pólos e dos zeros na função de transferência e pelos valores próprios e vectores próprios no modelo de estado.

Bibliogrfaia: Franklin, Powell e Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems, Addison Wesley.* Cap. 2 e 6.

A parte relativa à função de transferência corresponde à consolidação de matéria estudada em Sinais e Sistemas.

# Modelos de sistemas lineares em tempo contíuo

a) Modelo de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

b) Função de transferência

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}$$

Pólos: Raízes do denominador; Determinam o tipo de resposta

Zeros: Raízes do numerador

Cálculo da função de transferência a partir do modelo de estado:

$$G(s) = \frac{C\, adj(sI - A)b}{\det(sI - A)}$$

Pólos: Raízes do polinómio característico da matriz $A$ dado por

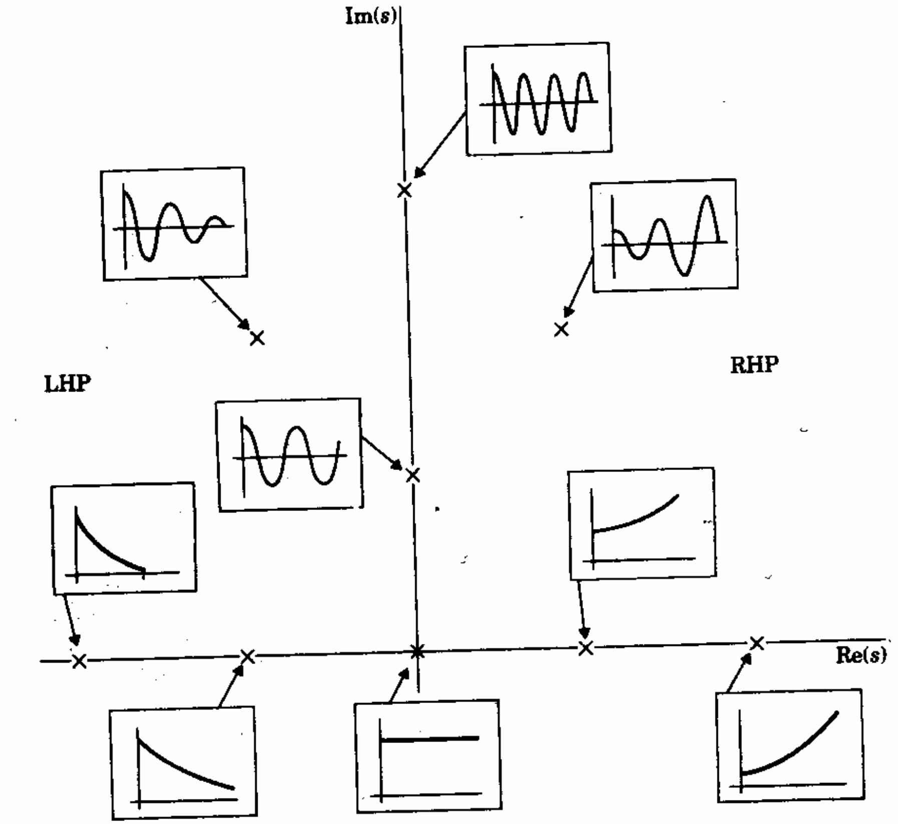
$$a(s) = \det(sI - A)$$

Pólos=Valores próprios da matriz $A$

Zeros: Raízes do polinómio

$$b(s) = C\, adj(sI - A)b$$

# Relação entre a posição dos pólos e a resposta impulsiva (contínuo)



# Teoremas do valor inicial e final (Transformada de Laplace)

$$TL\{f(t)\} = F(s)$$

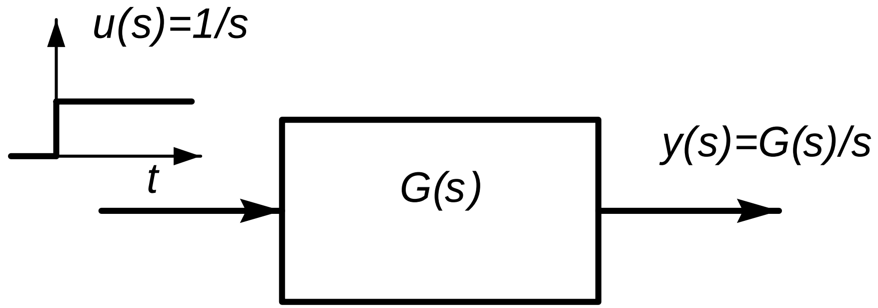
Teorema do valor inicial

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to +\infty} sF(s)$$

Teorema do valor final

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

# Resposta ao escalão de sistemas contínuos




Valor final da resposta da resposta ao escalão unitário:

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{G(s)}{s} = G(0)$$

O ganho estático de um sistema linear é dado por $G(0)$.

Isto tem uma interpretaçâo simples em termos da resposta em frequência como o ganho à frequência $\omega = 0$.

Valor inicial da resposta:

$$\lim_{t \to 0} y(t) = \lim_{s \to +\infty} sY(s) = \lim_{s \to +\infty} s \frac{1}{s} G(s) = \lim_{s \to +\infty} G(s)$$

Nº pólos > nº zeros $\Rightarrow$ Resposta ao escalão contínua

Nº pólos = nº zeros $\Rightarrow$ Resposta ao escalão descontinuidade com salto finito

Nº pólos < nº zeros $\Rightarrow$ Resposta ao escalão descontinuidade, salto infinito

Valor inicial da derivada da resposta ao escalão:

$$\lim_{t\to 0} \dot{y}(t) = \lim_{s\to +\infty} sL\{\dot{y}(t)\} = \lim_{s\to +\infty} s^2 Y(s) = \lim_{s\to +\infty} s^2 \frac{1}{s} G(s) = \lim_{s\to +\infty} sG(s)$$

Nº pólos > nº zeros+1 $\Rightarrow$ Derivada da resposta ao escalão contínua

Nº pólos = nº zeros+1 $\Rightarrow$ Derivada da resposta ao escalão descontínua, finita

Nº pólos < nº zeros+1 $\Rightarrow$ Derivada da resposta ao escalão descont., infinita

## Exemplos

Usando os teoremas do valor inicial e final para a resposta e a sua derivada, e o facto de os pólos serem reais, esboce qualitativamente a forma da resposta ao escalão dos sistemas com função de transferência:

a) $$G_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

b) $$G_2(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

c) $$G_3(s) = \frac{s}{(s+1)^2}$$

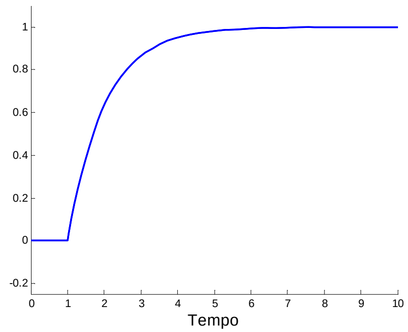
d) $$G_4(s) = \frac{1-s}{(s+1)^2}$$

a) $$G_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

Há apenas um pólo real e não há zeros $\Rightarrow$ Não há oscilações.

Excesso de pólos-zeros = 1. Logo a resposta é contínua mas a derivada para $t = 0$ é descontínua mas finita: $\lim_{t \to 0} \dot{y}(t) = \lim_{s \to +\infty} s \frac{1}{s+1} = 1$

O ganho estático é 1.

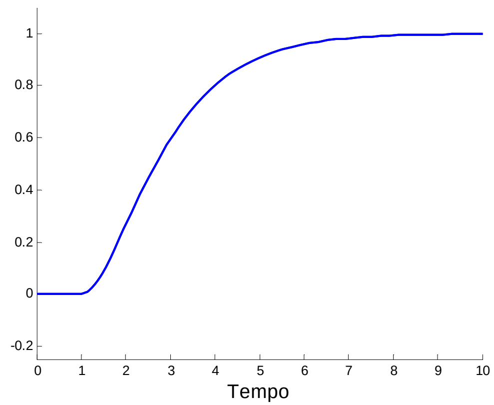


b) $G_2(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2}$

Há só dois pólos reais $\Rightarrow$ não há oscilações.

Excesso de pólos-zeros=2 $\Rightarrow$ Cointinuidade da resposta e da derivada.

Ganho estático = 1.

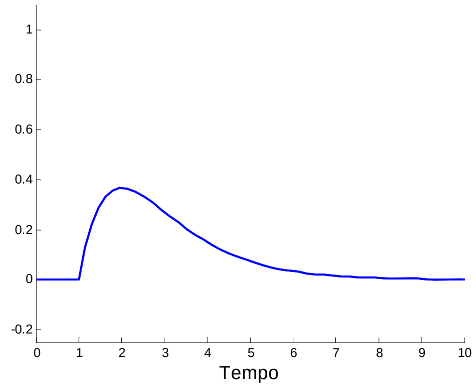


c) $G_3(s) = \dfrac{s}{(s+1)^2}$

Excesso de pólos-zeros=1 $\Rightarrow$ descontinuidade na derivada

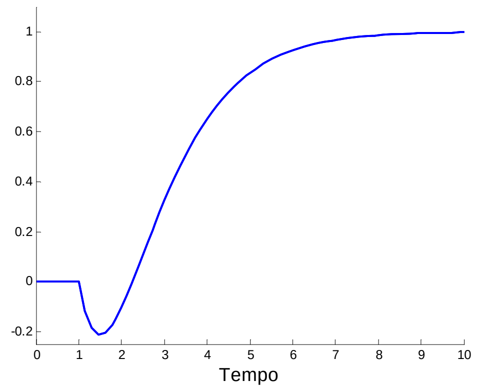
A derivada na origem é 1.

A resposta tende para zero.

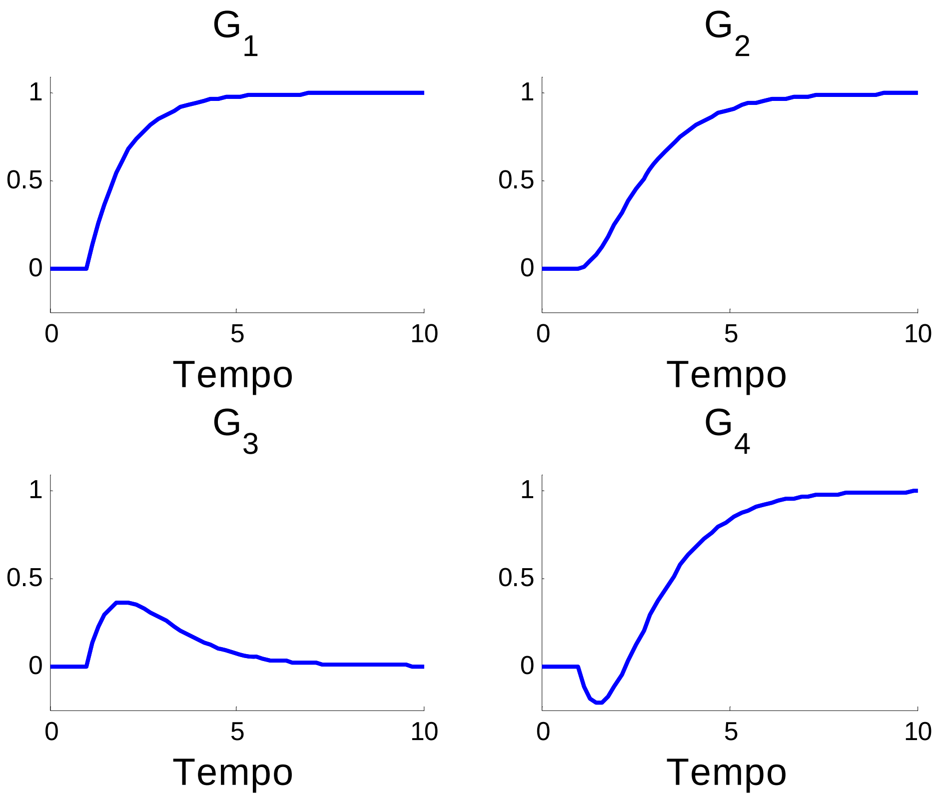


d) $$G_4(s) = \frac{1-s}{(s+1)^2}$$

Há uma descontinuidade na origem. A derivada inicial é negativa mas a resposta final é positiva $\Rightarrow$ efeito de resposta inversa devido ao sistema ser de fase não mínima.



# Resumo do exemplo



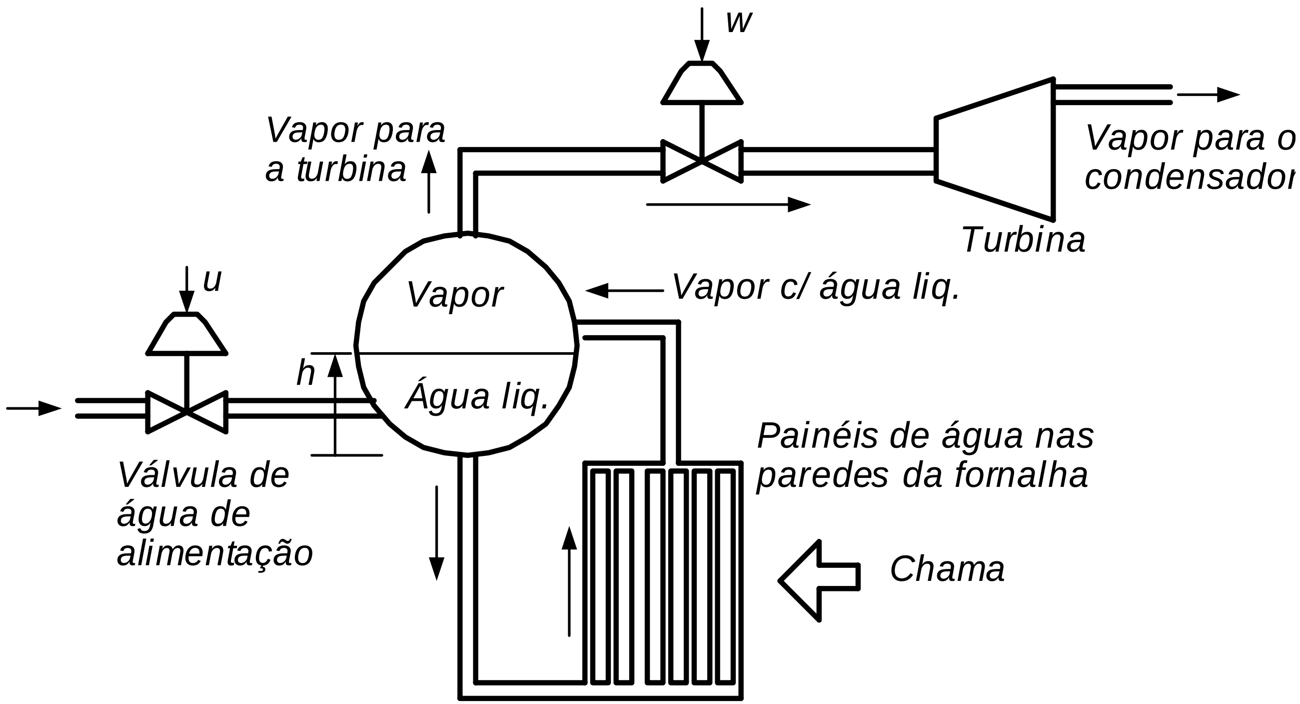

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

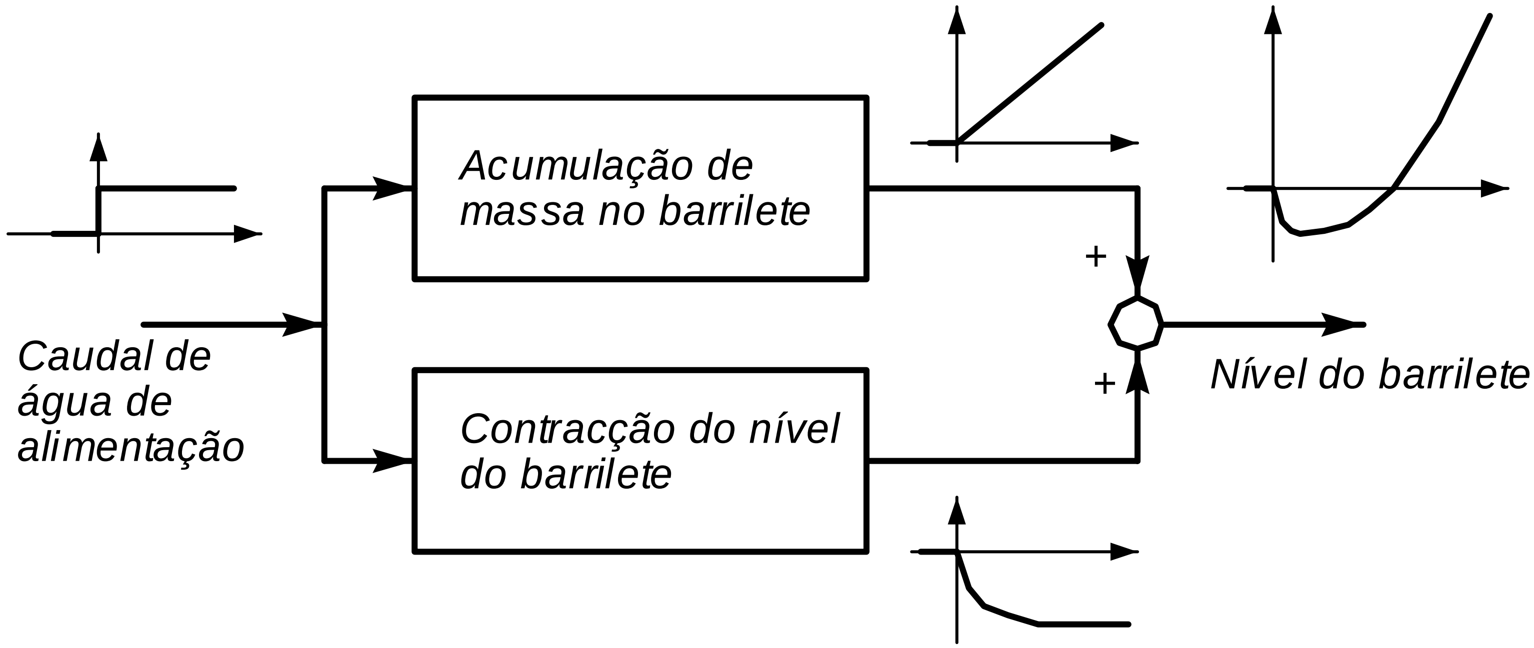
$$G_2(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$G_3(s) = \frac{s}{(s+1)^2}$$

$$G_4(s) = \frac{1-s}{(s+1)^2}$$

# Exemplo de um sistema de fase não mínima: Nível do barrilete num grupo gerador de vapor de uma caldeira



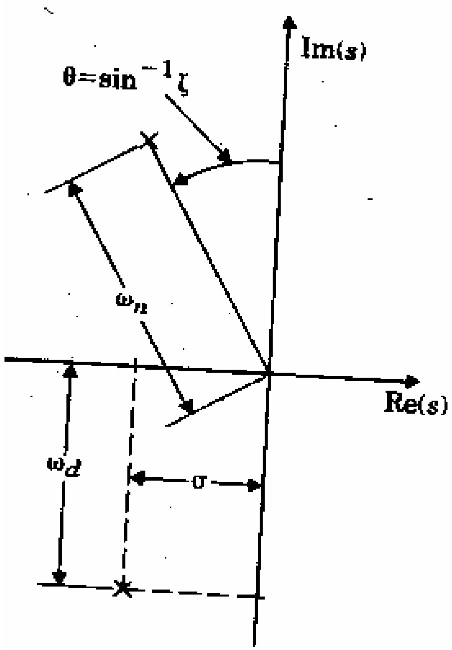


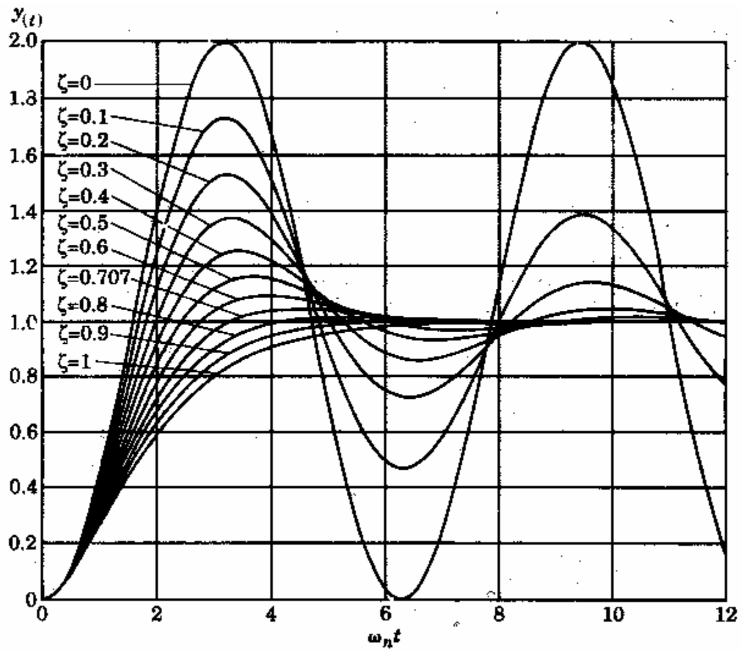

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{\tau s + 1} = \frac{(\tau - 1)s + 1}{s(\tau s + 1)}$$

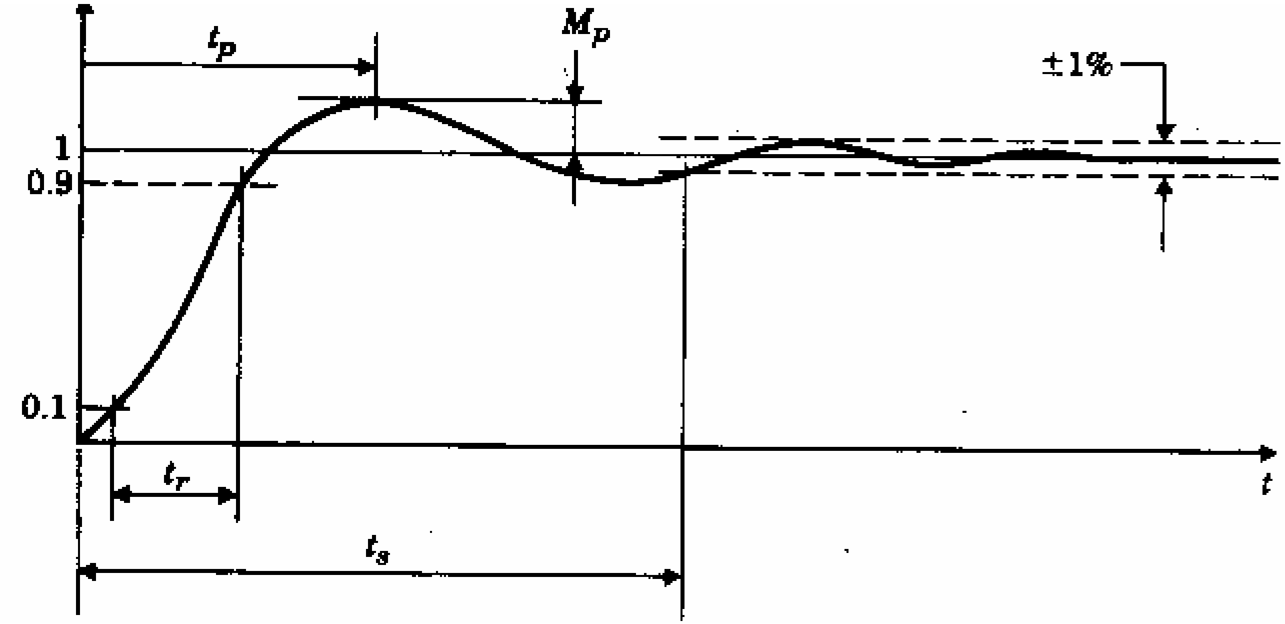
os dois pólos em paralelos criam um zero que é de fase não mínima se o arrefecimento fôr mais rápido que a acumulação de massa.

# Sistemas de 2ª ordem (continuo)

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2}$$






$$t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n} \qquad t_s = \frac{4.6}{\varsigma\omega_n} \qquad S = M_p = e^{-\pi\frac{\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}} \qquad 0 \le \varsigma \le 1$$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\varsigma$ - Determina a forma da resposta

$\omega_n$ - Determina a escala de tempo

Quando maior fôr $\omega_n$ maior é a largura de banda e mais rápido é o sistema.

## Modelo de estado de sistemas lineares: A equação homogénea

A equação (que descreve um sistema sem entrada):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad x(0) = x_0$$

denomina-se **equação homogénea**.

A solução desta equação desempenha um papel fundamental na solução da equação de estado de sistemas lineares com entrada e na compreensão da dinâmica local de muitos sistemas não lineares.

A estrutura da solução depende dos valores próprios e dos vectores próprios da matriz da dinâmica, $A$.

# Plano de estado

Para um sistema com duas variáveis de estado, o espaço de estado reduz-se a um plano, denominado *plano de estado*.

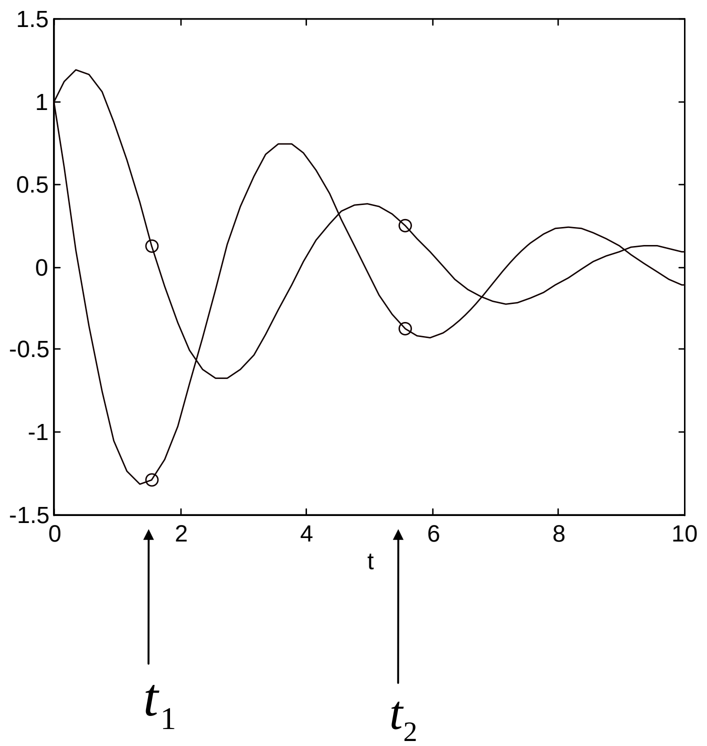
## Exemplo

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -1.5x_1 - 0.8x_2$$

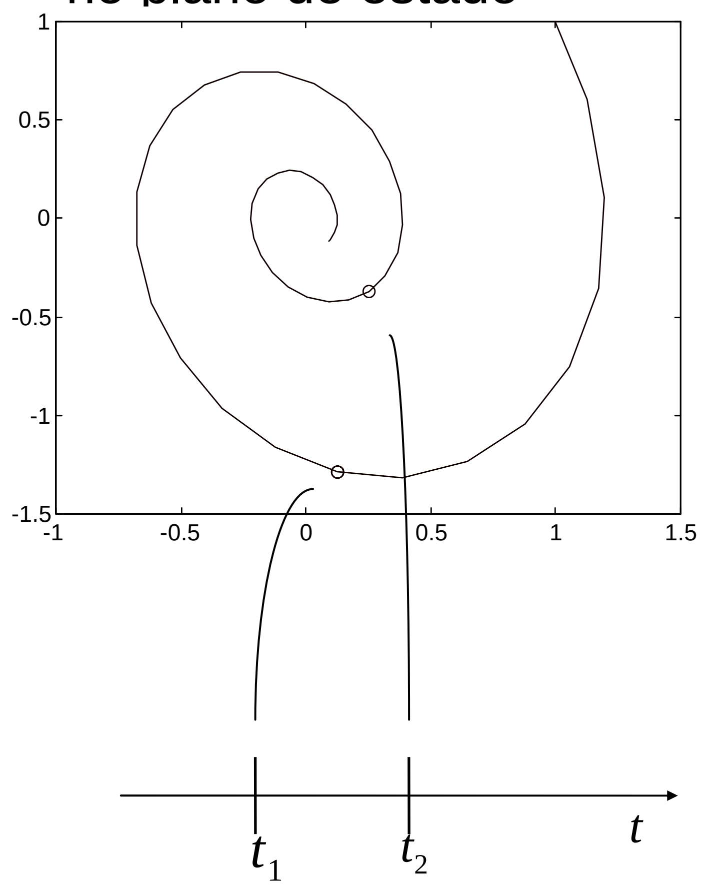
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.5 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

com condição inicial $x_1(0) = 1 \quad x_2(0) = 1$. A solução no tempo e a correspondente órbita no espaço (plano) de estado mostram-se na figura seguinte.

## Resposta no tempo




## Trajectória correspondente no plano de estado



À medida que o tempo decorre, o ponto no espaço de estado que representa o estado percorre a trajectória que corresponde a uma dada condição inicial.

A cada condição inicial corresponde uma trajectória diferente.

Como a solução do problema com uma dada condição inicial existe e é única, as diferentes trajectórias nunca se cruzam.

## Interpretação da solução da equação no espaço de estado

Equação homogénea:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

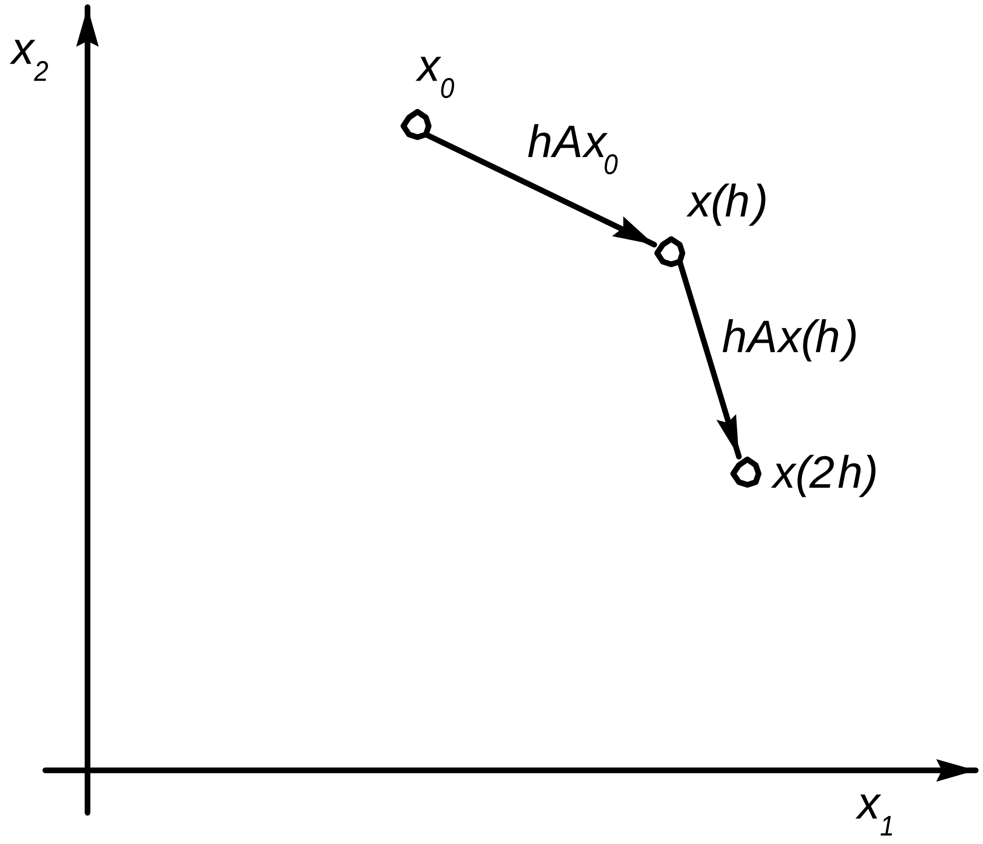
Aproximando a derivada por diferenças finitas:

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x((k+1)h) - x(kh)}{h}$$

A equação pode aproximar-se pela equação de diferenças

$$x((k+1)h) = x(kh) + h\,Ax(kh)$$

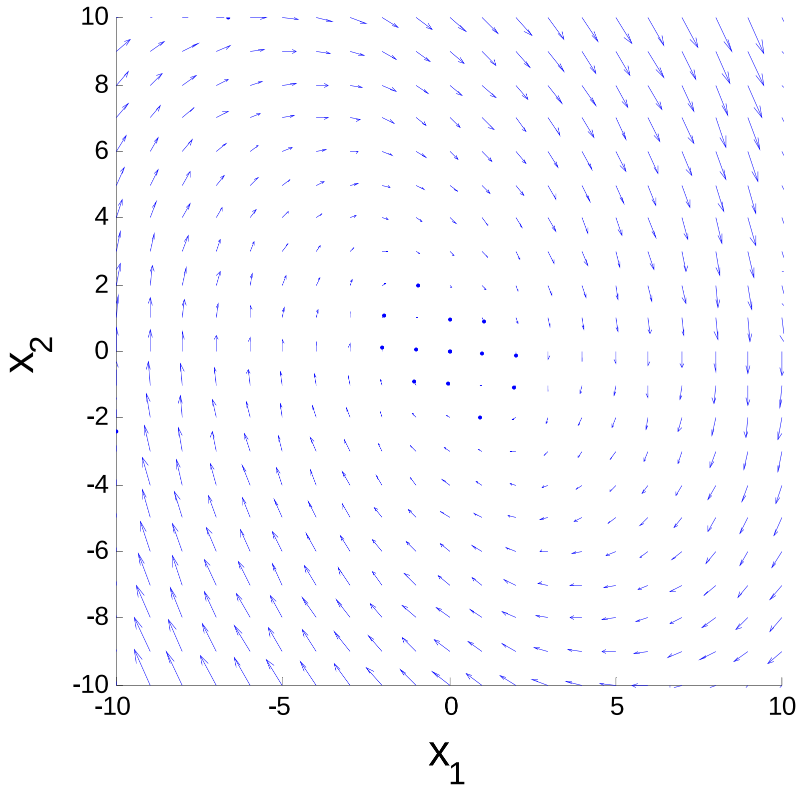
$$x((k+1)h) = x(kh) + h\,Ax(kh)$$



$$x((k+1)h) = x(kh) + h\,Ax(kh)$$

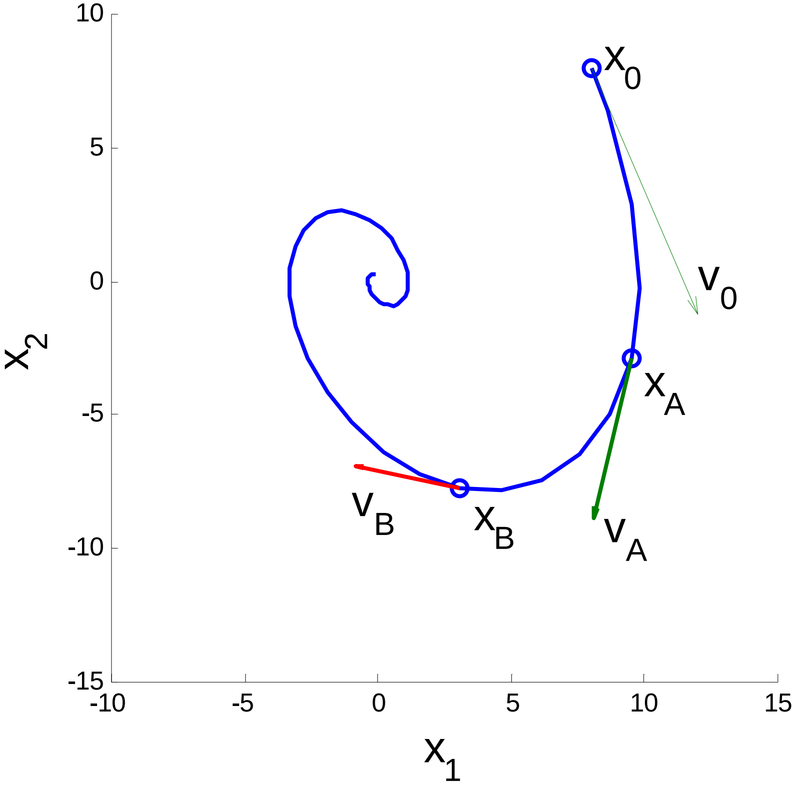
No espaço de estados, a solução pode assim ser interpretada do seguinte modo:

- Começamos com uma condição inicial $x_0$ no instante $k=0$.
- Para obter o novo ponto no instante $k=h$ somamos ao vector $x_0$ um vector um vector proporcional a $Ax_0$ (mais exactamente $hAx_0$). Obtém-se um ponto $x(h)=hAx_0$.
- O processo é em seguida iterado.



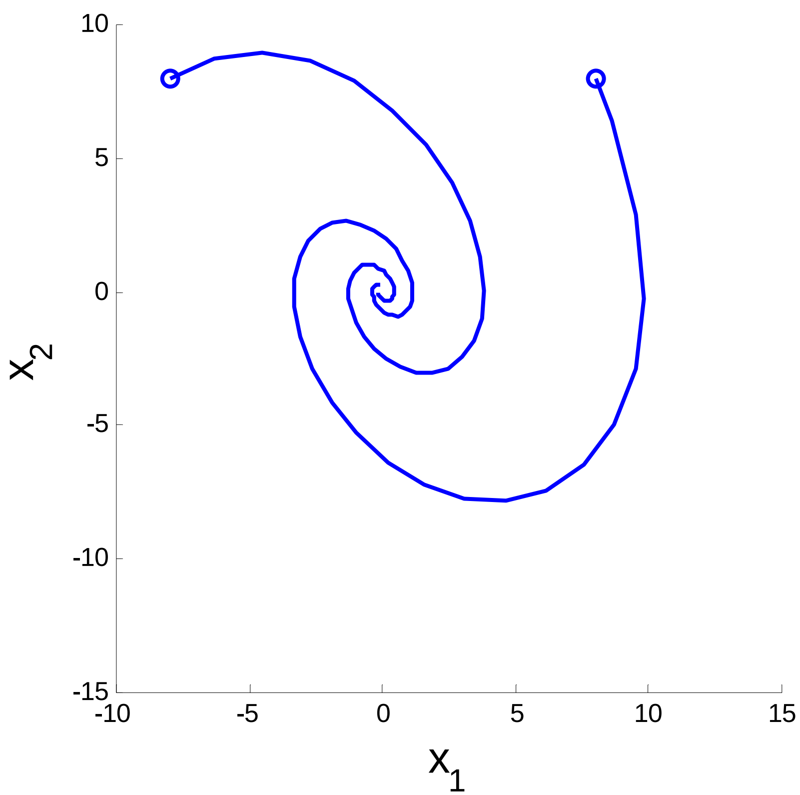

Em cada ponto $x$ do espaço de estados a função $Ax$ define um vector (campo de vectores) que indica qual a direcção seguida nesse ponto pela solução da equação diferencial.

O **campo de vectores** pode ser traçado no MATLAB com a função *quiver*.

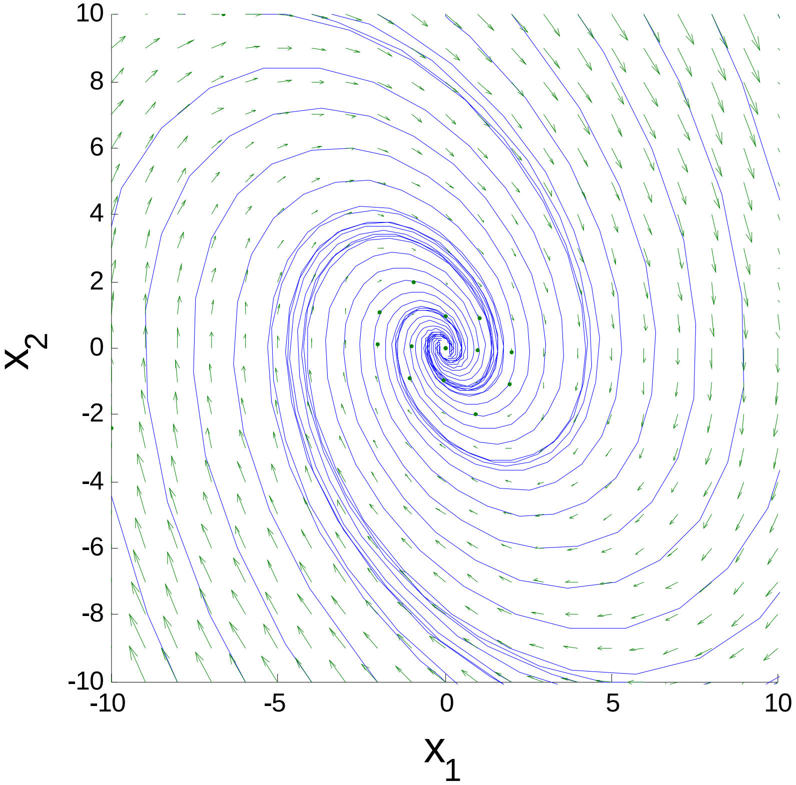



Partindo do ponto $x_0$, a solução avança (localmente) na direcção $v_0 = Ax_0$.

Em cada ponto a trajectória é tangente ao campo de vectores nesse ponto.




Se começarmos com outra condição inicial, obtemos uma outra trajectória. A figura mostra duas trajectórias geradas a partir de duas condições iniciais dfiferentes.


10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-10
-5
0
5
10
$x_1$
$x_2$

## Existência e unicidade de solução

A solução da equação de estado linear com condição inicial especificada

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad x(0) = x_0$$

existe e é única.

Este resultado implica que as trajectórias de estado não se podem cruzar pois, se assim fosse, haveria duas soluções diferentes da euqção fiferencial com a mesma condição inicial (correspondente ao ponto de cruzamento).

## Discussão

"Seguir" as direcções indicadas pelo campo de vectores proporciona um método numérico aproximado para resolver a equação de estado homogénea,

No entanto, gostaríamos de ter um método analítico e, sobretudo, de ter indicadores que revelem o **comportamento qualitativo da solução** (se oscila ou não, se tende para zero ou para infinito quando o tempo aumenta).

As propriedades da solução dependem da estrutura da matriz da dinâmica $A$, em particular dos seus valores próprios e vectores próprios, tema que estudaremos em seguida.

## Nota sobre álgebra linear: Valores próprios e vectores próprios

Dada uma matriz $A$ quadrada $[n \times n]$, os vectores próprios $v_i$ satisfazem

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

em que $\lambda_i$ é o correspondente valor próprio.

Por outras palavras: A direcção definida pelos vectores próprios permanece invariante na transformação associada à matriz.

Para uma matriz $n \times n$ há, no máximo, $n$ vectores próprios linearmente independentes (mas pode haver menos).

Aos vectores próprios também se dá o nome de *vectores modo*.

## Determinação dos vectores próprios e dos valores próprios

Como

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

os vectores próprios satisfazem o sistema de equações algébrico

$$(A - \lambda_i I)v_i = 0$$

Para que este sistema tenha soluções não triviais $v_i \neq 0$, ele tem de ser indeterminado, pelo que os valores próprios $\lambda_i$ devem satisfazer a equação polinomial:

$$\det(A - \lambda_i I) = 0$$

Para calcular os valores próprios e os vectores próprios de uma matriz $A$ quadrada $[n \times n]$ deve pois proceder-se do seguinte modo:

a) Calcular os valores próprios resolvendo a equação polinomial:

$$\det(A - \lambda_i I) = 0$$

b) Para cada um dos valores próprios $\lambda_i$ obter os valores próprios correspondentes resolvendo o sistema

$$(A - \lambda_i I)v_i = 0$$

Como este sistema é indeterminado, a sua solução é obtida a menos de uma constante de normalização, que pode ser escolhida como fôr conveniente.

## Cálculo dos valores e vectores próprios – Exemplo

Determine os valores próprios e os vectores próprios da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

## Solução

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

Polinómio característico da matriz:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda) + 10 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$$

Os valores próprios são as raízes deste polinómio:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 2$$

Vectores próprios:

$$\lambda_1 = -1 \qquad (A - \lambda_1 I)v_1 = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução é qualquer múltiplo de $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\lambda_2 = 2 \qquad (A - \lambda_2 I)v_2 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução é qualquer múltiplo de $v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

## Diagonalização de matrizes

*Hipótese*: A matriz $A$ tem $n$ vectores próprios linearmente independentes.

Matriz modal (as colunas são os vectores próprios):

$$M = \begin{bmatrix} v^1 & \cdots & v^n \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal dos valores próprios

$$\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Como, para cada par vector próprio/valor próprio

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

vem

$$AM = M\Lambda$$

ou seja, a matriz $A$ admite a seguinte decomposição:

$$A = M\Lambda M^{-1}$$

Tem-se ainda, multiplicando à direita por $M$ e à esquerda por $M^{-1}$:

$$\Lambda = M^{-1}AM$$

## Solução da equação homogénea por diagonalização

Esta técnica é válida quando a matriz da dinâmica tem $n$ vectores próprios linearmente independentes.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad x(0) = x_0$$

Faz-se uma transformação de variáveis associada à matriz modal:

$$z = M^{-1}x \quad \text{ou} \quad x = Mz$$

Nas coordenadas $z$ a dinâmica fica

$$\dot{z} = M^{-1}\dot{x} = M^{-1}Ax = M^{-1}AMz = \Lambda z$$

Ou seja, as componentes de $z$ ficam desacopladas, pelo que as equações podem ser resolvidas separadamente!

$$\dot{z} = \Lambda z$$

Esta equação matricial corresponde ao sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n = \lambda_n z_n \end{cases}$$

Como as equações estão separadas, podem ser resolvidas separadamente:

$$z_1(t) = k_1 e^{\lambda_1 t}$$

$$\ldots$$

$$z_n(t) = k_n e^{\lambda_n t}$$

Os $k_i$ são constantes que dependem das condições iniciais

Estrutura da resposta nas coordenadas $x$ :

$$x = Mz = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ k_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

ou seja:

$$x = k_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + k_n v_n e^{\lambda_n t}$$

A cada um dos termos

$$v_i e^{\lambda_i t}$$

dá-se o nome de ***modo*** do sistema. A resposta do sistema é uma combinação linear dos modos em que os coeficientes dependem das condições iniciais.

## Exemplo

Determine a resposta no tempo do sistema homogéneo

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

A estrutura da resposta é da forma:

$$x(t) = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-1t} + k_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}$$

Determinação das constantes $k_1$ e $k_2$ a partir das condições iniciais:

Para $t = 0$ :

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} k_1 + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} k_2$$

Este sistema pode ser escrito na forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad k_1 = 3, \quad k_2 = 1$$

## Retrato de fase de sistemas lineares

A solução do problema de valores iniciais

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad x(0) = x_0$$

com $A$ uma matriz com $n$ vectores próprios linearmente independentes é da forma

$$x(t) = k_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + k_n v_n e^{\lambda_n t}$$

em que as constantes $k_1, \ldots, k_n$ dependem das condições iniciais.

Consoante a posição no plano complexo dos valores próprios $\lambda_i$, assim será o tipo de resposta.

## Valores próprios reais

- Se os valores próprios forem reais as respostas correspondentes serão exponenciais.
- Se a parte real fôr positiva, as exponenciais serão crescentes e o estado tende para infinito.
- Se a parte real fôr negativa, as exponenciais serão decrescentes e o estado tende para zero.

## Valores próprios complexos conjugados

Os valores próprios complexos ocorrem sempre em pares conjugados para que a solução seja real.

Correspondem a termos oscilatórios multiplicados por uma exponencial decrescente se a parte real do valor próprio fôr negativa, crescente se fôr positiva, e sem amortecimento se fôr nula.

Recorde-se que

$$e^{(\alpha + j\beta)t} = e^{\alpha t}\left\{\cos(\beta t) + j\sin(\beta t)\right\}$$

## Exemplo: Valores próprios complexos conjugados

Resolva a equação

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad x(0) = x_0$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*Sugestão*: Calcule os valores próprios e os vectores próprios e use:

$$x(t) = k_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 v_2 e^{\lambda_{2n} t} = 2\,\mathrm{Re}\left\{ k_1 v_1 e^{\lambda_1 t} \right\}$$

Observe que esta expressão é válida por os dois termos da soma serem complexos conjugados.

Equação característica:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (s-1)^2 + 1 = 0$$

Os valores próprios são as soluções da equação característica:

$$\lambda_1 = 1 + j \qquad \lambda_1 = 1 - j$$

Os vectores próprios satisfazem o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} \lambda_i - 1 & 1 \\ -1 & \lambda_i - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i^1 \\ v_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como estas equações são dependentes, apenas usamos a primeira.

$$(\lambda_i - 1)v_i^1 + v_i^2 = 0$$

Escolhe-se a normalização

$$v_i^1 = 1$$

pelo que a equação anterior conduz a

$$v_i^2 = 1 - \lambda_i$$

ou seja

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$$

A solução da equação para $t = 0$ escreve-se

$$x_0 = k_1 v_1 + k_2 v_2$$

donde

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = x_0 \qquad \text{ou seja} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

cuja solução é $k_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} j \qquad k_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} j = k_1^*$

A solução da equação diferencial com a condição inicial especificada é pois

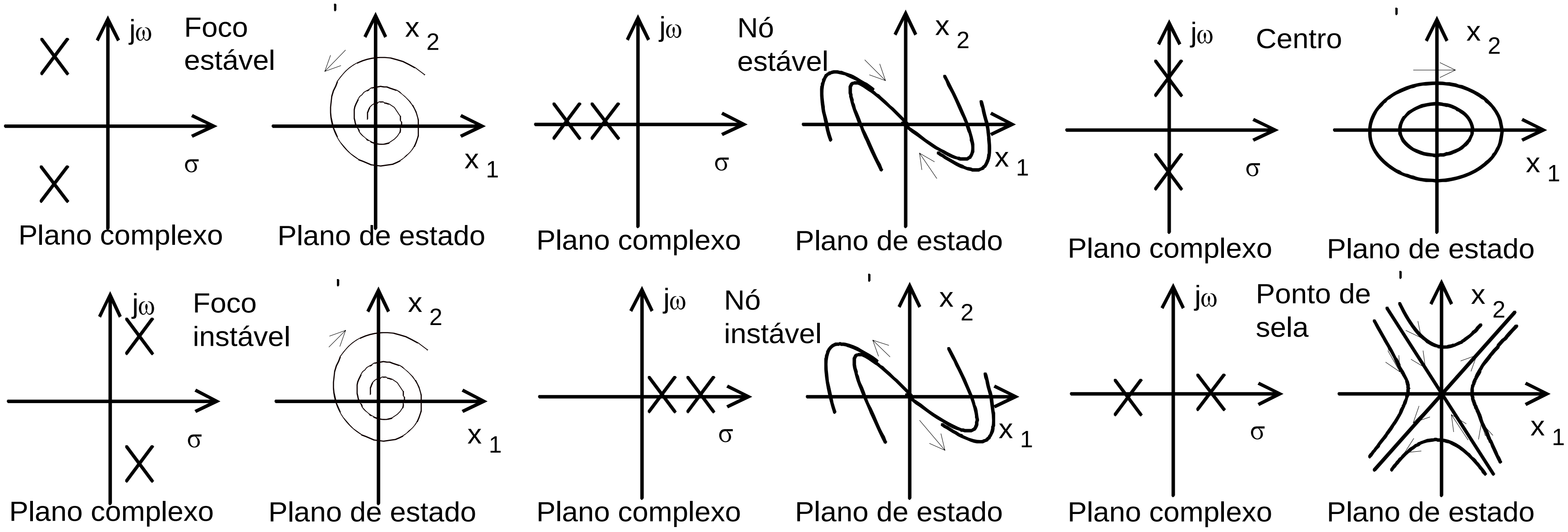
$$x(t) = 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}(1+j)\begin{bmatrix}1\\-j\end{bmatrix}e^{(1+j)t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\begin{bmatrix}1+j\\1-j\end{bmatrix}e^{t}(\cos t + j\sin t)\right\}$$

ou seja:

$$x(t) = e^{t}\begin{bmatrix}\cos t - \sin t\\ \cos t + \sin t\end{bmatrix}$$

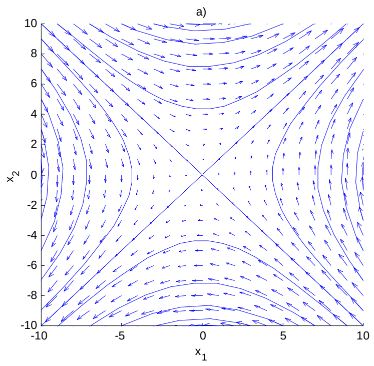
*Fim do exemplo*

# Classificação da dinâmica dos sistemas lineares

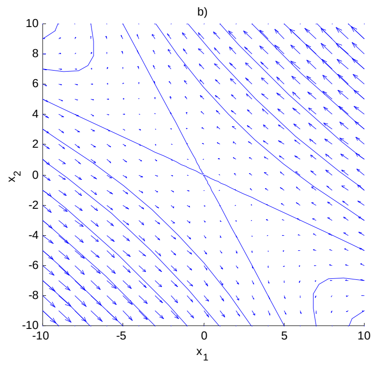


# Exercício

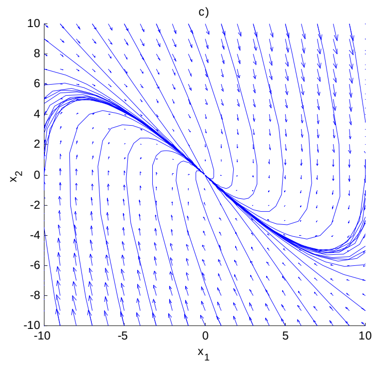
a)



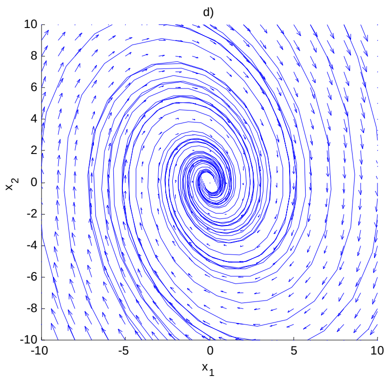
b)



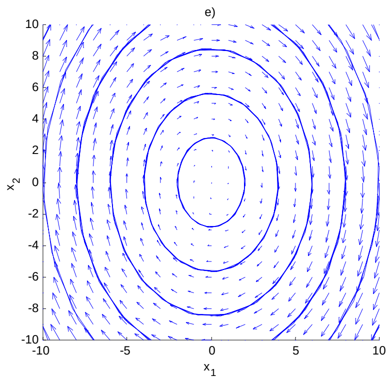
c)



d)



e)



$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.6 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} -5/3 & -4/3 \\ 4/3 & 5/3 \end{bmatrix}$$

a) Diga qual das matrizes correspondem a qual retrato de fase. Deve justificar a sua resposta com base nos valores próprios e vectores próprios (calcule os vectores próprios apenas quando necessário).

b) Indique uma condição incial não nula tal que o estado do sistema com matriz da dinâmica $A_3$ tenda para zero quando o tempo aumenta