6ª LISTA DE EXERCÍCIOS

Complementos de Álgebra - LMAC e MMA

2º semestre 2019/2020

Problema 1. Seja R um anel e seja M um R-módulo.
Definimos o **suporte** de M da seguinte maneira:

$$\mathrm{Supp}(M) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) : M_P \neq 0\}.$$

Mostre que se M é um R-módulo finitamente gerado, então
$\mathrm{Supp}(M) = V(\mathrm{Ann}_R(M))$, um subconjunto fechado de $\mathrm{Spec}(R)$.

Problema 2. Seja R um anel Noetheriano e seja $M \neq (0)$ um R-módulo finitamente gerado.

Mostre que:

i) $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$.

ii) Os elementos minimais de $\mathrm{Ass}(M)$ e de $\mathrm{Supp}(M)$ são os mesmos.

Problema 3. Seja R um anel Noetheriano e seja $M \neq (0)$ um R-módulo finitamente gerado.
Se W é um subconjunto multiplicativamente fechado de R, mostre que

$$\mathrm{Ass}(M_W) = \{P_W : P \in \mathrm{Ass}(M) \text{ e } P \cap W = \emptyset\}.$$

Problema 4. Encontre $\mathrm{Ass}(M)$ e $\mathrm{Supp}(M)$, onde M é o $\mathbb{Z}$-módulo

$$M = \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) .$$

Problema 5. Seja R um anel Noetheriano e seja Q um ideal de R.

i) Sabemos que Q primo $\Rightarrow$ Q primário.

ii) Há exemplos de ideais primários, que não são primos.

iii) Sabemos que Q primário $\Rightarrow$ $\sqrt{Q}$ primo.

iv) Há exemplos de ideais Q, tais que $\sqrt{Q}$ é primo, mas Q não é primário.

v) Mostre que $\sqrt{Q}$ maximal $\Rightarrow$ Q primário.

vi) Dê um exemplo de um ideal primário, Q, tal que $\sqrt{Q}$ não seja maximal.

Problema 6.

a) Mostre que os ideais primários de $\mathbb{Z}$ são (0) e $p^n\mathbb{Z}$, onde p é elemento primo de $\mathbb{Z}$ e $n \geq 1$.

b) Encontre um exemplo de um anel Noetheriano, com um ideal primário que não seja uma potência de um ideal primo.

Problema 7. Sabemos que num anel Noetheriano, um ideal irredutível é primário. A volta não é necessariamente verdadeira.
Encontre um exemplo de um anel Noetheriano R, que tenha um ideal primário, Q, não irredutível (talvez o Lema 5.15 ajude a encontrar um exemplo).

Problema 8. Seja R um anel Noetheriano.

a) Mostre que se P é ideal maximal de R, então P^n é ideal primário de R.

b) Mas em geral, se P é primo, P^n não tem que ser primário:
seja K um corpo, e seja $R = K[x, y, z]/I$, onde $I = (xy - z^2)$;
mostre que $P = (x + I, z + I)$ é um ideal primo de R, mas P^2 não é um ideal primário.