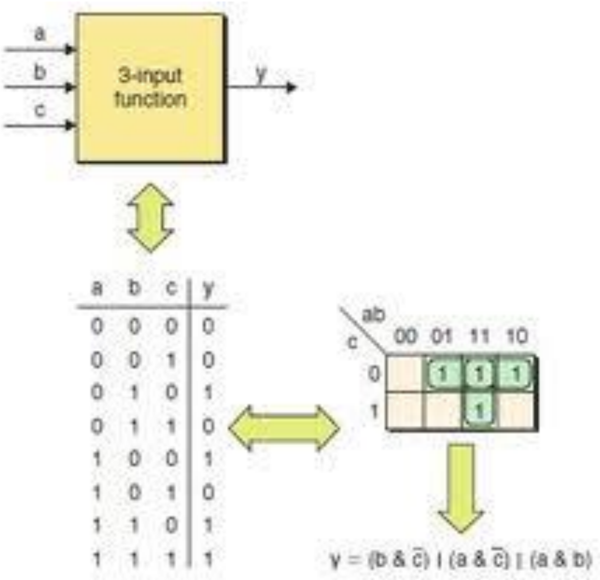
Sistemas Digitais (SD)

Minimização
de Funções Booleanas



Aula Anterior

- **Na aula anterior:**
  - Funções lógicas:
    - Circuitos com portas NAND (revisão);
    - Circuitos com portas NOR (revisão);
  - Representações normalizadas:
    - Soma de produtos;
    - Mintermos;
    - Produto de somas;
    - Maxtermos;
  - Funções incompletamente especificadas.

TÉCNICO LISBOA

Planeamento

SEMANA	TEÓRICA 1	TEÓRICA 2	PROBLEMAS/LABORATÓRIO
17/Fev a 21/Fev	Introdução	Sistemas de Numeração	
24/Fev a 28/Fev	CARNAVAL	Álgebra de Boole	P0
02/Mar a 06/Mar	Elementos de Tecnologia	Funções Lógicas	VHDL
9/Mar a 13/Mar	Minimização de Funções	Minimização de Funções	L0
16/Mar a 20/Mar	Def. Circuito Combinatório; Análise Temporal	Circuitos Combinatórios	P1
23/Mar a 27/Mar	Circuitos Combinatórios	Circuitos Combinatórios	**L1**
30/Mar a 03/Abr	Circuitos Sequenciais: Latches	Circuitos Sequenciais: Flip-Flops	P2
06/Abr a 10/Abr	FÉRIAS DA PÁSCOA	FÉRIAS DA PÁSCOA	FÉRIAS DA PÁSCOA
13/Abr a 17/Abr	Caracterização Temporal	Registos	L2
20/Abr a 24/Abr	Contadores	Circuitos Sequenciais Síncronos	P3
27/Abr a 01/Mai	Síntese de Circuitos Sequenciais Síncronos	Síntese de Circuitos Sequenciais Síncronos	L3
04/Mai a 08/Mai	Exercícios	Teste 1 Memórias	P4
11/Mai a 15/Mai	Máq. Estado Microprogramadas: Circuito de Dados e Circuito de Controlo	Máq. Estado Microprogramadas: Microprograma	L4
18/Mai a 22/Mai	Circuitos de Controlo, Transferência e Processamento de Dados de um Processador	Lógica Programável	P5
25/Mai a 29/Mai	P6	P6	L5

Sumário

- **Tema da aula de hoje:**
  - Minimização algébrica
  - Minimização de Karnaugh:
    - Representação de funções de n variáveis:
      - Quadros de 3 e 4 variáveis;
      - Quadros de n variáveis;
    - Agrupamentos de uns e zeros:
      - Eixos de simetria;
      - Implicantes e implicados;
      - Implicantes e implicados primos;
      - Implicantes e implicados primos essenciais.

- **Bibliografia:**
  - **M. Mano, C. Kime**: Secções 2.4 e 2.5
  - **G. Arroz, J. Monteiro, A. Oliveira**: Secção 2.3

Minimização Algébrica

SIMPLIFICAÇÃO ALGÉBRICA PELO TEOREMA DA ADJACÊNCIA

- Um termo com n literais tem n adjacentes possíveis

Exemplo:

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

m_0 tem 3 adjacentes possíveis, mas neste exemplo apenas m_1 também vale 1.

$$m_0 = \overline{x}_3.\overline{x}_2.\overline{x}_1 \rightarrow \begin{cases} \overline{x}_3.\overline{x}_2.x_1 = m_1 \\ \overline{x}_3.x_2.\overline{x}_1 = m_2 \\ x_3.\overline{x}_2.\overline{x}_1 = m_4 \end{cases}$$

m_0 apenas pode ser simplificado com m_1.

$$m_0 + m_1 = \overline{x}_3.\overline{x}_2.\left(x_1 + \overline{x}_1\right) = \overline{x}_3.\overline{x}_2$$

Minimização Algébrica

SIMPLIFICAÇÃO ALGÉBRICA PELO TEOREMA DA ADJACÊNCIA

Exemplo:

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

	Adjacentes	Obs.
m_0	m_1	m_0 só pode ser simplificado com m_1
m_1	m_0 , m_3 , m_5	m_1 pode ser simplificado com m_0 ou com m_3 ou com m_5
m_3	m_1 , m_7	m_3 pode ser simplificado com m_1 ou com m_7
m_5	m_1 , m_7	m_5 pode ser simplificado com m_1 ou com m_7
m_7	m_3 , m_5	m_7 pode ser simplificado com m_3 ou com m_5

Minimização Algébrica

SIMPLIFICAÇÃO ALGÉBRICA PELO TEOREMA DA ADJACÊNCIA

Exemplo:

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\begin{aligned} f = {} & (m_0 + m_1) \quad \leftarrow \text{essencial} \\ & + (m_3 + m_7) \\ & + (m_1 + m_5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f = {} & \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_2 \\ & \left.\begin{aligned} & + x_2 \cdot x_1 \\ & + \bar{x}_2 \cdot x_1 \end{aligned}\right\} \quad \textit{adjacentes} \end{aligned}$$

$$f = \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_2 + x_1$$

Minimização Algébrica

RE-ORDENAÇÃO DA TABELA

Exemplo:

	x_3	x_2	x_1	f
m_0	0	0	0	1
m_1	0	0	1	1
m_3	0	1	1	1
m_2	0	1	0	0
m_6	1	1	0	0
m_7	1	1	1	1
m_5	1	0	1	1
m_4	1	0	0	0

Os termos em linhas consecutivas diferem apenas de 1 bit – **código de Gray**

Deste modo, grande parte dos termos adjacentes ficam representados em linhas contíguas, o que facilita a identificação de adjacências.

(Não é habitualmente usada, porque se preferem os quadros a 2 dimensões → ver a seguir…)

Quadro de Karnaugh

QUADRO DE KARNAUGH

- Reordenação da tabela da verdade em 2 dimensões.

Exemplo:

	x_3	x_2	x_1	f
m_0	0	0	0	1
m_1	0	0	1	1
m_3	0	1	1	1
m_2	0	1	0	0
m_6	1	1	0	0
m_7	1	1	1	1
m_5	1	0	1	1
m_4	1	0	0	0

→

x_3 \ $x_2 x_1$	00	01	11	10
0	^{0} 1	^{1} 1	^{3} 1	^{2} 0
1	^{4} 0	^{5} 1	^{7} 1	^{6} 0

Maurice Karnaugh
4/Out/1924,NY

Os **termos adjacentes** ficam representados em linhas/colunas contíguas.

Quadro de Karnaugh

QUADRO DE KARNAUGH

- Os **termos adjacentes** ficam representados em linhas/colunas contíguas.

Exemplo:

	x_3	x_2	x_1	f
m_0	0	0	0	1
m_1	0	0	1	1
m_3	0	1	1	1
m_2	0	1	0	0
m_6	1	1	0	0
m_7	1	1	1	1
m_5	1	0	1	1
m_4	1	0	0	0

x_3 \ $x_2 x_1$	00	01	11	10
0	0: 1	1: 1	3: 1	2: 0
1	4: 0	5: 1	7: 1	6: 0

Termos Adjacentes

x_3 \ $x_2 x_1$	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0

x_3 \ $x_2 x_1$	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0

Termos Adjacentes

Quadro de Karnaugh

IDENTIFICAÇÃO DOS TERMOS NO QUADRO DE KARNAUGH

- Exemplos:

x_3 \ $x_2\,x_1$	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0

O termo é 1 quando: x_3=0; e x_2=0; e (x_1=0 ou x_1=1)

ou seja: $\overline{x_3}\cdot\overline{x_2}\cdot\underbrace{(\overline{x_1}+x_1)}_{\textit{simplificados}} \rightarrow \overline{x_3}\cdot\overline{x_2}$

x_3 \ $x_2\,x_1$	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0

O termo é 1 quando: (x_3=0 ou x_3=1); e (x_2=0 ou x_2=1); e x_1=1

ou seja: $\underbrace{\left((\overline{x_3}+x_3)\cdot(\overline{x_2}+x_2)\right)}_{\textit{simplificados}}\cdot x_1 \rightarrow x_1$

Quadro de Karnaugh

REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES – Q. DE KARNAUGH

- Quadros de 3 Variáveis

X \ YZ	00	01	11 (Y)	10 (Y)
0	$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	$\overline{X}\,\overline{Y}Z$	$\overline{X}YZ$	$\overline{X}Y\overline{Z}$
X 1	$X\overline{Y}\,\overline{Z}$	$X\overline{Y}Z$	XYZ	$XY\overline{Z}$
		Z	Z	

f(X,Y,Z)

X \ YZ	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

- Exemplo:

$$f(X,Y,Z) = \Sigma m(0,3,5,6)$$

X \ YZ	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1

Quadro de Karnaugh

■ REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES – Q. DE KARNAUGH (cont.)

- Quadros de 4 Variáveis:

A mesma função pode ter representações diferentes, mas equivalentes, num Quadro de Karnaugh, pela simples alteração da localização das variáveis

f(W,X,Y,Z)

WX \ YZ	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

f(W,X,Y,Z)

YZ \ WX	00	01	11	10
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8
01	m_1	m_5	m_{13}	m_9
11	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}

Quadro de Karnaugh

REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES – Q. DE KARNAUGH (cont.)

- Quadros de N Variáveis

Um Quadro de Karnaugh de N variáveis é obtido pela duplicação de quadro de N-1 variáveis, devendo ser acrescentada a N-ésima variável e o correspondente eixo de simetria de modo a manter a representação das variáveis de forma reflectida.

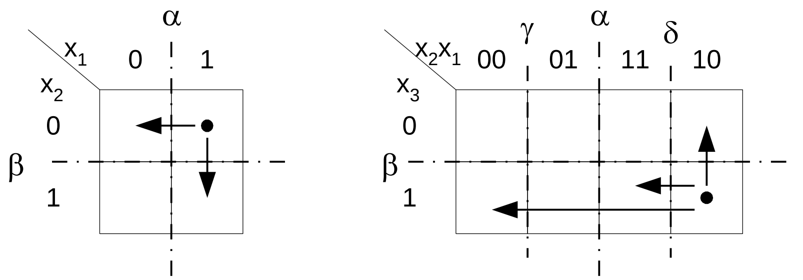
f(V,W,X,Y,Z)

V W \ XYZ	000	001	011	010	110	111	101	100
00	m_0	m_1	m_3	m_2	m_6	m_7	m_5	m_4
01	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	m_{14}	m_{15}	m_{13}	m_{12}
11	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}	m_{30}	m_{31}	m_{29}	m_{28}
10	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}	m_{22}	m_{23}	m_{21}	m_{20}

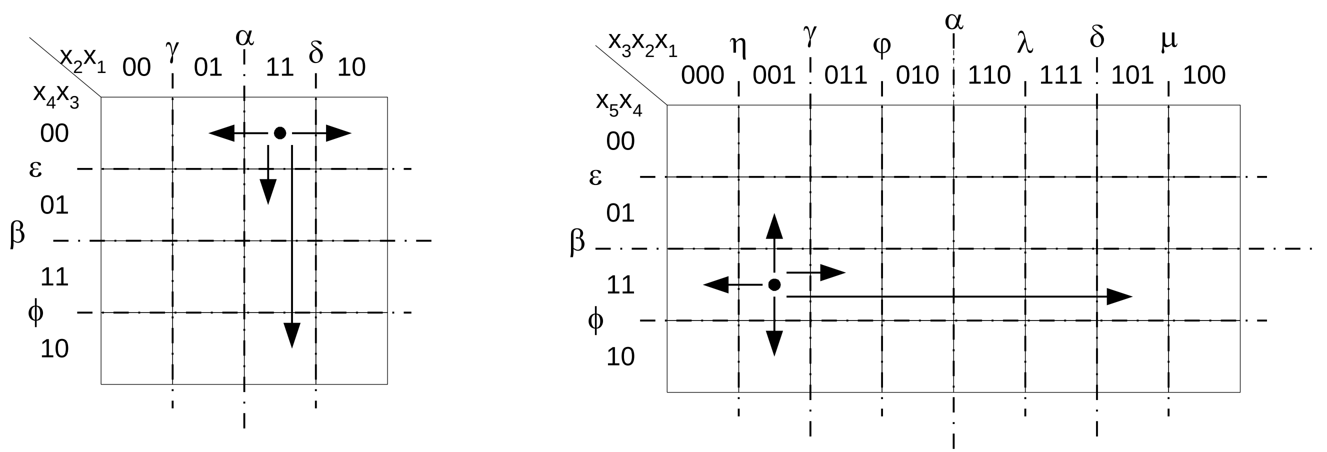
Agrupamento de Mintermos e Maxtermos

■ AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS

- Eixos de Simetria:



2 **quadrados** dizem-se **adjacentes** em termos lógicos quando apenas uma variável lógica altera o seu valor na representação desses quadrados.



Num quadro de N variáveis, para cada quadrado existem <u>sempre</u> **N** outros adjacentes

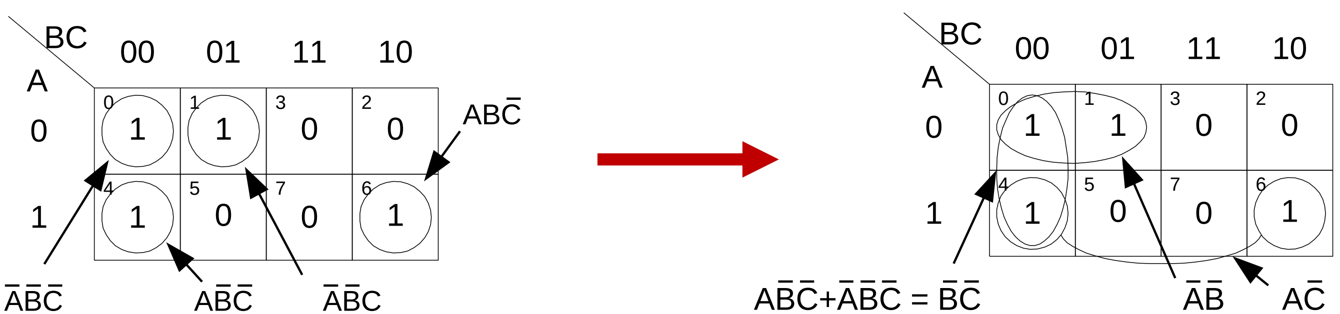
Agrupamento de Mintermos e Maxtermos

AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

- Um **termo de produto** diz-se um **implicante** da função sse essa função assume 1 para todos os mintermos que o constituem.

Exemplos:

$f(A,B,C) = \Sigma m(0,1,4,6)$



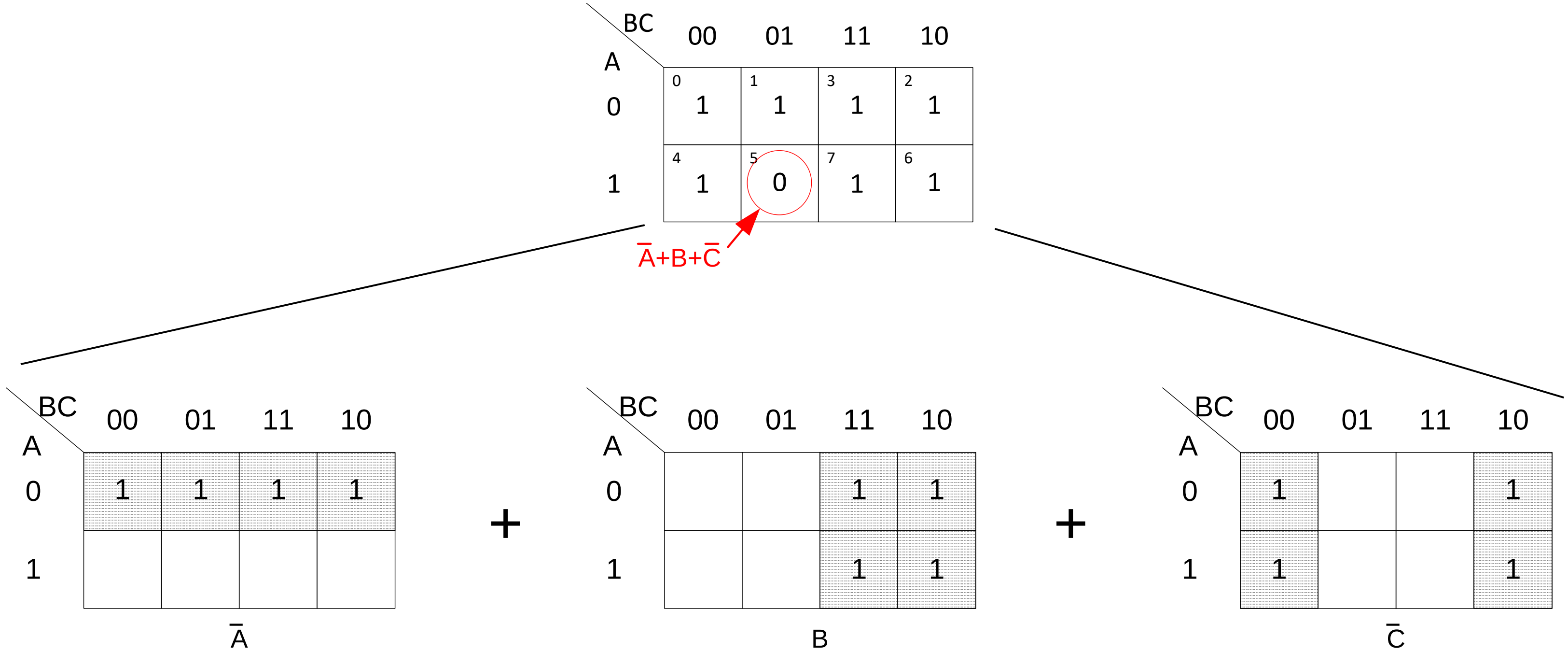
Agrupamentos de 2^n quadrados correspondem à eliminação de n literais

TÉCNICO LISBOA

Agrupamento de Mintermos e Maxtermos

AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

- Exemplos da representação de **Maxtermos**:



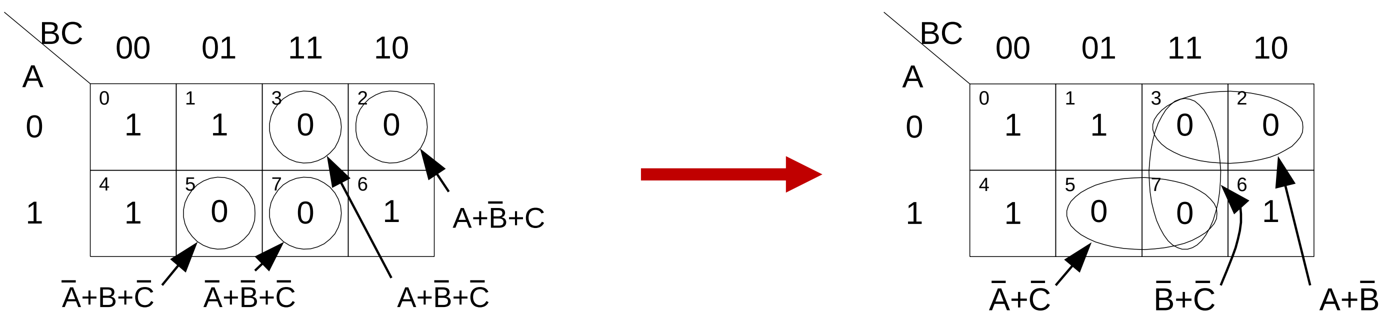
Agrupamento de Mintermos e Maxtermos

AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

- Um **termo de soma** diz-se um **implicado** da função sse essa função assume 0 para todos os maxtermos que o constituem.

Exemplos:

$f(A,B,C) = \prod M(2,3,5,7)$

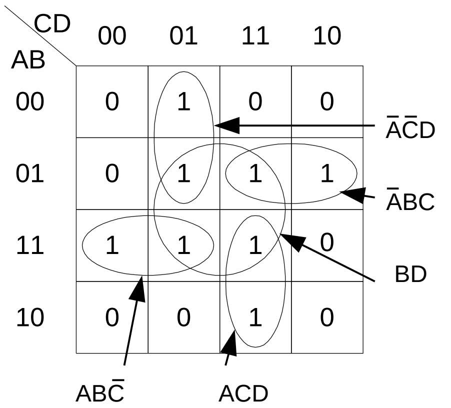


Agrupamentos de 2^n quadrados correspondem à eliminação de n literais

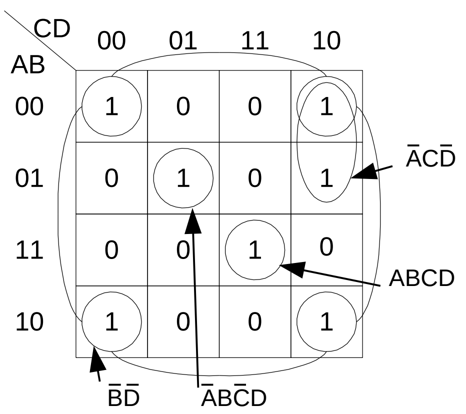
Agrupamento de Mintermos e Maxtermos

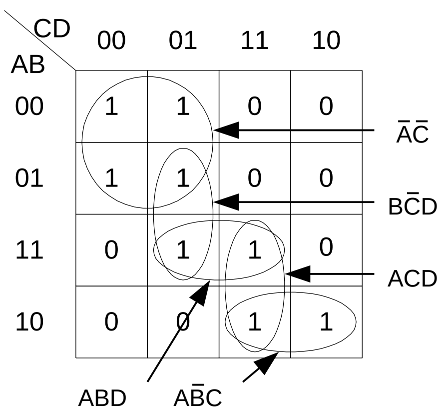
AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

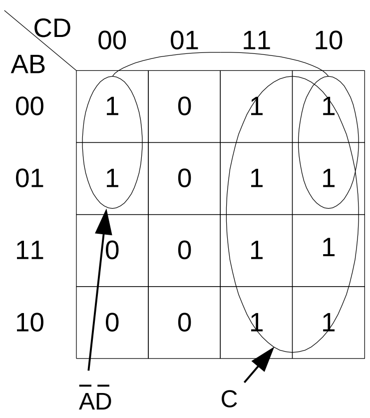
- Um **termo de produto** diz-se um **implicante primo** se a remoção de um qualquer literal, desse termo de produto, resulta num termo de produto que não é um implicante da função.



Exemplos:



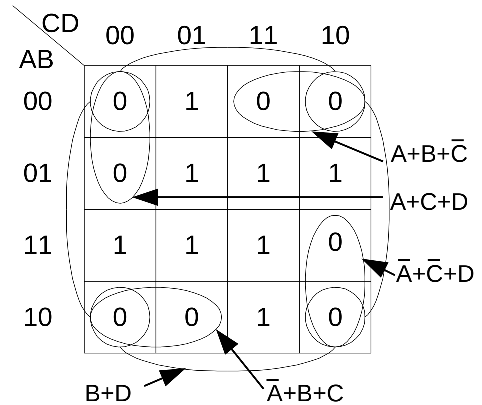




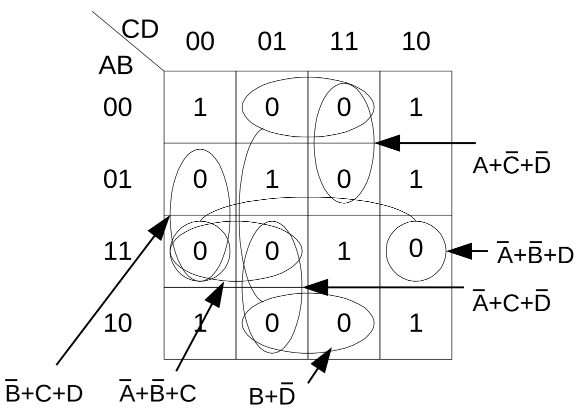
Agrupamento de Mintermos e Maxtermos

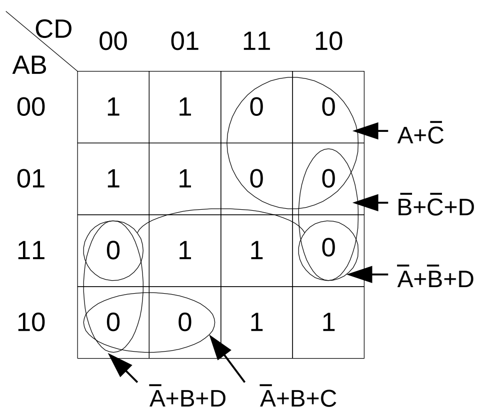
AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

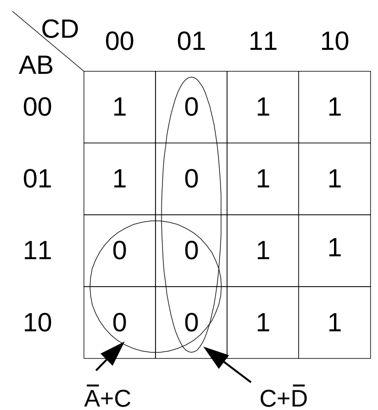
- Um **termo de soma** diz-se um **implicado primo** se a remoção de um qualquer literal, desse termo de soma, resulta num termo de soma que não é um implicado da função.



Exemplos:







Agrupamento de Mintermos e Maxtermos

AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

- Um implicante primo de uma função diz-se **implicante primo essencial** se contém pelo menos um mintermo não contido em nenhum outro implicante primo.

Exemplos:

Implicantes Primos

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

$\bar{A}\bar{C}D$

$\bar{A}BC$

BD

$AB\bar{C}$

ACD

Implicantes Primos Essenciais

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

Implicantes Primos

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

Implicantes Primos Essenciais

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

Agrupamento de Mintermos e Maxtermos

AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

- Um implicado primo de uma função diz-se **implicado primo essencial** se contém pelo menos um maxtermo não contido em nenhum outro implicado primo.

Exemplos:

Implicados Primos

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

$A+B+\bar{C}$

$A+C+D$

$\bar{A}+\bar{C}+D$

$B+D$

$\bar{A}+B+C$

Implicados Primos Essenciais

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

Implicados Primos

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

Implicados Primos Essenciais

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

Próxima Aula

Próxima Aula

- **Tema da Próxima Aula:**
  - Minimização de Karnaugh:
    - Agrupamentos de uns e zeros:
      - Eixos de simetria;
      - Implicantes e implicados;
      - Implicantes e implicados primos;
      - Implicantes e implicados primos essenciais.
    - Método de minimização de karnaugh:
      - Algoritmo de minimização;
      - Forma normal/mínima dijuntiva;
      - Forma normal/mínima conjuntiva;
      - Funções incompletamente especificadas.

Agradecimentos

Algumas páginas desta apresentação resultam da compilação de várias contribuições produzidas por:

- Nuno Roma
- Guilherme Arroz
- Horácio Neto
- Nuno Horta
- Pedro Tomás