2^{a} LISTA DE EXERCÍCIOS

Complementos de Álgebra - LMAC e MMA

2^{o} semestre 2019/2020

Problema 1. Seja R um anel e seja I um ideal de R.

Definimos o **radical** de I, $\sqrt{I}$, da seguinte maneira:

$$\sqrt{I} = \{r \in R : \ r^n \in I, \text{ para algum } n \geq 1\}.$$

Mostre que:

a) $\sqrt{I}$ é um ideal de R.

b) Se P é um ideal primo de R, então $\sqrt{P^n} = P$.

c) Se $I \neq R$, então $\sqrt{I} = \bigcap_{I \subseteq P,\, P \text{ primo}} P$.

Problema 2. Seja R um anel e $\text{Spec}(R) = \{P : P \text{ é um ideal primo de } R\}$.
Se $E \subseteq R$, defina $V(E) = \{P \in \text{Spec}(R) : \ E \subseteq P\}$.

Mostre que:

i) Se $I = RE$ (ideal de R gerado por E), então $V(E) = V(I) = V(\sqrt{I})$.

ii) $V(\{0\}) = \text{Spec}(R)$ e $V(\{1\}) = \emptyset$.

iii) Se $\{E_k\}_{k \in K}$ é uma família de subconjuntos de R, então

$$V(\bigcup_{k \in K} E_k) = \bigcap_{k \in K} V(E_k).$$

iv) Dados dois ideais I e J de R, $V(I \cap J) = V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.

Definição: O problema 5 mostra que os conjuntos $V(E)$, $E \subseteq R$, satisfazem os axiomas dos conjuntos fechados num espaço topológico. Definimos assim uma topologia no $\text{Spec}(R)$, que se chama a **topologia de Zariski**.

Definição: Um espaço topológico chama-se **Noetheriano** se os seus subconjuntos abertos satisfazem a condição de cadeia ascendente, ou equivalentemente, se os seus subconjuntos fechados satisfazem a condição de cadeia descendente.

Problema 3. Mostre que se R é um anel Noetheriano, então $\mathrm{Spec}(R)$ (com a topologia de Zariski) é um espaço topológico Noetheriano.