Probabilidades e Estatística

LEE, LEIC-A, LEIC-T, LEMat, LMAC, LERC, MEAer, MEBiol, MEBiom, MEEC, MEFT, MEMec, MEQ

1º semestre – 2019/2020
16/11/2019 – **11:00**

Duração: 90 minutos **1º Teste B**

Justifique convenientemente todas as respostas

Grupo I	10 valores

1. Em determinado troço rodoviário, 75% do tráfego é diurno e 25% é noturno. Apurou-se que a probabilidade de uma viatura não se despistar nesse troço, sabendo que a viatura circula de dia (respetivamente à noite), é igual a 0.9994 (respetivamente 0.9978).

(a) Obtenha a probabilidade de uma viatura selecionada ao acaso, entre as que circulam nesse troço rodoviário, vir a despistar-se. (2.5)

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	**Probabilidade**
$D = \{$viatura circula de dia$\}$	$P(D) = 0.75$
$N = \{$viatura circula à noite$\}$	$P(N) = 0.25$
$V = \{$viatura despistar-se$\}$	$P(V) = ?$
	$P(V \mid D) = 1 - 0.9994 = 0.0006$
	$P(V \mid N) = 1 - 0.9978 = 0.0022$

- **Probabilidade pedida**
Pela lei da probabilidade total, temos

$$\begin{aligned} P(V) &= P(V \mid D) \times P(D) + P(V \mid N) \times P(N) \\ &= 0.0006 \times 0.75 + 0.0022 \times 0.25 \\ &= 0.001. \end{aligned}$$

(b) Determine a probabilidade de uma viatura ter circulado durante a noite nesse troço rodoviário, sabendo que a viatura se despistou. (2.5)

- **Probabilidade pedida**
Tirando partido do teorema de Bayes, segue-se

$$\begin{aligned} P(N \mid V) &= \frac{P(V \mid N) \times P(N)}{P(V)} \\ &\overset{(a)}{=} \frac{0.0022 \times 0.25}{0.001} \\ &= 0.55. \end{aligned}$$

2. Suponha que amostras de água são obtidas de modo independente e submetidas a análises bacteriológicas. A engenheira química responsável por estas análises considera que o número de bactérias (indicadoras de contaminação fecal), por 1 ml de água, é uma variável aleatória X com distribuição de Poisson com valor esperado igual a 7.

(a) Determine as duas modas de X. (2.5)

- **Variável aleatória de interesse**
$X =$ no. de bactérias em amostra de 1 ml de água

- **Distribuição de X**
$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, com $\lambda = E(X) = 7$.

- **F.p. de X**
$P(X = x) = \frac{e^{-7}\, 7^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

- **Moda de X**

  Representemos a(s) moda(s) de X por $mo(X)$. Então

  $$mo = mo(X) \in \{0,1,2,\ldots\} \quad : \quad P(X = mo) = \max_{x=0,1,2,\ldots} P(X = x)$$

  $$\begin{cases} P(X = mo) \geq P(X = mo-1) \\ P(X = mo) \geq P(X = mo+1) \end{cases}$$

  $$\begin{cases} \frac{P(X=mo)}{P(X=mo-1)} \geq 1 \\ \frac{P(X=mo+1)}{P(X=mo)} \leq 1. \end{cases}$$

  $$\begin{cases} \frac{\frac{e^{-7}7^{mo}}{mo!}}{\frac{e^{-7}7^{mo-1}}{(mo-1)!}} \geq 1 \\ \frac{\frac{e^{-7}7^{mo+1}}{(mo+1)!}}{\frac{e^{-7}7^{mo}}{mo!}} \leq 1 \end{cases}$$

  $$\begin{cases} \frac{7}{mo} \geq 1 \\ \frac{7}{mo+1} \leq 1 \end{cases}$$

  $$\begin{cases} 7 \geq mo \\ 7 \leq mo+1, \end{cases}$$

  pelo que as duas modas de X são 6 e 7. [Logo podemos afirmar que X é uma v.a. bimodal. Alternativamente... Uma vez que a moda é, à semelhança do valor esperado, uma medida localização central, é de pesquisarmos os valores mais frequentes da v.a. X numa vizinhança de $E(X) = 7$. Ora, ao atendermos que

  $$mo = mo(X) \in \{0,1,2,\ldots\} \quad : \quad P(X = mo) = \max_{x=0,1,2,\ldots} P(X = x)$$

  $$P(X = x) \quad = \quad F_X(x) - F_X(x-1), \quad x = 0,1,2,\ldots,$$

  e consultarmos as tabelas da f.d. da distribuição de Poisson($\lambda = 7$), obtemos sucessivamente:

  $$\begin{aligned} P(X=5) &= F_X(5) - F_X(4) = 0.3007 - 0.1730 = 0.1277 \\ P(X=6) &= F_X(6) - F_X(5) = 0.4497 - 0.3007 = 0.1490 \\ P(X=7) &= F_X(7) - F_X(6) = 0.5987 - 0.4497 = 0.1490 \\ P(X=8) &= F_X(8) - F_X(7) = 0.7291 - 0.5987 = 0.1304. \end{aligned}$$

  Estes valores levam a crer que as duas modas de X são 6 e 7.]

(b) Considere três amostras de água recolhidas de modo independente, a primeira com 1ml, a segunda com 1.5ml e a terceira 2.5ml. Obtenha o valor exato para a probabilidade de o número total de bactérias nestas três amostras exceder 40. (2.5)

- **V.a.**

  X_i = no. de bactérias em amostra com i ml de água, $\quad x = 1, 1.5, 2.5$

  $X_i \overset{indep.}{\sim} \text{Poisson}(\lambda_i), \quad i = 1, 1.5, 2.5$

  Pela propriedade reprodutiva da distribuição de Poisson: $\lambda_1 = 7$; $\lambda_{1.5} = 1.5 \times 7 = 10.5$; $\lambda_{2.5} = 2.5 \times 7 = 17.5$.

- **V.a. de interesse**

  $Y = X_1 + X_{1.5} + X_{2.5}$ = no. total de bactérias em três amostras indep. de 1ml, 1.5ml e 2.5ml

- **Distribuição exata de Y**

  Y é uma soma de 3 v.a. independentes com distribuição de Poisson logo pela propriedade reprodutiva já invocada:

  $$Y \sim \text{Poisson}\left(\lambda_1 + \lambda_{1.5} + \lambda_{2.5} = 35\right).$$

- **Prob. pedida**

  $$\begin{aligned} P(Y > 40) &= 1 - P(Y \leq 40) \\ &= 1 - F_{Poisson(35)}(40) \overset{tabela/calc}{=} 1 - 0.8249 = 0.1751. \end{aligned}$$

Grupo II	10 valores

1. Admita que o tempo de vida, em minutos, de certos microorganismos é uma variável aleatória X que segue uma distribuição exponencial, com valor esperado igual a 4 minutos.

(a) Calcule a probabilidade de um destes microorganismos viver pelo menos 7 minutos sabendo que o seu tempo de vida já ultrapassou 2 minutos. (2.0)

- **V.a.**
  X = tempo de vida, em minutos, do microorganismo
- **Distribuição de** X
  $X \sim \text{exponencial}(\lambda)$ onde
  $$\begin{aligned} \lambda \quad : \quad & E(X) = 4 \\ & \frac{1}{\lambda} = 4 \\ & \lambda = 0.25 \end{aligned}$$
- **F.d.p. de** X
  $$f_X(x) = \begin{cases} 0.25\, e^{-0.25x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$
- **F.d. de** X
  $$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \begin{cases} 1 - e^{-0.25x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$
- **Prob. pedida**
  $$\begin{aligned} P(X \geq 7 \mid X > 2) &= \frac{P(X \geq 7, X > 2)}{P(X > 2)} \\ &= \frac{P(X \geq 7)}{P(X > 2)} \\ &= \frac{1 - F_X(7)}{1 - F_X(2)} \\ &= \frac{e^{-0.25\times 7}}{e^{-0.25\times 2}} \\ &\simeq e^{-0.25\times 5} \\ &\simeq 0.2865. \end{aligned}$$
  [Alternativamente, poderíamos recorrer à propriedade de falta de memória da distribuição exponencial e adiantar que
  $$\begin{aligned} P(X \geq 7 \mid X > 2) &= P(X \geq 7 - 2) \\ &= 1 - F_X(5) \\ &= e^{-0.25\times 5} \\ &\simeq 0.286505 \end{aligned}$$

(b) Obtenha um valor aproximado para a probabilidade de o tempo médio de vida de cem destes microorganismos ser superior a 5 minutos. Admita que os tempos de vida destes microorganismos são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a X. (3.0)

- **V.a.**
  X_i = tempo de vida, em minutos, do microorganismo i, $\quad i = 1, \ldots, n$
  $n = 100$
- **Distribuição, valor esperado e variância comuns**
  $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X, \quad i = 1, \ldots, n.$
  $E(X_i) = E(X) = \mu = \frac{1}{\lambda} = 4, \quad i = 1, \ldots, n$
  $V(X_i) = V(X) = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} = 16, \quad i = 1, \ldots, n$

- **V.a. de interesse**
  $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ = tempo médio de vida de cem organismos

- **Valor esperado e variância de $\bar{X}$**
  $E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X) = \mu$

  $V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \stackrel{X_i\, indep.}{=} \frac{1}{n^2} \times \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} \frac{1}{n^2} \times nV(X) = \frac{V(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$

- **Distribuição aproximada de $\bar{X}$**
  De acordo com o teorema do limite central (TLC) podemos escrever

$$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \stackrel{a}{\sim} \text{normal}(0,1).$$

- **Valor aproximado da probabilidade pedida**

$$\begin{aligned}
P(\bar{X} > 5) &= 1 - P(\bar{X} \leq 5) \\
&= 1 - P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{5 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\
&\stackrel{TLC}{\simeq} 1 - \Phi\left(\frac{5-4}{\frac{4}{\sqrt{100}}}\right) \\
&\simeq 1 - \Phi(2.5) \\
&\stackrel{tabela/calc}{=} 1 - 0.9938 \\
&= 0.0062.
\end{aligned}$$

2. Uma loja de informática vende certo modelo de computador portátil, que pode ser adquirido com a respetiva mala de transporte. Seja X (respetivamente Y) o número de computadores portáteis deste modelo vendidos (respetivamente de malas vendidas) diariamente nessa loja de informática. Admita que X e Y possuem função de probabilidade conjunta dada por

	Y			
X	0	1	2	3
0	0.200	0	0	0
1	0.100	0.150	0	0
2	0.150	0.125	0.100	0
3	0.050	0.075	0.025	0.025

(a) Determine a percentagem de dias em que se vende um número de computadores portáteis distinto do de malas para os transportar. (1.0)

- **Par aleatório** (X, Y)
  X = no. computadores portáteis vendidos diariamente
  Y = no. de malas vendidas diariamente

- **Perc. pedida**

$$\begin{aligned}
P(X \neq Y) &= 1 - P(X = Y) \\
&= 1 - [P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=3)] \\
&= 1 - (0.200 + 0.150 + 0.100 + 0.025) \\
&= 0.525.
\end{aligned}$$

[Alternativamente e atendendo à f.p. conjunta de X e Y, temos $P(X < Y) = 0$ e como tal

$$\begin{aligned}
P(X \neq Y) &= P(X > Y) \\
&= P(X=1, Y=0) + P(X=2, Y=0) + P(X=2, Y=1) + \\
&\quad + P(X=3, Y=0) + P(X=3, Y=1) + P(X=3, Y=2) \\
&= 0.100 + 0.150 + 0.125 + 0.050 + 0.075 + 0.025 \\
&= 0.525.]
\end{aligned}$$

Logo a percentagem pedida é igual a 52.5%.

(b) Averigúe se X e Y são variáveis aleatórias independentes. (1.0)

- **Averiguação de independência**
  X e Y são v.a. INDEPENDENTES sse

$$P(X=y,Y=y)=P(X=x)\times P(Y=y),\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Por um lado, temos

$$P(X=0,Y=0)=0.200.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}P(X=0)\times P(Y=0) &\overset{(c)}{=} 0.200\times 0.500\\ &= 0.100.\end{aligned}$$

Logo

$$P(X=0,Y=0)\neq P(X=0)\times P(Y=0)$$

e, como tal, X e Y não são v.a. independentes.

(c) Calcule $V(750X+80Y)$, a variância do montante diário associado à venda destes dois produtos. (3.0)

- **V.a. de interesse**
  $Z=750\,X+80\,Y=$ montante diário associado à venda de computadores portáteis e malas
- **Variância pedida**
  Uma vez que se pretende calcular

$$\begin{aligned}V(Z) &= V(750\,X+80\,Y)\\ &= 750^2\times V(X)+80^2\times V(Y)+2\times 750\times 80\times cov(X,Y),\end{aligned}$$

serão necessários alguns cálculos auxiliares que envolverão a f.p. conjunta de X e Y e as f.p. marginais de X e Y.

- **F.p. conjunta e marginais de X e Y**

X	Y = 0	1	2	3	$P(X=x)$
0	0.200	0	0	0	0.200
1	0.100	0.150	0	0	0.250
2	0.150	0.125	0.100	0	0.375
3	0.050	0.075	0.025	0.025	0.175
$P(Y=y)$	0.500	0.350	0.125	0.025	1

- **Valor esperado e variância de X**

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{x=0}^{3} x\times P(X=x)\\ &= 0\times 0.200+1\times 0.250+2\times 0.375+3\times 0.175\\ &= 1.525\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2)-E^2(X)\\ &= \sum_{x=0}^{3} x^2\times P(X=x)-1.525^2\\ &= (0^2\times 0.200+1^2\times 0.250+2^2\times 0.375+3^2\times 0.175)-1.525^2\\ &= 3.325-1.525^2\\ &= 0.999375\end{aligned}$$

- **Valor esperado e variância de** Y

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{y=0}^{3} y \times P(Y=y) \\
&= 0 \times 0.500 + 1 \times 0.350 + 2 \times 0.125 + 3 \times 0.025 \\
&= 0.675 \\
V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\
&= \sum_{y=0}^{3} y^2 \times P(Y=y) - 0.675^2 \\
&= (0 \times 0.500 + 1 \times 0.350 + 2 \times 0.125 + 3 \times 0.025) - 0.675^2 \\
&= 1.075 - 0.675^2 \\
&= 0.619375
\end{aligned}
$$

- **Valor esperado de** XY

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{x=0}^{3} \sum_{y=0}^{3} x\, y \times P(X=x, Y=y) \\
&= 1 \times 1 \times 0.150 + 2 \times 1 \times 0.125 + 2 \times 2 \times 0.100 + 3 \times 1 \times 0.075 \\
&\quad +3 \times 2 \times 0.025 + 3 \times 3 \times 0.025 \\
&= 1.4
\end{aligned}
$$

- **Covariância**

$$
\begin{aligned}
cov(X,Y) &= E(XY) - E(X) \times E(Y) \\
&= 1.4 - 1.525 \times 0.675 \\
&= 0.370625
\end{aligned}
$$

- **Variância pedida** (cont.)

$$
\begin{aligned}
V(Z) &= V(750\,X + 80\,Y) \\
&= 750^2 \times V(X) + 80^2\, V(Y) + 2 \times 750 \times 80 \times cov(X,Y) \\
&= 750^2 \times 0.999375 + 80^2 \times 0.619375 + 2 \times 750 \times 80 \times 0.370625 \\
&= 610587.4375.
\end{aligned}
$$