DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Probabilidades e Estatística

LEGI, LENO, LEGM, MEAmbi, MEC

1º semestre – 2019/2020
16/11/2019 – **9:00**

Duração: 90 minutos **1º Teste A**

Justifique convenientemente todas as respostas

Grupo I	10 valores

1. Sabe-se que 10% das garrafas produzidas por uma empresa possuem defeitos só no rótulo, que 20% possuem defeitos só no vidro e que 70% não possuem qualquer defeito. Para efeitos de controlo de qualidade, um inspetor analisa as garrafas. A probabilidade de ele classificar uma garrafa como defeituosa é igual a 0.9 (respetivamente 0.8), caso a garrafa possua defeitos só no rótulo (respetivamente só no vidro), e igual a 0.05, caso a garrafa analisada não possua qualquer defeito.

(a) Obtenha a probabilidade de uma garrafa selecionada ao acaso ser classificada como defeituosa pelo inspetor. (2.5)

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	**Probabilidade**
$R = \{$garrafa possui defeitos só no rótulo$\}$	$P(R) = 0.1$
$V = \{$garrafa possui defeitos só no vidro$\}$	$P(V) = 0.2$
$\bar{R} \cap \bar{V} = \{$garrafa não possui qualquer defeito$\}$	$P(\bar{R} \cap \bar{V}) = 0.70$
$D = \{$garrafa ser classificada como defeituosa$\}$	$P(D) = ?$
	$P(D \mid R) = 0.9$
	$P(D \mid V) = 0.8$
	$P[D \mid (\bar{R} \cap \bar{V})] = 0.05$

- **Probabilidade pedida**
  Pela lei da probabilidade total, temos

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \mid R) \times P(R) + P(D \mid V) \times P(V) + P[D \mid (\bar{R} \cap \bar{V})] \times P(\bar{R} \cap \bar{V}) \\ &= 0.9 \times 0.1 + 0.8 \times 0.2 + 0.05 \times 0.7 \\ &= 0.285. \end{aligned}$$

(b) Determine a probabilidade de a garrafa selecionada possuir algum defeito, sabendo que o inspetor a classificou como defeituosa. (2.5)

- **Probabilidade pedida**
  Tirando partido do facto de R e V serem eventos disjuntos e do teorema de Bayes, segue-se

$$\begin{aligned} P(R \cup V \mid D) &= P(R \mid D) + P(V \mid D) \\ &= \frac{P(D \mid R) \times P(R)}{P(D)} + \frac{P(D \mid V) \times P(V)}{P(D)} \\ &\overset{(a)}{=} \frac{0.9 \times 0.1 + 0.8 \times 0.2}{0.285} \\ &\simeq 0.877193. \end{aligned}$$

[Alternativamente e invocando novamente o teorema de Bayes, temos

$$\begin{aligned} P(R \cup V \mid D) &= 1 - P(\bar{R} \cap \bar{V} \mid D) \\ &= 1 - \frac{P[D \mid (\bar{R} \cap \bar{V})] \times P(\bar{R} \cap \bar{V})}{P(D)} \\ &\overset{(a)}{=} 1 - \frac{0.05 \times 0.7}{0.285} \\ &\simeq 0.877193.] \end{aligned}$$

2. Admita que determinado tipo de sensor deteta uma partícula estranha a um certo ambiente com probabilidade 0.85.

(a) Considere um aparelho composto por 3 desses sensores que operam de modo independente. Seja X a variável aleatória que representa o número de sensores deste aparelho que detetam tal partícula estranha. Determine o valor mais frequente de X. (2.5)

- **Variável aleatória de interesse**
  $X =$ no. de sensores do aparelho que detetam a partícula estranha
- **Distribuição de X**
  $X \sim \text{binomial}(n, p)$, com $n = 3$ e $p = 0.85$.
- **F.p. de X**
  $P(X = x) = \binom{3}{x} 0.85^x (1-0.85)^{3-x}, \; x = 0, 1, 2, 3.$
- **Moda de X**
  Representemos a moda de X por $mo(X)$. Então
  $$mo = mo(X) \in \{0, 1, 2, 3\} \quad : \quad P(X = mo) = \max_{x=0,1,2,3} P(X = x).$$
  Ora,
  $$\begin{aligned} P(X=0) &= 0.15^3 = 0.003375 \\ P(X=1) &= 3 \times 0.85 \times 0.15^2 = 0.057375, \\ P(X=2) &= 3 \times 0.85^2 \times 0.15 = 0.325125, \\ P(X=3) &= 0.85^3 = 0.614125, \end{aligned}$$
  pelo que $mo = 3$.
  [Alternativamente, poderíamos tirar partido das tabelas da f.d. da binomial pois $3 - X \sim \text{binomial}(3, 0.15)$ e $P(X = x) = P(3 - X = 3 - x) = F_{binomial(3,0.15)}(3 - x) - F_{binomial(3,0.15)}(3 - x - 1)$, $x = 0, 1, 2, 3$. Ora, usando as tabelas obtemos
  $$\begin{aligned} P(X=0) &= F_{binomial(3,0.15)}(3-0) - F_{binomial(3,0.15)}(3-0-1) \\ &= 1.0000 - 0.9966 \\ &= 0.0034 \\ P(X=1) &= F_{binomial(3,0.15)}(3-1) - F_{binomial(3,0.15)}(3-1-1) \\ &= 0.9966 - 0.9393 \\ &= 0.0573 \\ P(X=2) &= F_{binomial(3,0.15)}(3-2) - F_{binomial(3,0.15)}(3-2-1) \\ &= 0.9393 - 0.6141 \\ &= 0.3252 \\ P(X=3) &= F_{binomial(3,0.15)}(3-3) - F_{binomial(3,0.15)}(3-3-1) \\ &= 0.6141, \end{aligned}$$
  pelo que $mo = 3$.

(b) Considere 3 aparelhos com respetivamente 5, 4 e 3 sensores que operam de modo independente. Qual é a probabilidade de a partícula ser detetada por pelo menos 6 dos sensores? (2.5)

- **V.a.**
  $X_i =$ no. de sensores do aparelho i que detetam a partícula, $\quad i = 1, 2, 3$
  $X_1 \overset{indep}{\sim} \text{binomial}(n_i, p = 0.85)$, $i = 1, 2, 3$, onde $n_1 = 5, n_2 = 4, n_3 = 3$.
- **V.a. de interesse**
  $Y = \sum_{i=1}^{3} X_i =$ no. total de sensores que detetam a partícula ao usarmos os 3 aparelhos acima
- **Distribuição exata de Y**
  Y é uma soma de 3 v.a. independentes com distribuição binomial com a mesma probabilidade de sucesso logo

$$Y \sim \text{binomial}\left(n_Y, p = 0.85\right),$$

onde $n_Y = \sum_{i=1}^{4} n_i = 5+4+3 = 12$.

- **Prob. pedida**
  Uma vez que $12 - Y \sim \text{binomial}(12, 0.15)$, temos
  $$\begin{aligned} P(Y \geq 6) &= P(12 - Y \leq 12 - 6) \\ &= F_{binomial(12,0.15)}(6) \\ &\stackrel{tabelas}{=} 0.9993. \end{aligned}$$

Grupo II	10 valores

1. O número de ciclos de pressurização a 600 kPa até à rutura de certo tipo de garrafa PET é uma variável aleatória X que possui função de distribuição dada por
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{2000}\right)^{0.97}\right], & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a probabilidade de X exceder 2000, sabendo que a garrafa PET não sofreu rutura ao fim de 1000 ciclos de pressurização a 600 kPa. (2.0)

- **V.a.**
  X = no. de ciclos de pressurização a 600 kPa até à rutura de determinada garrafa PET
- **F.d. de X**
  $$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{2000}\right)^{0.97}\right], & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$
- **Prob. pedida**
  $$\begin{aligned} P(X > 2000 \mid X > 1000) &= \frac{P(X > 2000, X > 1000)}{P(X > 1000)} \\ &= \frac{P(X > 2000)}{P(X > 1000)} \\ &= \frac{1 - F_X(2000)}{1 - F_X(1000)} \\ &= \frac{\exp\left[-\left(\frac{2000}{2000}\right)^{0.97}\right]}{\exp\left[-\left(\frac{1000}{2000}\right)^{0.97}\right]} \\ &= \frac{e^{-1}}{e^{-0.5^{0.97}}} \\ &\simeq 0.612937. \end{aligned}$$

(b) Obtenha um valor aproximado para a probabilidade de o número médio de ciclos de pressurização a 600 kPa até à rutura de 36 garrafas PET exceder 2100. Admita que os números de ciclos até à rutura destas garrafas são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a X, com valor esperado 2026.944 e desvio-padrão 2089.920. (3.0)

- **V.a.**
  X_i = no. de ciclos de pressurização a 600 kPa até à rutura da garrafa PET i, $\quad i = 1, \ldots, n$
  $n = 36$
- **Distribuição, valor esperado e variância comuns**
  $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} X, \quad i = 1, \ldots, n$
  $E(X_i) = E(X) = \mu = 2026.944, \quad i = 1, \ldots, n$
  $V(X_i) = V(X) = \sigma^2 = 2089.920^2, \quad i = 1, \ldots, n$

- **V.a. de interesse**
  $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ = no. médio de ciclos de pressurização a 600 kPa até à rutura de n garrafas PET
- **Valor esperado e variância de $\bar{X}$**
  $E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X) = \mu$
  $V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{X_i\ indep.}{=} \frac{1}{(n)^2} \times \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} \frac{1}{(n)^2} \times nV(X) = \frac{V(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$
- **Distribuição aproximada de $\bar{X}$**
  De acordo com o teorema do limite central (TLC) podemos escrever

$$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{a}{\sim} \text{normal}(0,1).$$

- **Valor aproximado da probabilidade pedida**

$$\begin{aligned}
P(\bar{X} > 2\,100) &= 1 - P(\bar{X} \le 2\,100) \\
&= 1 - P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le \frac{2\,100 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\
&\overset{TLC}{\simeq} 1 - \Phi\left(\frac{2\,100 - 2\,026.944}{\sqrt{\frac{2\,089.920^2}{36}}}\right) \\
&\simeq 1 - \Phi(0.21) \\
&\overset{tabela/calc}{=} 1 - 0.5832 \\
&= 0.4168.
\end{aligned}$$

2. Suponha que o número de transações permitidas a dois tipos de produtos eletrónicos A e B, representados pelo par aleatório (X,Y), tem função de probabilidade conjunta dada por

	Y		
X	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
3	$\frac{1}{9}$	0	0

(a) Calcule o valor da função de distribuição conjunta nos pontos $(1,2)$ e $(2.7,3)$. (1.5)

- **Valores pedidos da f.d. conjunta**
  Relembremos que $F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Logo

$$\begin{aligned}
F_{X,Y}(1,2) &= P(X \le 1, Y \le 2) \\
&= P(X=1,Y=1) + P(X=1,Y=2) \\
&= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \\
&= \frac{1}{3} \\
F_{X,Y}(2.7,3) &= P(X \le 2.7, Y \le 3) \\
&= P(X \le 2, Y \le 3) \\
&= P(X=1,Y=1) + P(X=1,Y=2) + P(X=1,Y=3) + \\
&\quad + P(X=2,Y=1) + P(X=2,Y=2) + P(X=2,Y=3) \\
&= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + 0 \\
&= \frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

(b) Averigúe se X e Y são variáveis aleatórias independentes. (1.0)

- **Averiguação de independência**
  X e Y são v.a. INDEPENDENTES sse

$$P(X=y,Y=y)=P(X=x)\times P(Y=y),\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Por um lado, temos

$$P(X=1,Y=1)=\frac{1}{9}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}P(X=1)\times P(Y=1) &= \frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\\ &= \frac{16}{81}.\end{aligned}$$

Uma vez que

$$P(X=1,Y=1)\neq P(X=1)\times P(Y=1),$$

concluímos que X e Y não são v.a. independentes.

(c) Obtenha $P(X+Y=z\mid Y=1)$, para $z=2,3,4$, e calcule $E(X+Y\mid Y=1)$. (2.5)

- **V.a. de interesse**
  $X+Y\mid Y=1$

- **F.p. pedida**

$$\begin{aligned}P(X+Y=2\mid Y=1) &= P(X=1,Y=1\mid Y=1)\\ &= \frac{P(X=1,Y=1,Y=1)}{P(Y=1)}\\ &= \frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)}\\ &= \frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{9}}\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X+Y=3\mid Y=1) &= P(X=2,Y=1\mid Y=1)\\ &= \frac{P(X=2,Y=1,Y=1)}{P(Y=1)}\\ &= \frac{P(X=2,Y=1)}{P(Y=1)}\\ &= \frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X+Y=4\mid Y=1) &= P(X=3,Y=1\mid Y=1)\\ &= \frac{P(X=3,Y=1,Y=1)}{P(Y=1)}\\ &= \frac{P(X=3,Y=1)}{P(Y=1)}\\ &= \frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{9}}\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

- **Valor esperado pedido**

$$\begin{aligned} E(X+Y \mid Y=1) &= \sum_{z=2}^{4} z \times P(X+Y=z \mid Y=1) \\ &= 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} \\ &= 3. \end{aligned}$$