Probabilidades e Estatística

LEAN, LEGI, LEGM, LMAC, MEAer, MEAmbi, MEC

1º semestre – 2017/2018
18/11/2017 – **11:00**

Duração: 90 minutos **1º Teste B**

Justifique convenientemente todas as respostas

Grupo I 10 valores

1. Um teste de diagnóstico conduz a resultado positivo com probabilidade 0.9 caso a componente eletrónica testada seja defeituosa. Este mesmo teste conduz a resultado positivo com probabilidade igual a 0.05 se a componente eletrónica testada for não defeitosa. Admita que se testa uma componente eletrónica selecionada ao acaso de um lote com uma percentagem de componentes eletrónicas defeituosas igual a 3%.

(a) Calcule a probabilidade de o resultado do teste de diagnóstico ser positivo. (2.5)

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	**Probabilidade**
T = {teste de diagnóstico resulta positivo}	$P(T) = ?$
D = {peça defeituosa}	$P(D) = 0.03$
	$P(T \mid D) = 0.9$
	$P(T \mid \overline{D}) = 0.05$

- **Probabilidade pedida**
  Recorrendo à lei da probabilidade total, tem-se

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T \mid D) \times P(D) + P(T \mid \overline{D}) \times P(\overline{D}) \\ &= 0.9 \times 0.03 + 0.05 \times (1 - 0.03) \\ &= 0.0755 \end{aligned}$$

(b) Obtenha a probabilidade de a componente eletrónica testada ser defeituosa sabendo que o teste resultou positivo. (2.5)

- **Probabilidade pedida**
  Tirando partido do teorema de Bayes, segue-se

$$\begin{aligned} P(D \mid T) &= \frac{P(T \mid D) \times P(D)}{P(T)} \\ &\overset{(a)}{=} \frac{0.9 \times 0.03}{0.0755} \\ &\simeq 0.357616. \end{aligned}$$

2. Em certo ato eleitoral, a chegada de eleitores a uma mesa de voto rege-se de acordo com um processo de Poisson com taxa de 2 eleitores por minuto.

(a) Determine a probabilidade de chegarem à mesa de voto mais de 4 eleitores em dois minutos. (1.5)

- **V.a. de interesse**
  X_t = no. de eleitores que chegam à mesa de voto em t minutos $\quad (t > 0)$

- **Distribuição de X_t**
  Dado que lidamos com um processo de Poisson com taxa igual a 2 eleitores por minuto, temos $X_t \sim \text{Poisson}(2 \times t)$.

- **F.p. de X_2**
  $P(X_2 = x) = \frac{e^{-4} 4^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X_2 > 4) &= 1 - P(X_2 \leq 4) \\ &= 1 - F_{Poisson(4)}(4) \\ &\overset{tabela/calc.}{\simeq} 1 - 0.6288 \\ &\simeq 0.3712. \end{aligned}$$

(b) Calcule a mediana do número de eleitores que se dirigem àquela mesa de voto em dois minutos. (1.5)

- **Mediana de X_2**

  Represente-se a mediana de X_2 por $me(X_2)$. Então

$$\begin{aligned} me(X_2) \quad : \quad & \frac{1}{2} \leq F_{X_2}[me(X_2)] \leq \frac{1}{2} + P[X_2 = me(X_2)] \qquad (1) \\ & \frac{1}{2} \leq F_{X_2}[me(X_2)] \leq \frac{1}{2} + [F_{X_2}[me(X_2)] - F_{X_2}[me(X_2)^-]] \\ & F_{X_2}[me(X_2)^-] \leq \frac{1}{2} \leq F_{X_2}[me(X_2)]. \qquad (2) \end{aligned}$$

  Tirando partido da definição de mediana em (1) e do facto de

$$\frac{1}{2} \leq \quad F_{X_2}(4) \overset{(a)}{=} 0.6288 \quad \leq \frac{1}{2} + P(X_2 = 4) = \frac{1}{2} + [F_{X_2}(4) - F_{X_2}(3)] = \frac{1}{2} + (0.6288 - 0.4335) = 0.6953,$$

  conclui-se que 4 é uma mediana de X_2[; a prova da sua unicidade é deixada como exercício].
  [Em alternativa, note-se que

$$F_{X_2}(3) = F_{X_2}(4^-) = 0.4335 \quad \leq \quad \frac{1}{2} \quad \leq \quad F_{X_2}(4) \overset{(a)}{=} 0.6288.$$

  Donde o resultado (2) leve a concluir que 4 é uma mediana de X_2; a prova da sua unicidade é deixada como exercício.]

(c) Obtenha a probabilidade de o tempo entre duas chegadas consecutivas de eleitores à mesa de voto ser inferior a 2 minutos. (2.0)

- **Variável aleatória de interesse**

  T = intervalo (em minutos) entre duas chegadas consecutivas de eleitores
- **Distribuição de T**

  Uma vez que lidamos com um processo de Poisson com taxa igual a 2 eleitores por minuto, temos $T \sim$ Exponencial(λ), com $\lambda = 2$.
- **F.d.p. de T**

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2 \times e^{-2t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

- **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned} P(T < 2) = P(T \leq 2) &= \int_0^2 2 \times e^{-2t} dt \\ &= -e^{-2t}\Big|_0^2 \\ &= 1 - e^{-4} \\ &\simeq 0.9817. \end{aligned}$$

  [Alternativamente,

$$\begin{aligned} P(T < 2) = P(T \leq 2) &= 1 - P(T > 2) \\ &= 1 - P(X_2 = 0) \\ &= 1 - \frac{e^{-4} \times 4^0}{0!} \\ &= 1 - e^{-4} \\ &\simeq 0.9817.] \end{aligned}$$

Grupo II	10 valores

1. Numa dada empresa, o tempo de fabrico de peças de determinado tipo é uma variável aleatória com distribuição exponencial com valor esperado igual a 5 minutos.

(a) Supondo que o fabrico de uma dessas peças não está terminado ao fim de 3 minutos, qual é a probabilidade de serem ainda necessários pelo menos 4 minutos adicionais até à sua conclusão? (2.0)

- **V.a. de interesse**
  X = tempo de fabrico de peça de determinado tipo
- **Distribuição de X**
  $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$
- **Parâmetro**

$$\begin{aligned} \lambda > 0 \quad : \quad & E(X) = 5 \\ & \frac{1}{\lambda} = 5 \\ & \lambda = 0.2 \end{aligned}$$

- **Prob. pedida**
  Tendo em conta que a f.d. de X é dada por

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-0.2x}, & x \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

pode concluir-se que

$$\begin{aligned} P(X > 3+4 \mid X > 3) &= \frac{P(X > 3+4)}{P(X > 3)} \\ &= \frac{1 - F_X(3+4)}{1 - F_X(3)} \\ &= \frac{1 - \left[1 - e^{-0.2\times(3+4)}\right]}{1 - \left(1 - e^{-0.2\times 3}\right)} \\ &= e^{-0.2\times 4} \\ &\simeq 0.449329. \end{aligned}$$

[Em alternativa, pode invocar-se a propriedade de falta de memória da distribuição Exponencial e concluir que

$$\begin{aligned} P(X > 3+4 \mid X > 3) &= P(X > 4) \\ &= 1 - F_X(4) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-0.2\times 4}\right) \\ &\simeq 0.449329.] \end{aligned}$$

(b) Assumindo que os tempos de fabrico das diferentes peças são variáveis aleatórias independentes, calcule um valor aproximado da probabilidade de o tempo médio de fabrico de 36 peças ser superior a 6 minutos. (3.0)

- **V.a.**
  X_i = tempo de fabrico da peça i, $\quad i = 1, \ldots, n$
  $n = 36$
- **Distribuição, valor esperado e variância comuns**
  $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X \sim \text{Exponencial}(\lambda), \quad i = 1, \ldots, n$
  $\lambda = 0.2$

$E(X_i) = E(X) = \mu = \frac{1}{\lambda}, \quad i = 1, \ldots, n$
$V(X_i) = V(X) = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}, \quad i = 1, \ldots, n$

- **V.a. de interesse**
  $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ = tempo médio de fabrico de n peças

- **Valor esperado e variância de $\bar{X}_n$**
  $E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X) = \mu$
  $V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \stackrel{X_i\ indep.}{=} \frac{1}{(n)^2} \times \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} \frac{1}{(n)^2} \times nV(X) = \frac{V(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$

- **Distribuição aproximada de $\bar{X}$**
  Pelo teorema do limite central (TLC) pode escrever-se

$$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \stackrel{a}{\sim} \text{Normal}(0, 1).$$

- **Valor aproximado da probabilidade pedida**

$$\begin{aligned}
P(\bar{X} > 6) &= 1 - P(\bar{X} \leq 6) \\
&= 1 - P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{6 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\
&\stackrel{TLC}{\simeq} 1 - \Phi\left(\frac{6 - \frac{1}{\lambda}}{\frac{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}}{\sqrt{n}}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{6 - 5}{\frac{5}{6}}\right) \\
&= 1 - \Phi(1.2) \\
&\stackrel{tabela/calc}{=} 1 - 0.8849 \\
&= 0.1151
\end{aligned}$$

2. A classificação, atendendo à distância a que a paraquedista A (respetivamente B) fica de certo alvo, é descrita pela variável aleatória X (respetivamente Y). É sabido que X e Y possuem função de probabilidade conjunta

	Y		
X	1	2	3
1	0.40	0.15	0.05
2	0.15	0.05	0.05
3	0.05	0.05	0.05

(a) Obtenha a probabilidade de as classificações das duas paraquedistas coincidirem. (1.5)

- **Par aleatório** (X, Y)
  X = classificação da paraquedista A
  Y = classificação da paraquedista B

- **F.p. conjunta**
  Dada pela tabela do enunciado.

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned}
P(X = Y) &= P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 2) + P(X = 2, Y = 2) \\
&= 0.40 + 0.05 + 0.05 \\
&= 0.5.
\end{aligned}$$

(b) Serão X e Y variáveis aleatórias independentes? (1.0)

- **Averiguação de independência**
  X e Y são v.a. INDEPENDENTES sse

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x) \times P(Y=y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Por um lado, temos

$$P(X=1, Y=1) = 0.40.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P(X=1) \times P(Y=1) &= [P(X=1,Y=1) + P(X=1,Y=2) + P(X=1,Y=3)] \\ &\quad \times [P(X=1,Y=1) + P(X=2,Y=1) + P(X=1,Y=3)] \\ &= (0.40+0.15+0.05) \times (0.40+0.15+0.05) \\ &= 0.6 \times 0.6 \\ &= 0.36. \end{aligned}$$

Logo

$$P(X=1, Y=1) \neq P(X=1) \times P(Y=1),$$

e, como tal, X e Y são v.a. DEPENDENTES.

(c) Admita que um prémio no valor de 2 000 Euros (respectivamente 1 000 e 0 Euros) é atribuído caso a paraquedista A obtenha classificação 1 (respetivamente 2 e 3). Determine o valor esperado e a variância do prémio atribuído à paraquedista A. (2.5)

- **V.a. de interesse**

$$P = g(X), \quad \text{onde} \quad g(x) = \begin{cases} 2\,000, & x=1 \\ 1\,000, & x=2 \\ 0, & x=3 \end{cases}$$

- **F.p. marginal de X**
  $P(X=x) = \sum_{y=1}^{3} P(X=x, Y=y)$ encontra-se sumariada na tabela seguinte:

	Y			
X	1	2	3	$P(X=x)$
1	0.40	0.15	0.05	0.60
2	0.15	0.05	0.05	0.25
3	0.05	0.05	0.05	0.15

- **Valor esperado de P**

$$\begin{aligned} E(P) &= \sum_{x=1}^{3} g(x) \times P(X=x) \\ &= 2\,000 \times 0.60 + 1\,000 \times 0.25 + 0 \times 0.15 \\ &= 1\,450 \end{aligned}$$

- **2o. momento de P**

$$\begin{aligned} E(P^2) &= \sum_{x=1}^{3} [g(x)]^2 \times P(X=x) \\ &= 2\,000^2 \times 0.60 + 1\,000^2 \times 0.25 + 0^2 \times 0.15 \\ &= 2\,650\,000 \end{aligned}$$

- **Variância de P**

$$
\begin{aligned}
V(P) &= E(P^2) - E^2(P) \\
&= 2\,650\,000 - 1\,450^2 \\
&= 547\,500.
\end{aligned}
$$