Probabilidades e Estatística

LEE, LEIC-A, LEIC-T, LEMat, LERC, MEBiol, MEBiom, MEEC, MEFT, MEMec, MEQ

1º semestre – 2017/2018
18/11/2017 – **09:00**

Duração: 90 minutos **1º Teste A**

Justifique convenientemente todas as respostas

Grupo I 10 valores

1. Determinado teste de diagnóstico, utilizado para detetar a tuberculose, conduz a resultado positivo em 95% das pessoas com tuberculose e em 6% das pessoas que não têm esta doença. Admita que numa população a percentagem de pessoas com tuberculose é de 0.1%.

(a) Determine a probabilidade de o teste resultar positivo para uma pessoa selecionada ao acaso da população. (2.5)

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	Probabilidade
$T = \{\text{pessoa com tuberculose}\}$	$P(T) = 0.001$
$P = \{\text{teste com resultado positivo}\}$	$P(P) = ?$
	$P(P \mid T) = 0.95$
	$P(P \mid \overline{T}) = 0.06$

- **Probabilidade pedida**
  Invocando a lei da probabilidade total, tem-se

$$\begin{aligned} P(P) &= P(P \mid T) \times P(T) + P(P \mid \overline{T}) \times P(\overline{T}) \\ &= 0.95 \times 0.001 + 0.06 \times (1 - 0.001) \\ &= 0.06089 \end{aligned}$$

(b) Sabendo que o resultado do teste, aplicado a uma pessoa selecionada ao acaso da população, é negativo, qual é a probabilidade de a pessoa testada ter tuberculose? (2.5)

- **Probabilidade pedida**
  Tirando partido do teorema de Bayes, segue-se

$$\begin{aligned} P(T \mid \overline{P}) &= \frac{P(\overline{P} \mid T) \times P(T)}{P(\overline{P})} \\ &= \frac{[1 - P(P \mid T)] \times P(T)}{1 - P(P)} \\ &\overset{(a)}{=} \frac{(1 - 0.95) \times 0.001}{1 - 0.06089} \\ &\simeq 0.000053. \end{aligned}$$

2. Admita que a probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso de certa região metropolitana, ter opinião desfavorável em relação a viaturas com motor elétrico é de $p = 0.3$.

(a) Numa amostra casual de 20 pessoas dessa região, qual é a probabilidade de mais de 6 delas terem opinião desfavorável em relação a viaturas com motor elétrico? (1.5)

- **V.a. de interesse**
  X = no. de pessoas com opinião desfavorável..., em 20 selecionadas ao acaso

- **Distribuição de X**
  $X \sim \text{binomial}(n, p)$
  com
  $n = 20$
  $p = 0.3$

- **F.p. de X**
  $P(X=x) = \binom{20}{x} 0.3^x (1-0.3)^{20-x}, \quad x = 0,1,\ldots,20$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X>6) &= 1-P(X\leq 6) \\ &= 1-F_X(6) \\ &= 1-F_{binomial(20,0.3)}(6) \\ &\overset{tabela/calc.}{=} 1-0.6080 \\ &= 0.3920. \end{aligned}$$

(b) Calcule a mediana do número de pessoas com opinião desfavorável nessa amostra casual. (1.5)

- **Mediana de X**
  Represente-se a mediana de X por $me(X)$. Então

$$\begin{aligned} me(X) \quad : \quad & \frac{1}{2} \leq F_X[me(X)] \leq \frac{1}{2} + P[X=me(X)] && (1) \\ & \frac{1}{2} \leq F_X[me(X)] \leq \frac{1}{2} + [F_X[me(X)] - F_X[me(X)^-]] \\ & F_X[me(X)^-] \leq \frac{1}{2} \leq F_X[me(X)]. && (2) \end{aligned}$$

Ora, tirando partido da definição de mediana em (1) e do facto de

$$\frac{1}{2} \leq \quad F_X(6) \overset{(a)}{=} 0.6080 \quad \leq \frac{1}{2} + P(X=6) = \frac{1}{2} + [F_X(6) - F_X(5)] = \frac{1}{2} + (0.6080 - 0.4164) = 0.6916,$$

concluímos que 6 é uma mediana de X[; a prova da sua unicidade é deixada como exercício].
[Em alternativa, notemos que

$$F_X(5) = F_X(6^-) = 0.4164 \quad \leq \quad \frac{1}{2} \quad \leq \quad F_X(6) \overset{(a)}{=} 0.6080.$$

Logo o resultado (2), leva-nos a concluir que 6 é uma mediana de X; a prova da sua unicidade é deixada como exercício.]

(c) Determine a probabilidade de ser necessário inquirir quanto muito 3 pessoas até surgir a primeira opinião desfavorável em relação a viaturas com motor elétrico. (2.0)

- **V.a. de interesse Y**
  Y = no. de pessoas inquiridas até que surja uma com opinião desfavorável...

- **Distribuição de Y**
  $Y \sim$ geométrica(p) com $p = 0.3$.

- **F.p. de Y**
  $P(Y=y) = (1-p)^{y-1} \times p, \quad y = 1,2,\ldots$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(Y\leq 3) &= \sum_{y=1}^{3} P(Y=y) \\ &= \sum_{y=1}^{3} (1-p)^{y-1} \times p \\ &= \frac{p}{1-p} \sum_{y=1}^{3} (1-p)^y \\ &= \frac{p}{1-p}\,(1-p)\,\frac{1-(1-p)^3}{1-(1-p)} \\ &= 1-(1-p)^3 \\ &= 0.657. \end{aligned}$$

Grupo II	10 valores

1. O volume de enchimento de uma máquina automatizada para encher latas de refrigerantes segue uma distribuição Normal com valor esperado de 0.33 litro e desvio padrão de 0.01 litro.

(a) Qual é a probabilidade de o volume de enchimento de uma lata selecionada ao acaso diferir de 0.33 litro em mais de 0.03 litro ? (1.5)

- **V.a.**
  X = volume de enchimento de uma lata selecionada ao acaso
- **Distribuição de X**
  $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$
  onde
  $\mu = 0.33$
  $\sigma^2 = 0.01^2$
- **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned}
P(|X-0.33|>0.03) &= 1-P(|X-0.33|\leq 0.03) \\
&= 1-P(-0.03\leq X-0.33\leq 0.03) \\
&= 1-P\left(-\frac{0.03}{0.01}\leq \frac{X-0.33}{0.01}\equiv\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{0.03}{0.01}\right) \\
&= 1-[\Phi(3)-\Phi(-3)] \\
&= 1-\{\Phi(3)-[1-\Phi(3)]\} \\
&= 2\times[1-\Phi(3)] \\
&\overset{tabela/calc}{=} 2\times(1-0.998650) \\
&= 0.0027.
\end{aligned}$$

(b) Calcule a probabilidade de um conjunto de 25 dessas latas ter um volume de enchimento total superior a 8.1 litro. (3.0)

- **V.a.**
  X_i = volume de enchimento da lata i, $\quad i=1,\ldots,n$
  $n = 25$
- **Distribuição, valor esperado e variância comuns**
  $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X, \quad i=1,\ldots,n$
  $E(X_i)=E(X)=\mu=0.33, \quad i=1,\ldots,n$
  $V(X_i)=V(X)=\sigma^2=0.01^2, \quad i=1,\ldots,n$
- **V.a. de interesse**
  $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$ = volume de enchimento total de n latas
- **Distribuição exacta de S_n**
  S_n é uma combinação linear de n v.a. independentes com distribuição normal, logo S_n também é normalmente distribuída. Com efeito,

$$S_n \sim \text{Normal}(E(S_n), V(S_n)),$$

onde

$$\begin{aligned}
E(S_n) &= E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\sum_{i=1}^n E(X_i)\overset{X_i\sim X}{=} n\,E(X)=n\,\mu=25\times 0.33=8.25 \\
V(S_n) &= V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\overset{X_i\,indep.}{=}\sum_{i=1}^n V(X_i)\overset{X_i\sim X}{=} n\,V(X)=n\,\sigma^2=25\times 0.01^2=0.0025
\end{aligned}$$

- **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned} P(S_n > 8.1) &= 1 - P\left[\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \leq \frac{8.1 - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}\right] \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{8.1 - 8.25}{\sqrt{0.0025}}\right) \\ &= 1 - \Phi(-3) \\ &= \Phi(3) \\ &\stackrel{tabela/calc}{=} 0.998650. \end{aligned}$$

2. De uma urna que contém 6 bolas — azuis, brancas e vermelhas, em igual número — são retiradas ao acaso 3 bolas sem reposição. Sejam X e Y as variáveis aleatórias que representam os números de bolas azuis e brancas no conjunto retirado. A função de probabilidade conjunta deste par aleatório é dada pela tabela abaixo

	Y		
X	0	1	2
0	0	0.1	0.1
1	0.1	0.4	a
2	0.1	0.1	0

(a) Complete a tabela e averigúe se X e Y são variáveis aleatórias independentes. (1.5)

- **Par aleatório** (X, Y)
  X = número de bolas azuis selecionadas
  Y = número de bolas brancas selecionadas
- **Obtenção de** a

$$\begin{aligned} a \quad : \quad & \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} P(X = x, Y = y) = 1 \\ & 0 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.4 + a + 0.1 + 0.1 + 0 = 1 \\ & a = 0.1 \end{aligned}$$

- **F.p. conjunta e marginais de** X **e** Y
  Foram sumariadas na tabela seguinte:

	Y			
X	0	1	2	$P(X = x)$
0	0	0.1	0.1	0.2
1	0.1	0.4	0.1	0.6
2	0.1	0.1	0	0.2
$P(Y = y)$	0.2	0.6	0.2	1

- **Dependência entre** X **e** Y
  X e Y são v.a. INDEPENDENTES sse

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Se por um lado

$$P(X = 0, Y = 0) = 0,$$

por outro

$$\begin{aligned} P(X = 0) \times P(Y = 0) &= 0.2 \times 0.2 \\ &= 0.04. \end{aligned}$$

Deste modo conclui-se que

$$P(X=0,Y=0) \neq P(X=0) \times P(Y=0),$$

pelo que X e Y são v.a. DEPENDENTES.

(b) Determine $E(X \mid Y=1)$. (1.5)

- **V.a.**
  $X \mid Y=1$

- **F.p. de $X \mid Y=1$**
  Uma vez que

$$\begin{aligned} P(Y=1) &= \sum_{x=0}^{2} P(X=x,Y=1) \\ &= 0.1+0.4+0.1 \\ &= 0.6, \end{aligned}$$

  temos

$$\begin{aligned} P(X=x \mid Y=1) &= \frac{P(X=x,Y=1)}{P(Y=1)} \\ &= \begin{cases} \frac{0.1}{0.6}=\frac{1}{6}, & x=0 \\ \frac{0.4}{0.6}=\frac{2}{3}, & x=1 \\ \frac{0.1}{0.6}=\frac{1}{6}, & x=2 \\ 0, & \text{restantes valores de } x \end{cases} \end{aligned}$$

- **Valor esperado de $X \mid Y=1$**

$$\begin{aligned} E(X \mid Y=1) &= \sum_{x=0}^{2} x \times P(X=x \mid Y=1) \\ &= 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{6} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(c) Calcule a variância de $(X-Y)$. (2.5)

- **Variância pedida**
  Uma vez que se pretende calcular

$$\begin{aligned} V(X-Y) &= V(X)+V(Y)-2 \times cov(X,Y) \\ &= V(X)+V(Y)-2 \times [E(XY)-E(X) \times E(Y)], \end{aligned}$$

  serão necessários alguns cálculos auxiliares que envolverão as f.p. conjunta de (X,Y) e marginais de X e Y obtidas na alínea (a).

- **Valor esperado e variância de X**

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{2} x \times P(X=x) \\ &= 0 \times 0.2 + 1 \times 0.6 + 2 \times 0.2 \\ &= 1 \\ V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= \sum_{x=0}^{2} x^2 \times P(X=x) - 1^2 \\ &= (0^2 \times 0.2 + 1^2 \times 0.6 + 2^2 \times 0.2) - 1^2 \\ &= 1.4 - 1 \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

- **Valor esperado e variância de Y**
  Dado X e Y possuem a mesma f.p., tem-se

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X) \\ &= 1 \\ V(Y) &= V(X) \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

- **Valor esperado de XY**

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=0}^{2} \sum_{y=0}^{2} x\,y \times P(X = x, Y = y) \\ &= 1 \times 1 \times 0.4 + 1 \times 2 \times 0.1 + 2 \times 1 \times 0.1 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

- **Covariância**

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E(XY) - E(X) \times E(Y) \\ &= 0.8 - 1 \times 1 \\ &= -0.2 \end{aligned}$$

- **Variância pedida (cont.)**

$$\begin{aligned} V(X-Y) &= V(X) + V(Y) - 2 \times cov(X,Y) \\ &= 0.4 + 0.4 - 2 \times (-0.2) \\ &= 1.2. \end{aligned}$$