TÉCNICO LISBOA

Departamento de Matemática

ANÁLISE COMPLEXA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

PRIMEIRO TESTE - VERSÃO B
5 DE NOVEMBRO DE 2016

MEMEC, LEAN, MEC, LEGM

INSTRUÇÕES

- As cotações das alíneas estão indicadas na margem esquerda da folha do enunciado.
- **Desligue o telemóvel!**
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras.
- Justifique as respostas e apresente todos os cálculos.
- Numere todas as páginas do caderno de respostas e indique na tabela abaixo as páginas onde as questões são resolvidas.
- Boa sorte!

pergunta	página(s)	classificação
1 (a)		
1 (b)		
1 (c)		
2 (a)		
2 (b)		
3 (a)		
3 (b)		
3 (c)		
4 (a)		
4 (b)		
4 (c)		
5		
total		

Nome: ____

Nº: ________________________ **Curso:** ______________________

Sala: ________________________ **Rubrica docente:** _____________

(1) Sendo $\beta \in \mathbb{R}$, considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $v(x,y) = \beta^3 x^2 - 4y - \beta y^2$.

(1 val) (a) Determine os valores de β para os quais v é a parte imaginária de uma função holomorfa $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(1 val) (b) Considerando $\beta = -1$, determine a função inteira f tal que $\operatorname{Im}(f) = v$ e $f(-i) = 2 + 5i$.

(1 val) (c) Sendo f a função da alínea anterior, calcule

$$\oint_{|z|=2016} \frac{z^2 f(z)}{(z+i)^2}\, dz$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido direto.

(2) Seja $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(x+iy) = (2x-y) + i(x+y)$.

(1 val) (a) Calcule $\int_{\gamma_i} f(z)\, dz$ para $i = 1, 2$, onde $\gamma_1(t) = t^2 + 2it$, e $\gamma_2(t) = t + 2it$ com $0 \le t \le 1$.

(1 val) (b) Determine, justificando, se f tem primitiva em $\mathbb{C}$.

(3) Considere a função definida por $f(z) = e^{z+1} - e^2 + \dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$.

(1 val) (a) Determine todos os diferentes desenvolvimentos de f em série de potências de $z-1$, indicando os domínios de validade.

(0,5 val) (b) Utilize os resultados da alínea anterior para calcular

(i)

$$\lim_{z\to 1} \frac{d^2}{dz^2}[(z-1)^2 f(z)];$$

(ii)

$$\oint_{|z-1|=\frac{7}{2}} \frac{f(z)}{(z-1)}\, dz.$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido horário.

(1 val) (c) Classifique as singularidades da função definida por $g(z) = \frac{f(z)}{(z-1)^3}$. Justifique a sua resposta.

(4) Para $R > \sqrt{3}$ considere a curva de Jordan $\gamma_R = I_R \cup C_R$ onde $I_R = \{x + 0i\colon x \in [-R, R]\}$ e $C_R = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = R \text{ e } \operatorname{Im}(z) \ge 0\}$.

(0,5 val) (a) Calcule $\oint_{\gamma_R} \dfrac{z^2}{(z^4+9)}\, dz$ (a curva γ_R é percorrida uma vez no sentido direto).

(0,5 val) (b) Mostre z que

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^2}{(z^4+9)}\, dz \right| \le \frac{\pi R^3}{(R^4-9)}.$$

(0,5 val) (c) Aproveite os resultados das alíneas anteriores para calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^4+9)}\, dx.$$

(1 val) (5) Existe alguma função f, holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, tal que $\operatorname{Res}(z^{2n} f(z), 0) = \frac{1}{n^2 3^n}$ para todo o $n \ge 0$? Justifique.