TÉCNICO LISBOA

Departamento de Matemática

ANÁLISE COMPLEXA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

PRIMEIRO TESTE - VERSÃO A
5 DE NOVEMBRO DE 2016

MEMEC, LEAN, MEC, LEGM

(1) Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $u(x,y) = \alpha^3 y^2 + 2x - \alpha x^2$.
 (a) Determine os valores de α para os quais u é a parte real de uma função holomorfa $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
 (b) Considerando $\alpha = 1$, determine a função inteira f tal que $\mathrm{Re}(f) = u$ e $f(i) = 1 + i$.
 (c) Sendo f a função da alínea anterior, calcule

$$\oint_{|z|=2016} \frac{z^3 f(z)}{(z-i)^2}\, dz$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido direto.

Resolução:

(a) Uma vez que $\mathbb{C}$ é simplesmente conexo, u é a parte real de uma função holomorfa sse u é harmónica. Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(2 - 2\alpha x) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\alpha^3 y\right) \\ &= -2\alpha + 2\alpha^3 = 2\alpha(\alpha^2 - 1) \end{aligned}$$

conclui-se que u é harmónica sse $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pm 1$.

(b) Escrevendo $f(x+iy) = y^2 + 2x - x^2 + iv(x,y)$, a função f será holomorfa sse v satisfizer as equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} 2 - 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \\ 2y = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v(x,y) = 2y - 2xy + A(x) \\ 2y = 2y - A'(x) \end{cases}$$

Portanto $A'(x) = 0$, ou seja $A(x) = K$ com $K \in \mathbb{R}$. Conclui-se que $v(x,y) = 2y - 2xy + K$. Uma vez que $f(i) = 1 + i$ temos $v(0,1) = 1 \Leftrightarrow 2 + K = 1 \Leftrightarrow K = -1$ e portanto a função pretendida é definida por

$$f(x+iy) = y^2 + 2x - x^2 + i(2y - 2xy - 1)$$

(c) Uma vez que a função $z^3 f(z)$ é inteira e a curva de integração é uma curva de Jordan contendo i percorrida no sentido direto, a fórmula integral de Cauchy para a derivada garante que

$$\oint_{|z|=2016} \frac{z^3 f(z)}{(z-i)^2}\, dz = 2\pi i \frac{d}{dz}\left(z^3 f(z)\right)_{z=i}$$

Temos

$$(z^3 f(z))' = 3z^2 f(z) + z^3 f'(z)$$

e

$$f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = (2 - 2x) - i2y$$

logo $f'(i) = 2 - 2i$ e conclui-se que

$$\oint_{|z|=2016} \frac{z^3 f(z)}{(z-i)^2}\, dz = 2\pi i \left(-3(1+i) + (-i)^3(2-2i)\right) = 2\pi - 2\pi i.$$

(2) Seja $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(x+iy) = (x+y) + i(x-y)$.

(a) Calcule $\displaystyle\int_{\gamma_i} f(z)\, dz$ para $i = 1, 2$, onde $\gamma_1(t) = t + it$ e $\gamma_2(t) = t + it^2$, com $0 \le t \le 1$.

(b) Determine, justificando, se f tem primitiva em $\mathbb{C}$.

Resolução:

(a) Temos

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^1 f(t+it)(1+i)dt = (1+i)\int_0^1 2tdt = 1+i.$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f(z)dz &= \int_0^1 f(t+it^2)(1+2it)dt = \int_0^1 \left(t+t^2+i(t-t^2)\right)(1+2it)dt \\ &= \int_0^1 t - t^2 + 2t^3 + i(t+t^2+2t^3)dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + i(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{4}{3}i\end{aligned}$$

(b) Uma vez que os caminhos de integração da alínea anterior têm os mesmos pontos inicial (0) e final $(1+i)$ mas o integral de f produz resultados diferentes, conclui-se que f não é primitivável.

(3) Considere a função definida por $f(z) = e^{z+i} - e^{2i} + \dfrac{i}{(z-i)(z+2i)}$.

(a) Determine todos os diferentes desenvolvimentos de f em série de potências de $z - i$, indicando os domínios de validade.

(b) Utilize os resultados da alínea anterior para calcular

(i)

$$\lim_{z\to i} \frac{d^3}{dz^3}[(z-i)^3 f(z)];$$

(ii)

$$\oint_{|z-i|=\frac{7}{2}} \frac{f(z)}{z-i}\, dz$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido horário.

(c) Classifique as singularidades da função definida por $g(z) = \frac{f(z)}{(z-i)^2}$. Justifique a sua resposta.

Resolução:

(a) A função f é diferenciável em $\mathbb{C} \setminus \{-2i, i\}$ logo tem dois desenvolvimentos em séries de potências de $(z-i)$ (ambos são desenvolvimentos em séries de Laurent), um válido em $0 < |z-i| < 3$ e outro válido para $|z-i| > 3$.

Temos, para todo o $z \in \mathbb{C}$,

$$e^{z+i} - e^{2i} = e^{z-i+2i} - e^{2i} = e^{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n!} - e^{2i} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2i}\frac{(z-i)^n}{n!}$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{z+2i} = \frac{1}{(z-i)+3i} = \begin{cases} \frac{1}{3i}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-i}{3i}\right)} = \frac{1}{3i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(-3i)^n}, & \text{para } |z-i|<3 \\ \frac{1}{(z-i)}\frac{1}{1-\left(-\frac{3i}{z-i}\right)} = \frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3i)^n}{(z-i)^n}, & \text{para } |z-i|>3 \end{cases}$$

donde se conclui que, para $0 < |z-i| < 3$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2i}}{n!}(z-i)^n + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-i)^{k-1}}{3(-3i)^k} \\ &= \frac{1}{3(z-i)} + \frac{i}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{2i}}{n!} + \frac{1}{3(-3i)^{n+1}}\right)(z-i)^n \end{aligned}$$

e que para $|z-i| > 3$ temos

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2i}}{n!}(z-i)^n + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i(-3i)^k}{(z-i)^{k+2}}$$

(b) (i) Para $0 < |z-i| < 3$ temos

$$(z-i)^3 f(z) = \frac{1}{3}(z-i)^2 + \frac{i}{9}(z-i)^3 + \ldots$$

logo

$$\frac{d^3}{dz^3}\left((z-i)^3 f(z)\right) = 6\frac{i}{9} + \ldots$$

donde se conclui que o limite em questão é igual a $\frac{2i}{3}$.

(ii) Pela fórmula integral para os coeficientes da série de Laurent, o integral é $2\pi i$ vezes o coeficiente constante no desenvolvimento válido em $|z-i| > 3$ achado na alínea anterior. Mas este coeficiente é 0, logo o mesmo acontece com o integral.

(c) A função $g(z)$ tem singularidades isoladas em $z = i$ e $z = -2i$. Uma vez que

$$\lim_{z\to i}(z-i)^3 g(z) = \lim_{z\to i}(z-i)\left(e^{z+i} - e^{2i}\right) + \frac{i}{z+2i} = \frac{1}{3}$$

concluímos que i é um polo de ordem 3. Como

$$\lim_{z\to -2i}(z+2i)g(z) = \lim_{z\to -2i}(z+2i)\left(e^{z+i} - e^{2i}\right) + \frac{i}{(z-i)^3} = \frac{1}{27}$$

conclui-se que i é um polo de ordem 1.

(4) Para $R > \sqrt{2}$ considere a curva de Jordan $\gamma_R = I_R \cup C_R$ onde $I_R = \{x + 0i \colon x \in [-R, R]\}$ e $C_R = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = R \text{ e } \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$.

(a) Calcule $\displaystyle\oint_{\gamma_R}\frac{z^2}{(z^4+4)}\,dz$ (a curva γ_R é percorrida no sentido direto).

(b) Mostre que

$$\left|\int_{C_R}\frac{z^2}{(z^4+4)}\,dz\right| \leq \frac{\pi R^3}{(R^4-4)}.$$

(c) Aproveite os resultados das alíneas anteriores para calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^4+4)}\, dx.$$

Resolução:

(a) As singularidades da função $f(z) = \frac{z^2}{z^4+4}$ são as soluções da equação

$$z^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow z \in \sqrt[4]{-4} = \{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{\frac{i3\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{\frac{i5\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{\frac{i7\pi}{4}}\} = \{\pm 1 \pm i\}$$

Uma vez que apenas as primeiras duas raízes pertencem ao interior de γ_R, o Teorema dos Resíduos diz-nos que

$$\oint_{\gamma_R} \frac{z^2}{(z^4+4)}\, dz = 2\pi i\,(\mathrm{Res}(f, 1+i) + \mathrm{Res}(f, -1+i))$$

As singularidades de f são todas polos simples e

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 1+i}(z-(1+i))f(z) &= \left(\lim_{z\to 1+i} z^2\right) \cdot \left(\lim_{z\to 1+i} \frac{z-(1+i)}{z^4+4}\right) \\ &= (1+i)^2 \lim_{z\to 1+i} \frac{1}{4z^3} = (1+i)^2 \frac{1}{4(1+i)^3} = \frac{1-i}{8} \end{aligned}$$

(onde usámos a regra de Cauchy para resolver a indeterminação) e

$$\begin{aligned} \lim_{z\to -1+i}(z-(-1+i))f(z) &= \left(\lim_{z\to -1+i} z^2\right) \cdot \left(\lim_{z\to -1+i} \frac{z-(-1+i)}{z^4+4}\right) \\ &= (-1+i)^2 \lim_{z\to -1+i} \frac{1}{4z^3} = (-1+i)^2 \frac{1}{4(-1+i)^3} = \frac{-1-i}{8} \end{aligned}$$

Conclui-se que

$$\oint_{\gamma_R} \frac{z^2}{(z^4+4)}\, dz = \frac{2\pi i}{8}\,(1-i-1-i) = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Para $z \in C_R$ temos

$$\left|z^4+4\right| \geq |z|^4 - 4 = R^4 - 4$$

e portanto

$$\left|\frac{z^2}{z^4+4}\right| = \frac{|z|^2}{|z^4+4|} \leq \frac{R^2}{R^4-4}$$

Assim, pela desigualdade triangular para o integral de caminho complexo,

$$\left|\int_{C_R} \frac{z^2}{(z^4+4)}\, dz\right| \leq \int_{C_R} \left|\frac{z^2}{z^4+4}\right| ds \leq \int_{C_R} \frac{R^2}{R^4-4} ds = \frac{\pi R^3}{R^4-4}.$$

(c) Pela alínea a) e a aditividade do integral temos para $R > 1$,

$$\int_{-R}^{R} \frac{z^2}{z^4+4} dz + \int_{C_R} \frac{z^2}{z^4+4} dz = \frac{\pi}{2}$$

Tomando o limite quando R tende para infinito na igualdade anterior e notando que a alínea b) implica que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z^2}{z^4+4}\, dz = 0$$

conclui-se que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+4} dx + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

(5) Existe alguma função f, holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, tal que $\text{Res}(z^{2n} f(z), 0) = \frac{1}{n^2 3^n}$ para todo o $n \geq 0$? Justifique.

Resolução: Se f é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ então existem $a_k \in \mathbb{C}$ únicos tais que

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$$

Então

$$z^{2n} f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^{k+2n} \qquad \text{para todo o } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Uma vez que o resíduo em 0 é o coeficiente de $\frac{1}{z}$ na série de Laurent anterior,

$$\text{Res}(z^{2n} f(z), 0) = a_{-2n-1}$$

e a condição do enunciado diz portanto que

$$a_{-2n-1} = \frac{1}{n^2 3^n}$$

Por outro lado, para que a série de Laurent de f convirja em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

tem de ser ∞ (pois $\left|\frac{1}{z}\right| < \infty \Leftrightarrow |z| > 0$), ou seja,

$$\limsup \sqrt[k]{|a_{-k}|} = 0$$

Mas esta última afirmação está em contradição com o cálculo

$$\lim \sqrt[2k+1]{|a_{-2k-1}|} = \lim e^{-\frac{1}{2k+1} \log\left(k^2 3^k\right)} = \lim e^{-\frac{2\log k + k \log 3}{2k+1}} = e^{-\frac{\log 3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Conclui-se que não existe uma função holomorfa nas condições do enunciado.