

## **Modelos Híbridos-Mistos de Tensão**

Simulação da Perda de Aderência Aço-Betão em Estruturas de Betão Armado

**Tiago Daniel Schclar Leitão**

Dissertação para obter o Grau de Mestre em

### **Engenharia Civil**

Orientadores:

Professor Luís Manuel Soares dos Santos Castro

Doutor Luís André Marcos Mendes

### **Júri**

Presidente: Professor Luís Manuel Coelho Guerreiro

Orientador: Professor Luís Manuel Soares dos Santos Castro

Vogal: Professor Pedro Manuel de Castro Borges Dinis

**Outubro 2016**



# Agradecimentos

Ao Professor Luís Castro, agradeço a orientação na mais recente e importante etapa do meu percurso académico. Agradeço também a disponibilidade, o incentivo e a amizade.

Ao Luís Mendes, agradeço todo o apoio ao longo do desenvolvimento do trabalho, ainda pela disponibilidade, dedicação e sugestões fundamentais para o resultado final da dissertação.

À minha família e amigos, pelo estímulo e apoio incondicional.

Por último, um especial agradecimento ao Instituto Superior Técnico, todos os docentes e colegas, por toda a experiência dos últimos cinco anos.



# Resumo

No seguimento de trabalhos anteriores, o objectivo principal do presente trabalho define-se pela generalização da formulação híbrida-mista de tensão à modelação do betão armado, admitindo a perda de aderência na interface aço-betão.

A formulação utilizada parte de aproximações independentes para as tensões no domínio do betão e dos esforços no domínio do aço, os deslocamentos no domínio e fronteiras estáticas do betão e do aço, assim como a tensão tangencial de aderência e o escorregamento na interface aço-betão. Estes dois últimos campos aproximados permitem a adopção do modelo de aderência proposto por Mendes, de forma a considerar o comportamento fisicamente não-linear da ligação entre os materiais. Faz-se ainda uma breve exposição da generalização da formulação mencionada para que inclua o comportamento não-linear do betão sob a forma do modelo de dano de Mazars.

A verificação do modelo passa por três casos de aplicação que possibilitam o confronto com resultados experimentais. Os dois primeiros casos consistem em testes de “pull-out” e o último num tirante de betão armado, permitindo avaliar o comportamento de ancoragens curtas e longas. As análises, recorrendo a um método incremental e iterativo e utilizando polinómios de Legendre para funções de aproximação, permitiram concluir que o modelo híbrido-misto de tensão tem um desempenho satisfatório quando aplicado à modelação de betão armado com perda de aderência.

## Palavras-chave

Elementos Finitos

Betão Armado

Modelo Híbrido-Misto de Tensão

Perda de Aderência Aço-Betão

Análise Fisicamente Não-linear



# Abstract

Following from previous research, the aim of this thesis is to present a hybrid-mixed stress finite element model for the analysis of reinforced concrete, taking into account the bond between the concrete and the rebar.

The finite element formulation is based on the independent approximation of the stress field in the concrete domain and the force field in the steel domain, the displacement fields in the domain and static boundaries of concrete and steel, as well as the bond stress and slip in the concrete-steel interface. The latter two fields allow for the implementation of a non-linear bond response based on the model proposed by Mendes. In addition, the inclusion of physically non-linear concrete behaviour based on the damage mechanics model proposed by Mazars, is concisely discussed.

As verification, three different examples based on previous experimental work are presented. The first two case studies correspond to pull-out tests and the last one concerns a reinforced concrete tie. Therefore, it is possible to assess the behaviour of both short and long anchorage lengths. For an incremental-iterative procedure, along with Legendre polynomials as approximation functions, the analyses afford an adequate response, corroborating the employment of a hybrid-mixed stress model for reinforced concrete in conjunction with a bond model.

## Keywords

Finite Elements

Reinforced Concrete

Hybrid-Mixed Stress Model

Concrete-Steel Bond

Physically Non-linear Analysis





# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Considerações Iniciais . . . . .	1
1.2	Objectivos . . . . .	2
1.3	Contribuições Originais . . . . .	2
1.4	Organização . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Formulação do Problema</b>	<b>5</b>
2.1	Introdução . . . . .	5
2.2	Hipóteses . . . . .	6
2.3	Equações de Equilíbrio . . . . .	6
2.4	Equações de Compatibilidade . . . . .	7
2.5	Relações Constitutivas . . . . .	7
2.5.1	Elasticidade . . . . .	8
2.5.2	Modelo de dano isotrópico . . . . .	8
2.5.3	Escorregamento . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Modelos de Elementos Finitos</b>	<b>15</b>
3.1	Introdução . . . . .	15
3.1.1	Formulações não-convencionais de elementos finitos . . . . .	15
3.2	Elementos Finitos de Deslocamento . . . . .	17
3.2.1	Introdução . . . . .	17
3.2.2	Aproximação . . . . .	17

3.2.3	Sistema governativo . . . . .	17
3.2.4	Observações . . . . .	18
3.3	Elementos Finitos Híbridos-Mistos de Tensão (HMT) . . . . .	18
3.3.1	Introdução . . . . .	18
3.3.2	Aproximações . . . . .	19
3.3.3	Sistema governativo . . . . .	19
3.4	HMT com Elementos de Barra . . . . .	22
3.4.1	Introdução . . . . .	22
3.4.2	Aproximações . . . . .	22
3.4.3	Sistema governativo . . . . .	23
3.5	HMT com Aproximação Independente para Elementos de Barra . . . . .	25
3.5.1	Introdução . . . . .	25
3.5.2	Aproximações . . . . .	25
3.5.3	Sistema governativo . . . . .	26
3.6	HMT com Escorregamento . . . . .	27
3.6.1	Introdução . . . . .	27
3.6.2	Aproximações . . . . .	28
3.6.3	Sistema governativo . . . . .	28
3.6.4	Escorregamento em regime não-linear . . . . .	29
3.7	Elementos Finitos Híbridos Duplamente Mistos de Tensão (HDMT) . . . . .	30
3.7.1	Introdução . . . . .	30
3.7.2	Aproximações . . . . .	31
3.7.3	Sistema governativo . . . . .	31
3.7.4	HDMT com elementos de barra . . . . .	32
3.7.5	HDMT com aproximação independente dos elementos de barra . . . . .	32
3.7.6	HDMT com escorregamento . . . . .	33
3.7.7	Dano em regime não-linear . . . . .	33

<b>4 Casos de Aplicação</b>	<b>35</b>
4.1 Considerações Iniciais . . . . .	35
4.1.1 Ancoragem curta vs. ancoragem longa . . . . .	35
4.1.2 Funções de aproximação . . . . .	36
4.1.3 Elemento de interface . . . . .	36
4.2 Exemplo 1 - Testes de “Pull-out” de Eligehausen et al. [33] . . . . .	37
4.3 Exemplo 2 - Testes de “Pull-out” de La Borderie e Pijaudier-Cabot [35] . . . . .	43
4.4 Exemplo 3 - Tirante de Betão Armado de Clément [36] . . . . .	48
<b>5 Conclusões e Desenvolvimentos Futuros</b>	<b>55</b>
5.1 Conclusões . . . . .	55
5.2 Desenvolvimentos Futuros . . . . .	55
<b>Bibliografia</b>	<b>57</b>



# Lista de Figuras

2.1	Formulação do problema . . . . .	5
2.2	Corpo genérico . . . . .	6
2.3	Elemento com dano unidirecional (Adaptado de Lemaitre [13]) . . . . .	9
2.4	Comportamento da ligação aço-betão (adaptado de FIB [19]) . . . . .	12
2.5	Escorregamento na interface aço-betão . . . . .	13
2.6	Representação esquemática do modelo base (adaptado de Mendes e Castro [6]) . . . . .	14
4.1	Interface implementada em paralelo (adaptado de Mendes [20]) . . . . .	36
4.2	Configuração do ensaio (adaptado de Eligehausen et al. [33] e Mendes e Castro [6]) . . . . .	37
4.3	Malha de elementos finitos . . . . .	38
4.4	Tensão $\sigma_{xx}$ no betão, na secção $y = 167.75$ mm e para um deslocamento imposto $q_{imp} = 2.0$ mm . . . . .	39
4.5	Tensão tangencial de aderência vs. deslocamento em $B$ (dados experimentais adaptados de [33] e análise FEM de [6]) . . . . .	40
4.6	Distribuição da tensão tangencial de aderência ao longo da interface para diferentes passos de carga . . . . .	41
4.7	Distribuição das tensões no aço e no betão para $q_{imp} = 2.0$ mm . . . . .	42
4.8	Deformada e tensões $\sigma_{xx}$ do betão, em $\text{kN/m}^2$ , para $q_{imp} = 2.0$ mm . . . . .	42
4.9	Configuração do ensaio de Pull-out de La Borderie e Pijaudier-Cabot [35] (adaptado de [6]) . . . . .	43
4.10	Malha de elementos finitos para o exemplo 2 . . . . .	44
4.11	Tensão tangencial de aderência vs. $q_{imp}$ (dados experimentais adaptados de [35] e análise FEM de [6]) . . . . .	45
4.12	Distribuição da tensão tangencial de aderência ao longo da interface, para diferentes passos de carga . . . . .	46

4.13	Distribuição do escorregamento ao longo da interface, para diferentes passos de carga . . . . .	46
4.14	Deformada e distribuição das tensões $\sigma_{zz}$ no bloco de betão, em $\text{kN/m}^2$ , para $q_{imp} = 1.2 \text{ mm}$	47
4.15	Distribuição das tensões $\sigma_{zz}$ do betão nos planos de corte $y = 40 \text{ mm}$ e $y = 44 \text{ mm}$ e distribuição das tensões nos elementos de aço, ambas para $q_{imp} = 1.2 \text{ mm}$ . . . . .	47
4.16	Configuração do ensaio elaborado por Clément [36] (adaptado de Mendes [20]) . . . . .	48
4.17	Malha de elementos finitos utilizada no exemplo 3 . . . . .	48
4.18	Diagramas carga-deslocamento (resultados experimentais de Clément [36] e diagramas lineares determinados com modelo HMT) . . . . .	49
4.19	Distribuição de tensões no betão $\sigma_{xx}$ na proximidade do varão de aço, para $k_s = 120 \text{ GPa/m}$ e $\Delta q_{imp} = 0.25 \text{ mm}$ . . . . .	50
4.20	Tensão no aço $\sigma_r$ para $\Delta q_{imp} = 0.25 \text{ mm}$ . . . . .	51
4.21	Tensão de aderência $\tau_b$ para $\Delta q_{imp} = 0.25 \text{ mm}$ . . . . .	52
4.22	Tensão no betão $\sigma_{xx}$ na proximidade da interface para $\Delta q_{imp} = 0.25 \text{ mm}$ . . . . .	52
4.23	Escorregamento na interface aço-betão para $\Delta q_{imp} = 0.25 \text{ mm}$ . . . . .	53
4.24	Deformada e distribuição de tensões no betão $\sigma_{xx}$ para $\Delta q_{imp} = 0.25 \text{ mm}$ . . . . .	53

# Lista de Tabelas

2.1	Parâmetros do modelo de escorregamento (adaptado de Mendes e Castro [6]) . . . . .	14
4.1	Características dos materiais (adaptado de [6]) . . . . .	38
4.2	Aproximações consideradas para o campo de tensão e tempo decorrido na resolução do sistema para 20 passos de carga . . . . .	39
4.3	Características dos materiais (adaptado de Mendes e Castro [6]) . . . . .	44
4.4	Valores de pico e residuais obtidos através dos modelos HMT e FEM e ensaios . . . . .	45
4.5	Características dos materiais (adaptado de Mendes [20]) . . . . .	49
4.6	Aproximações consideradas . . . . .	51





# Nomenclatura

$\varepsilon$	Tensor das deformações ou vector que lista as componentes independentes do tensor
$\tilde{\varepsilon}$	Deformação equivalente
$\varepsilon_i$	Deformações principais
$\Gamma$	Fronteira do elemento
$\Gamma_\sigma$	Fronteira estática
$\Gamma_u$	Fronteira cinemática
$\Gamma_{\sigma c}$ ( $\Gamma_{\sigma r}$ )	Fronteira estática do elemento de betão (aço)
$\kappa$	Limite de crescimento do dano
$\kappa_0$	Deformação a que se inicia o dano
$\lambda_b$	Pesos da aproximação do campo de tensões da interface
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\sigma$	Tensor das tensões ou vector que lista as componentes independentes do tensor
$\sigma_c$	Campo de tensões no domínio do betão
$\sigma_c^*$	Pseudo-tensão tangencial na fronteira do betão
$\tilde{\sigma}$	Tensão efectiva
$\tau_b$	Tensão tangencial de aderência
$\tau_{pb}$	Tensão de aderência para rigidez inicial
$\tau_0$	Tensão de aderência de pico
$\tau_{res}$	Tensão de aderência residual
$\tau_b^*$	Pseudo-tensão tangencial de aderência
$\mathbf{A}_\Gamma$	Operador de compatibilidade na fronteira
$\mathbf{A}_{\Gamma c}$ ( $\mathbf{A}_{\Gamma r}$ )	Operador de compatibilidade na fronteira do betão (aço)
$\mathbf{A}_V$	Operador de compatibilidade no domínio
$\mathbf{A}_{Vc}$ ( $\mathbf{A}_{Vr}$ )	Operador de compatibilidade no domínio do betão (aço)
$A_r$	Área de secção do varão
$\mathbf{b}$	Forças de massa
$\mathbf{B}$ ( $\mathbf{B}_c$ )	Operador de relação constitutiva (do betão)
$c_s$	Parâmetro de controlo da curvatura no troço de amolecimento
$\mathbf{C}_{bc}$ ( $\mathbf{C}_{br}$ )	Operador de compatibilidade interface-betão (aço)
$\mathbf{C}_{bs}$	Operador de compatibilidade do escorregamento
$\mathbf{D}$	Operador diferencial de equilíbrio
$\mathbf{D}^*$	Operador diferencial de compatibilidade
$d_t$ ( $d_c$ )	Dano à tracção (compressão)
$d$	Variável de dano
$E$	Módulo de elasticidade

$\mathbf{e}$	Pesos da aproximação do campo de deformações no domínio do elemento
$\widetilde{E}$	Módulo de elasticidade de material com dano
$e_c$	Espessura do elemento de betão
$E_c (E_r)$	Módulo de elasticidade do betão (aço)
$\mathbf{E}_V$	Funções de aproximação do campo de deformações no domínio do elemento
$\mathbb{F}$	Matriz de flexibilidade
$\mathbf{F}_b$	Funções de aproximação do campo de tensões da interface
$\mathbb{F}_c (\mathbb{F}_r)$	Matriz de flexibilidade do betão (aço)
$\mathbf{F}$	Vector de forças nodais equivalentes (FEM)
$\mathbf{F}$	Tensor constitutivo de flexibilidade
$f_1$	Factor de tensão de aderência residual
$f_{ct}$	Resistência à tracção do betão
$I$	Matriz identidade
$\widetilde{\mathbb{K}}_c$	Operador não-linear de rigidez do betão
$\mathbf{K}_s$	Matriz de rigidez da interface aço-betão
$\mathbf{K}$	Tensor constitutivo de rigidez
$\tilde{k}$	Rigidez tangente do betão
$\mathbb{K} (\mathbb{K}_c)$	Matriz de rigidez (do betão)
$k_0$	Rigidez secante à tensão de aderência máxima
$k_s$	Rigidez da interface aço-betão
$k_{pb}$	Rigidez tangente para aderência perfeita
$\mathbf{N}$	Matriz que contém as componentes do versor normal à fronteira
$\overline{\mathbf{N}}_r$	Esforço normal no aço
$P_c$	Perímetro crítico da armadura
$\mathbf{Q}_\Gamma$	Vector de forças generalizadas na fronteira
$\mathbf{Q}_{\Gamma_c} (\mathbf{Q}_{\Gamma_r})$	Vector de forças generalizadas na fronteira do betão (aço)
$\mathbf{Q}_V$	Vector de forças generalizadas no domínio
$\mathbf{Q}_{V_c} (\mathbf{Q}_{V_r})$	Vector de forças generalizadas no domínio do betão (aço)
$\mathbf{q}_V$	Pesos da aproximação do campo de deslocamentos no domínio
$\mathbf{q}_\Gamma$	Pesos da aproximação do campo de deslocamentos na fronteira estática
$\mathbf{q}_V$	Vector de deslocamentos nodais
$\mathbf{q}_{\Gamma_c} (\mathbf{q}_{\Gamma_r})$	Pesos da aproximação do campo de deslocamentos na fronteira do betão (aço)
$\mathbf{q}_{V_c} (\mathbf{q}_{V_r})$	Pesos da aproximação do campo de deslocamentos no domínio do betão (aço)
$r$	Raio da armadura
$S$	Área nominal da secção de betão
$S_D$	Área efectiva de todas as micro fissuras e cavidades
$\mathbf{S}_b$	Funções de aproximação do escorregamento na interface
$\mathbf{S}_c (\mathbf{S}_r)$	Funções de aproximação do campo de tensões no domínio do betão (aço)
$\mathbf{S}$	Funções de aproximação do campo de tensões no domínio
$s_b$	Pesos da aproximação do escorregamento na interface
$s_{pb}$	Limite do escorregamento para aderência perfeita
$s_{res}$	Escorregamento no início do patamar de resistência residual
$s_0$	Escorregamento para a tensão de aderência máxima
$s$	Escorregamento
$\bar{\mathbf{t}}$	Tensões aplicadas na fronteira

$t_c$	Força distribuída na fronteira do betão
$\mathbf{U}_V$	Funções de aproximação (FEM)
$\mathbf{U}_{\Gamma_c} (\mathbf{U}_{\Gamma_r})$	Funções de aproximação do campo de deslocamentos na fronteira do betão (aço)
$\mathbf{U}_{V_c} (\mathbf{U}_{V_r})$	Funções de aproximação do campo de deslocamentos no domínio do betão (aço)
$\mathbf{U}_V$	Funções de aproximação do campo de deslocamentos no domínio
$\mathbf{U}_\Gamma$	Funções de aproximação do campo de deslocamentos na fronteira estática
$\bar{\mathbf{u}}$	Deslocamentos impostos
$\mathbf{u}_c (\mathbf{u}_r)$	Deslocamentos no domínio e fronteira do betão (aço)
$\mathbf{u}$	Deslocamentos no domínio ou vector que reúne as entradas independentes do campo de deslocamentos
$u_{V_r}$	Deslocamento no domínio do aço
$u_{\Gamma_b}$	Deslocamento na fronteira do betão
$V$	Domínio do elemento
$V_c(V_r)$	Domínio do elemento de betão (aço)
$V_i$	Domínio da interface aço-betão
$\mathbf{v}$	Vector de deformações generalizadas
$\bar{\mathbf{v}}$	Vector de deformações generalizadas na fronteira cinemática
$\bar{\mathbf{v}}_c (\bar{\mathbf{v}}_r)$	Vector de deformações generalizadas na fronteira cinemática do betão (aço)
$\mathbf{X}_c (\mathbf{X}_r)$	Pesos da aproximação do campo de tensões no domínio do betão (aço)
$\mathbf{X}$	Pesos da aproximação do campo de tensões no domínio



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações Iniciais

O Método dos Elementos Finitos, pela sua eficácia e adequação a uma grande variedade de problemas mecânicos, é amplamente aplicado na mecânica estrutural. Em linhas gerais, uma formulação de elementos finitos consiste na idealização de uma estrutura, respectivo carregamento e condições de apoio, tomando, para tal, hipóteses simplificativas e a consequente imposição das leis fundamentais da Mecânica - equilíbrio, compatibilidade e relações constitutivas. O modelo discreto assim construído permite a obtenção de uma solução aproximada para os campos estáticos e cinemáticos que caracterizam o comportamento mecânico da estrutura em estudo.

As formulações mais frequentemente utilizadas, denominadas convencionais, são de elementos finitos clássicos de deslocamento. Neste caso, é aproximado o campo de deslocamentos em função dos deslocamentos nodais do modelo, impondo-se localmente a compatibilidade e as relações constitutivas. Pelo contrário, as condições de equilíbrio apenas são impostas de forma fraca. Deste modo, surgem duas características desfavoráveis a esta formulação: o grau de aproximação depende do número de nós, limitando o refinamento de tipo-p (refinamento do modelo através do aumento dos graus das funções aproximação); as soluções obtidas estão do lado da compatibilidade, sobrevalorizando a capacidade resistente da estrutura.

Em oposição aos elementos finitos de deslocamento, surgem os métodos não-convencionais, entre os quais se inserem as formulações híbridas e mistas desenvolvidas por Freitas et al. [1]. Estas formulações trazem vantagens, como a utilização de aproximações independentes e hierárquicas para os campos de tensões e deslocamentos (ou deformações), permitindo uma grande flexibilidade de escolha das funções de aproximação, e a possibilidade de se obter soluções quasi-estaticamente admissíveis. Três formulações diferentes são propostas por Freitas et al. [1] - híbrida-mista, híbrida e híbrida-Trefftz. Para cada uma delas há ainda dois modelos distintos - de deslocamento e de tensão.

A formulação utilizada no presente trabalho integra-se no modelo de elementos finitos híbridos-mistos de tensão. Diz-se híbrida pelo uso de diferentes campos aproximados independentemente no domínio e na fronteira e mista por resultar da aproximação de dois campos distintos no domínio - tensões e deslocamentos. Como se opta pela aproximação dos deslocamentos na fronteira estática, há uma imposição ponderada das condições de equilíbrio na fronteira, dando origem à designação de modelo de tensão.

A extensão deste método ao betão armado tem vindo a ser desenvolvida em trabalhos da mesma unidade de investigação [2, 3, 4]. Por um lado, é necessário um sistema governativo que englobe tanto os elementos de betão como os elementos de armadura. Por outro, um modelo mais completo exige a consideração do comportamento não-linear do betão. A inclusão desta não-linearidade pode passar pela utilização de uma variante dos modelos híbridos-mistos de tensão, na qual se aproxima também, de forma independente, o campo de deformações no domínio dos elementos de betão [3]. Desta forma, as relações constitutivas no modelo discreto aparecem descritas num formato de rigidez, simplificando a introdução do modelo de dano (mais concretamente o modelo de dano de Mazars [5]).

O acréscimo de um novo grau de detalhe no modelo de elementos finitos passa pela consideração do comportamento da aderência aço-betão. Esta propriedade pode ser modelada recorrendo ao cálculo da tensão de aderência em função do escorregamento relativo entre o aço e o betão na interface entre os materiais, tal como proposto por Mendes e Castro [6] para uma análise de elementos finitos clássicos.

## 1.2 Objectivos

No seguimento de trabalhos anteriores, o objectivo principal do presente trabalho define-se pela generalização da formulação híbrida-mista de tensão à modelação do betão armado, admitindo a perda de aderência na interface aço-betão.

Sobre a formulação híbrida-mista para betão armado, constituída por elementos bidimensionais de betão e elementos lineares de aço, pretende-se acrescentar novos campos de aproximação que permitam simular a ligação entre os materiais. A inclusão destas aproximações possibilitam a adaptação do modelo de aderência proposto por Mendes e Castro [6], ou seja, o sistema governativo passa a poder incluir não só uma formulação fisicamente linear mas também não-linear da aderência. Pretende-se, depois, aplicar a nova formulação a casos experimentais que procurem avaliar este mesmo comportamento.

Por último, tem-se como objectivo a generalização da formulação híbrida-mista para que envolva em simultâneo o modelo de escorregamento e o modelo de dano para o betão (modelo de Mazars [5] já adoptado em [4]). Neste caso, apenas se apresenta a formulação do modelo e o algoritmo para a resolução do problema não-linear associado, deixando-se para desenvolvimentos futuros a validação do modelo com casos de aplicação práticos.

## 1.3 Contribuições Originais

No quarto capítulo, os resultados apresentados foram obtidos utilizando o programa pyHM desenvolvido por Mendes e Castro [7], escrito em linguagem Python. Para o processamento dos gráficos recorreu-se ao MATLAB [8] (diagramas) e ao GID [9] (distribuições no plano). Apesar da modelação não-linear ter sido implementada apenas no programa pyHM, com o objectivo de permitir uma melhor compreensão da formulação utilizada, acompanhou-se com implementação em MATLAB dos modelos em regime linear.

## 1.4 Organização

O trabalho está dividido em 5 capítulos, sendo este o primeiro e de função introdutória.

No segundo capítulo é apresentada a formulação do problema, incluindo as condições de equilíbrio e de compatibilidade, assim como as relações constitutivas. Nestas últimas, para além do comportamento elástico linear, expõe-se os modelos de dano (em especial o de Mazars [5]) e a modelação do comportamento da ligação aço-betão.

No terceiro capítulo, após uma breve descrição dos elementos finitos clássicos, apresenta-se a formulação híbrida-mista de tensão. Esta mesma formulação é posteriormente generalizada para elementos de betão armado. De seguida, recorrendo a novos campos aproximados, inclui-se o modelo da interface aço-betão. Por último, sucintamente estende-se a formulação para incluir também o comportamento não-linear do betão, sob a forma do modelo de dano.

No quarto capítulo utiliza-se a formulação apresentada anteriormente em três casos de aplicação, comparando-se os resultados obtidos com os resultados experimentais apresentados pelos autores de cada ensaio. Os dois primeiros casos consistem em testes de “pull-out”, permitindo avaliar em detalhe a perda de aderência entre os materiais, em situações de ancoragens curtas. No terceiro exemplo, complementa-se a análise anterior com a consideração de ancoragens longas, recorrendo-se ao estudo de um tirante de betão armado. Nos três exemplos o foco é o comportamento da interface, não sendo considerado o modelo de dano para o betão.

O quinto capítulo apresenta as principais conclusões obtidas no trabalho e são sugeridos possíveis desenvolvimentos futuros.





## Capítulo 2

# Formulação do Problema

### 2.1 Introdução

Neste capítulo são estabelecidas as grandezas e equações fundamentais da mecânica dos corpos deformáveis, utilizadas para caracterizar o seu comportamento, quando conhecidas as acções que sobre ele se exercem. Deste modo, observando-se o diagrama da Figura 2.1, são definidas como grandezas - as tensões, deformações, cargas e deslocamentos - e como equações fundamentais - o equilíbrio, as relações constitutivas e a compatibilidade.

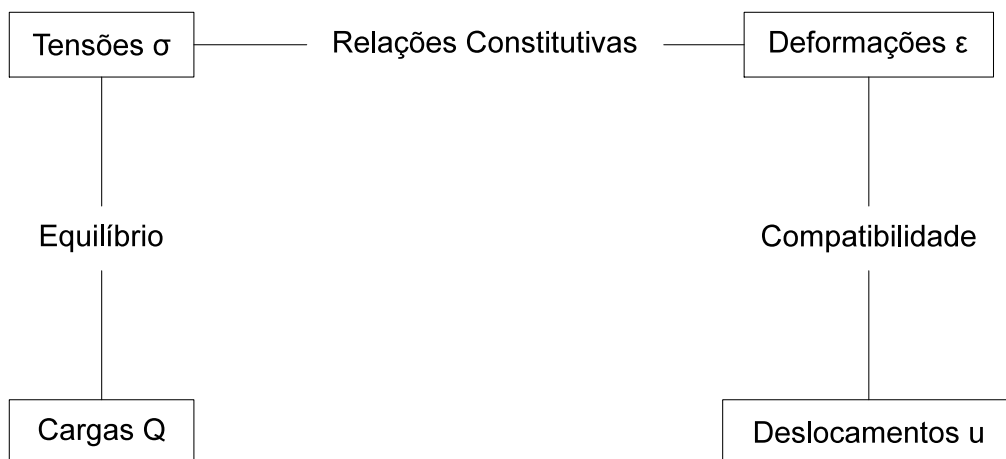


Figura 2.1: Formulação do problema

Considerando um corpo genérico (Figura 2.2), tem-se por objectivo determinar a distribuição de tensões  $\sigma$ , deformações  $\epsilon$  e deslocamentos  $\mathbf{u}$ , conhecidas as cargas aplicadas em parte do corpo (tensões  $\bar{\mathbf{t}}$ , na fronteira estática  $\Gamma_\sigma$ , e forças de massa  $\mathbf{b}$ , no domínio  $V$ ) e os deslocamentos na restante parte (deslocamentos impostos  $\bar{\mathbf{u}}$ , na fronteira cinemática  $\Gamma_u$ ).

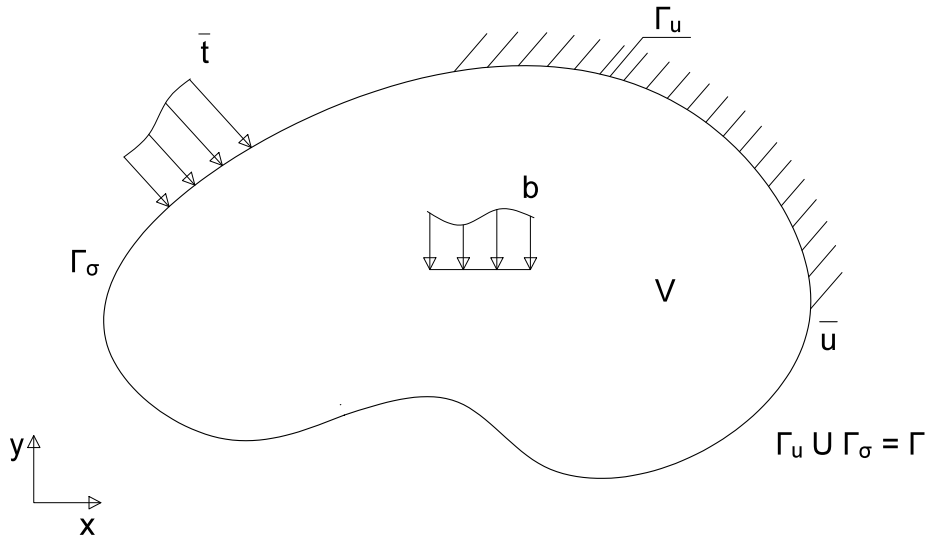


Figura 2.2: Corpo genérico

## 2.2 Hipóteses

No desenvolvimento do texto são admitidas hipóteses simplificativas:

- Linearidade geométrica - baseando-se na hipótese dos pequenos deslocamentos (onde se inclui a hipótese das pequenas deformações), admite-se que a configuração do corpo indeformado não se distingue da configuração após a deformação, permitindo escrever as condições de equilíbrio na situação indeformada;
- Isotropia - as propriedades do material são totalmente independentes da direcção em que são consideradas.

Note-se que não são tidas em conta nem a linearidade física nem a homogeneidade do material. No presente trabalho, é admitida a não linearidade física dos materiais e da ligação aço-betão. Ao definir o comportamento não linear do betão e da interface em função das tensões aí existentes, também não é verificada a homogeneidade das propriedades dos materiais.

## 2.3 Equações de Equilíbrio

Fazendo o equilíbrio de forças num elemento infinitesimal de volume, a imposição de uma resultante de forças nula implica [10]:

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0 \quad (2.1)$$

Pode-se, igualmente, escrever as equações diferenciais de equilíbrio no formato matricial:

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0, \quad \text{em } V \quad (2.2)$$

$$\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{t}}, \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (2.3)$$

onde  $\sigma$  contém as componentes independentes do tensor das tensões e  $\mathbf{D}$  é o operador diferencial de equilíbrio e  $\mathbf{N}$  a matriz que contém as componentes do versor normal à fronteira  $\Gamma_\sigma$  (para problemas de elasticidade plana estes três operadores estão definidos em [11]).

## 2.4 Equações de Compatibilidade

Partindo da hipótese dos pequenos deslocamentos, pode definir-se a expressão [10]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4)$$

Deste modo, em formato matricial tem-se:

$$\varepsilon = \mathbf{D}^* \mathbf{u}, \quad \text{em } V \quad (2.5)$$

onde  $\varepsilon$  contém as componentes independentes do tensor das deformações e  $\mathbf{D}^*$  é o operador diferencial de compatibilidade, matriz adjunta de  $\mathbf{D}$  (para problemas de elasticidade plana estes operadores estão definidos em [11]).

Na fronteira cinemática a compatibilidade é garantida pela condição:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.6)$$

## 2.5 Relações Constitutivas

O comportamento dos materiais pode ser definido com um maior ou menor grau de simplificação. A relação mais elementar é o comportamento elástico (não sendo necessariamente linear) mas, conforme a relevância dos vários factores que afectam o comportamento, a relação tensão-deformação pode tomar um carácter irreversível (mantendo-se deformações após descarga).

No caso do **aço**, e em concordância com a prática comum, considera-se suficientemente representativo um comportamento elástico linear, apresentado na secção que se segue.

Para o **betão**, a situação não é tão simples. Até um certo grau, o betão pode-se pressupor elástico (para cargas muito inferiores à sua resistência última). No entanto, com o aumento da tensão, a formação e desenvolvimento de fendilhação nas interfaces entre o cimento e os agregados confere uma curvatura à relação tensão-deformação, representando a perda gradual de rigidez. Ou seja, com o desenvolvimento da fendilhação, há uma redução da área resistente e, conseqüentemente, uma maior tensão local, quando comparada com a tensão nominal na área total da secção, alterações estas que implicam um crescimento mais rápido da deformação do que da tensão (nominal) [12]. Conclui-se então que no caso do betão não se pode apenas considerar um comportamento elástico, sendo necessário incluir os efeitos da fendilhação. Este factor pode ser modelado pela mecânica do dano, apresentada adiante.

Ter-se-á ainda em conta o comportamento da **interface aço-betão**. Não sendo tão comum incluir explicitamente a não-linearidade da ligação entre ambos os materiais, tem-se como objectivo do presente trabalho a expansão da formulação de modo a que seja possível considerar esta componente do comportamento do betão armado.

## 2.5.1 Elasticidade

Para um comportamento fisicamente linear, a relação tensão-deformação pode ser definida matricialmente pela lei de Hooke [10]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{F}\boldsymbol{\sigma} \quad (\text{formato de flexibilidade}) \quad (2.7)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{formato de rigidez}) \quad (2.8)$$

com  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{K}$  os tensores constitutivos de flexibilidade e de rigidez, respectivamente. De forma mais específica, através da expressão:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (2.9)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade (ou módulo de Young) e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

Para o caso dos varões de aço, considerando o seu comportamento predominantemente axial, a condição de elasticidade pode ser definida em função do esforço normal  $N_r$ , tal que:

$$\varepsilon = F_r N_r \quad (2.10)$$

onde:

$$F_r = \frac{1}{E_r A_r} \quad (2.11)$$

sendo  $E_r$  o módulo de elasticidade do aço e  $A_r$  a área de secção do varão.

## 2.5.2 Modelo de dano isotrópico

O dano dos materiais é o processo físico progressivo que leva à rotura. A mecânica do dano é o estudo, através de variáveis mecânicas, dos mecanismos activos nesta deterioração quando o material é carregado. O dano inicia-se apenas com o a perda de ligações no material (ou seja, crescimento e propagação de defeitos internos), distinguindo-se do comportamento elástico (directamente relacionado com o movimento relativo dos átomos) e da plasticidade (deformações originadas por escorregamentos a nível dos cristais ou moléculas) [13].

**Representação mecânica do dano** A teoria da mecânica do dano proposta por Kachanov (1958) define o dano através de uma única variável. Para o caso simples de dano unidirecional homogéneo (Figura 2.3) obtém-se a definição [13]:

$$d = \frac{S_D}{S} \quad (2.12)$$

onde  $S$  é a área nominal da secção de normal  $\vec{n}$  e  $S_D$  a área efectiva de todas as micro fissuras e cavidades.

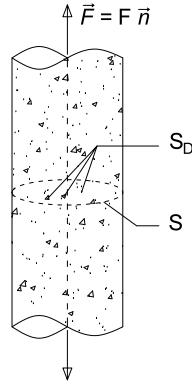


Figura 2.3: Elemento com dano unidirecional (Adaptado de Lemaitre [13])

Admitindo que não há tensões nas discontinuidades, torna-se conveniente o conceito de tensão efectiva definido por Rabotnov (1968), relacionado com a área que efectivamente oferece resistência ao material [13]:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S - S_D} \quad (2.13)$$

Tendo em conta a definição apresentada para a variável de (2.12):

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S \left(1 - \frac{S_D}{S}\right)} = \frac{\sigma}{1 - d} \quad (2.14)$$

o que, juntando à lei da elasticidade (2.9), permite escrever a equação da elasticidade (uniaxial) para um material com dano [13]:

$$D = 0 \implies \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (\text{material sem dano}) \quad (2.15)$$

$$0 < D < 1 \implies \varepsilon = \frac{\sigma}{E(1 - d)} \quad (\text{material danificado}) \quad (2.16)$$

O módulo de elasticidade do material com dano é então definido pela relação:

$$\tilde{E} = E(1 - d) \quad (2.17)$$

**Dano isotrópico** Segundo Lemaitre [13], a modelação tridimensional do efeito do dano (definido, até aqui, uniaxialmente) faz-se utilizando os princípios da termodinâmica dos processos irreversíveis, sendo de aplicação simples para o caso de dano isotrópico. O mesmo autor refere ainda que assumir um dano isotrópico é realista em muitos casos, em especial quando as direcções principais do tensor de tensões se mantêm constantes. A explicação detalhada da termodinâmica aplicada à mecânica do dano, assim como uma análise de dano anisotrópico podem ser encontradas em [13, 14].

**Modelo de dano de Mazars [5]** Seguindo as escolhas de trabalhos anteriores como [15, 4], o modelo de dano a utilizar é o modelo de dano isotrópico de Mazars [5, 16].

Admite-se uma evolução do dano dependente apenas das extensões positivas. Para tal é definida a deformação equivalente:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i \rangle_+^2} \quad (2.18)$$

onde  $\langle \cdot \rangle_+$  são os parêntesis de Macaulay (ver definição em [17]) e  $\varepsilon_i$  as deformações principais. A função de potencial de dissipação é dada por:

$$f(\tilde{\varepsilon}, \kappa) = \tilde{\varepsilon} - \kappa \quad (2.19)$$

onde  $\kappa$  é o limite para o crescimento do dano. Ou seja,  $\kappa$  tem sempre o valor máximo de  $\tilde{\varepsilon}$  atingido ao longo do carregamento, permitindo distinguir entre uma situação de carga ou descarga. De início,  $\kappa_0$  define o valor da deformação a partir do qual ocorre dano e é definido por:

$$\kappa_0 = \frac{f_{ct}}{E_c} \quad (2.20)$$

sendo  $f_{ct}$  a resistência do betão em ensaios de tracção uniaxial e  $E_c$  o módulo de elasticidade do betão. As condições de carga e descarga já mencionadas são impostas por:

$$f \leq 0, \quad \dot{\kappa} = \frac{d\kappa}{dt} \geq 0, \quad \dot{\kappa}f = 0 \quad (2.21)$$

onde a última condição apenas permite a evolução do dano para  $\tilde{\varepsilon}$  e  $\kappa$  iguais.

É então possível definir a lei de evolução do dano em função de  $\kappa$ :

$$d = g(\kappa) \quad (2.22)$$

Mais concretamente, separando a resposta à tracção e à compressão, é possível definir:

$$d = \alpha_t d_t + \alpha_c d_c \quad (2.23)$$

onde  $d_t$  e  $d_c$  representam o dano à tracção e à compressão, respectivamente. Os coeficientes  $\alpha_t$  e  $\alpha_c$  cumprem  $\alpha_t + \alpha_c = 1$  e são definidos como proposto por [18]:

$$\alpha_t = \frac{\sum_i \langle \varepsilon_{Ti} \rangle_+}{\sum_i \langle \varepsilon_{Ti} \rangle_+ + \langle \varepsilon_{Ci} \rangle_+} \quad \text{e} \quad \alpha_c = \frac{\sum_i \langle \varepsilon_{Ci} \rangle_+}{\sum_i \langle \varepsilon_{Ti} \rangle_+ + \langle \varepsilon_{Ci} \rangle_+} \quad (2.24)$$

com:

$$\varepsilon_T = \frac{1 + \nu}{E_c} \langle \tilde{\sigma} \rangle_+ - \frac{\nu}{E_c} \sum_i \langle \tilde{\sigma}_i \rangle_+ I \quad (2.25)$$

$$\varepsilon_C = \frac{1 + \nu}{E_c} \langle \tilde{\sigma} \rangle_- - \frac{\nu}{E_c} \sum_i \langle \tilde{\sigma}_i \rangle_- I \quad (2.26)$$

em que  $I$  é a matriz identidade e  $\langle \tilde{\sigma} \rangle_+$  e  $\langle \tilde{\sigma} \rangle_-$  são, respectivamente, a parte positiva e negativa do tensor das tensões efectivas principais, dadas por:

$$\langle \tilde{\sigma} \rangle_{\pm} = \frac{1}{2} (\tilde{\sigma} \pm |\tilde{\sigma}|) \quad (2.27)$$

e  $\tilde{\sigma}$  é calculado a partir das deformações existentes com a expressão da elasticidade (2.8).

Por sua vez, o dano à tracção e compressão são definidos por:

$$d_t = 1 - \frac{\kappa_0(1 - A_t)}{\kappa} - \frac{A_t}{\exp[B_t(\kappa - \kappa_0)]} \quad (2.28)$$

$$d_c = 1 - \frac{\kappa_0(1 - A_c)}{\kappa} - \frac{A_c}{\exp[B_c(\kappa - \kappa_0)]} \quad (2.29)$$

onde  $A_t$ ,  $A_c$ ,  $B_t$  e  $B_c$  são parâmetros característicos do material determinados por ensaios laboratoriais. Pijaudier-Cabot e Mazars [16] facultam a gama de valores usuais para os parâmetros referidos.

**Modelo de dano não local** Quando se considera uma relação constitutiva com amolecimento, é necessária a utilização de um processo de regularização [16]. Caso contrário, o problema fica mal colocado e a solução fica a depender da discretização considerada, uma vez que se verifica uma localização das deformações numa zona restrita do domínio. Esta regularização pode ser conseguida à custa da consideração de um modelo integral não-local, no qual o valor da deformação equivalente é determinado tendo em conta o valor dessa grandeza na vizinhança do ponto em causa.

### 2.5.3 Escorregamento

Não sendo o objectivo principal fazer uma explicação exhaustiva da teoria da aderência aço-betão, remete-se para [19, 20] uma exposição mais detalhada deste tema.

A ligação aço-betão é o que permite a transmissão de forças longitudinais entre o aço e o betão na sua proximidade, através da tensão tangencial de aderência  $\tau_b$ . Deste modo, a transmissão de forças resulta em alterações de esforços no aço e no betão ao longo do seu comprimento. Havendo um diferencial entre as deformações no aço e no betão, dá-se um deslocamento relativo entre os materiais - escorregamento  $s$  [19].

**Caracterização do comportamento** É então possível caracterizar o comportamento da ligação aço-betão (Figura 2.4) para um varão sujeito a uma força de arrancamento em quatro fases distintas [19]:

Fase I (betão não fendilhado) Para tensões tangenciais de aderência de valor reduzido,  $\tau_b \leq \tau_1 = (0.2 \text{ a } 0.8)f_{ct}$ , a transferência de esforços é assegurada maioritariamente pela aderência química, não ocorrendo qualquer escorregamento. Não obstante, há algum deslocamento causado pela grande concentração de deformações na zona da interface.

Fase II (início da fendilhação) Para  $\tau_b > \tau_1$  desfaz-se a aderência química. Para varões nervurados formam-se tensões elevadas no betão, na área envolvente das nervuras, dando origem a fendilhação e conseqüente escorregamento.

Fase III Atingindo tensões  $\tau_b > (1 \text{ a } 3)f_{ct}$  as fendas longitudinais propagam-se radialmente. O betão envolvente exerce uma pressão de confinamento sobre os varões, sendo a rigidez da ligação assegurada primariamente pela interligação entre o aço, o betão comprimido da envolvente e o betão não danificado que o circunda.

Fase IV Três situações distintas se afiguram:

- ( a ) Em varões lisos, imediatamente após a rotura da ligação química, a transferência de forças é assegurada por atrito. O desgaste da interface devido ao escorregamento reduz progressivamente a compressão radial e, conseqüentemente, a tensão tangencial de aderência.
- ( b ) No caso de varões nervurados com confinamento transversal fraco ou moderado, as fendas longitudinais prolongam-se através da totalidade do recobrimento, levando a uma rutura abrupta (frágil).
- ( c ) Para varões nervurados com confinamento significativo, por meio de armaduras transversais, não sobrevém uma total rutura do betão, sendo a resistência da ligação governada pelo arrancamento do varão. Neste caso, a partir de um certo valor de esforços, o mecanismo de transferência passa da resistência exercida pelas nervuras para a fricção na interface.

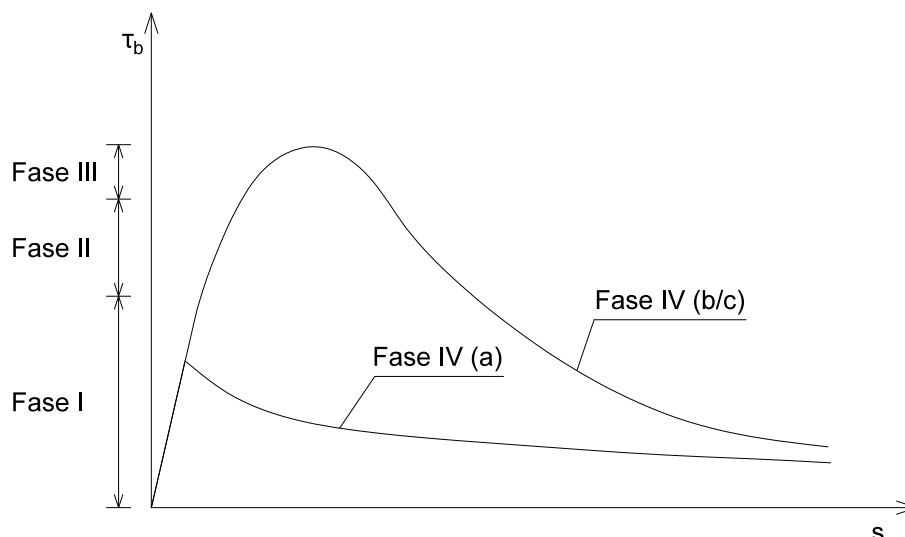


Figura 2.4: Comportamento da ligação aço-betão (adaptado de FIB [19])

**Factores de influência [19]** O comportamento da ligação aço-betão é influenciado por numerosos factores relativos ao betão, aço e ao estado de tensão existente.

Como se pode concluir da Figura 2.4, as características dos varões e, mais concretamente, a existência ou não de nervuras, tem uma influência muito significativa no desempenho da ligação. Por outro lado, em varões nervurados, o estado de tensão no aço é pouco relevante quando se trata de valores no domínio do comportamento elástico.

Quanto ao betão, a evolução do escorregamento na interface depende do comportamento do betão tanto em tracção como em compressão. Assim, para além da resistência, aspectos construtivos como o recobrimento, as características do cimento e agregados e a qualidade da execução são de grande importância. Igualmente, exerce influência o estado de tensão do betão na vizinhança da ligação, contribuindo positivamente para a resistência a existência de tensões transversais de compressão e negativamente quando de tracção.

Mais dois conjuntos de factores são de mencionar: factores ambientais, como a temperatura e corrosão; historial de carregamentos, como o carregamento cíclico, a frequência e dimensão da carga e a ação de carregamentos de longo termo sobre a resistência e deformabilidade do betão.

**Equações fundamentais** Duas equações fundamentais regem o comportamento no domínio da interface aço-betão  $V_i$ :

$$s_b = u_{V_r} - u_{\Gamma_b}, \quad \text{em } V_i \quad (2.30)$$

$$\tau_b = k_s s_b, \quad \text{em } V_i \quad (2.31)$$

onde  $s_b$  define o escorregamento,  $\tau_b$  a tensão tangencial de aderência,  $u_{V_r}$  representa o deslocamento no domínio do aço e  $u_{\Gamma_b}$  o deslocamento na fronteira correspondente do elemento de betão. Realça-se ainda que a expressão (2.31) define a relação constitutiva da interface no formato de rigidez, estando  $k_s$  em unidades  $FL^{-3}$ .



Estando definida a tensão tangencial de aderência, é agora possível aduzir o equilíbrio no domínio do elemento de aço  $V_r$  e na fronteira coincidente de betão  $\Gamma_{\sigma_c}$ . Partindo das equações de equilíbrio (2.3) e (2.2), respectivamente:

$$\mathbf{D}_r \bar{\mathbf{N}}_r + \mathbf{b}_r - \tau_b^* = 0, \quad \text{em } V_r \quad (2.32)$$

$$\mathbf{N}_c \sigma_c^* = \bar{\mathbf{t}}_c + \tau_b^*, \quad \text{em } \Gamma_{\sigma_c} \quad (2.33)$$

onde  $\bar{\mathbf{N}}_r$  dá o esforço axial e  $\mathbf{b}_r$  é a força de massa aplicada no domínio do aço,  $\sigma_c^*$  a pseudo-tensão tangencial e  $\bar{\mathbf{t}}_c$  a força distribuída na fronteira do betão e  $\tau_b^*$  representa a tensão transmitida pelo betão ao aço ou pelo aço ao betão (note-se que, para efeitos de equilíbrio da interface, apenas uma das direcções dos operadores do betão está envolvida). Apresenta-se, na Figura 2.5, a convenção de sinais adoptada para o escorregamento.

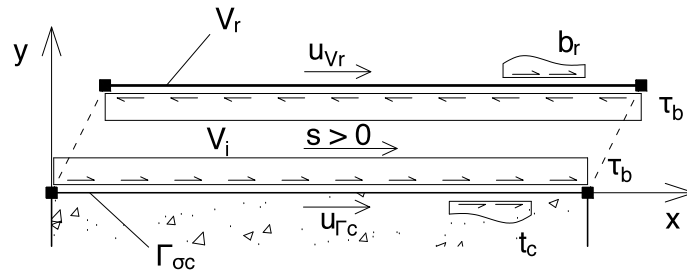


Figura 2.5: Escorregamento na interface aço-betão

As expressões (2.32) e (2.33) têm os termos com unidades  $FL^{-1}$ . Deste modo, para manter a coerência de unidades, são necessárias alterações às variáveis da tensão na fronteira do betão e na interface, recorrendo a duas grandezas geométricas: a espessura do elemento de betão  $e_c$  e o perímetro crítico da armadura, simplificada  $P_c = 2\pi r$  (onde  $r$  define o raio da armadura), ao longo do qual se manifesta o mecanismo de aderência. Assim, partindo de (2.31) e (2.8), tem-se:

$$\tau_b^* = P_c k_s s_b \quad (2.34)$$

$$\sigma_c^* = e_c \sigma_c = e_c K_c \epsilon_c \quad (2.35)$$

podendo reverter para a tensão tangencial de aderência e tensão no betão utilizando as expressões:

$$\tau_b = \frac{\tau_b^*}{P_c} \quad (2.36)$$

$$\sigma_c = \frac{\sigma_c^*}{e_c} \quad (2.37)$$

**Modelo de escorregamento** Várias abordagens foram seguidas para modelar o comportamento da interface aço-betão, podendo consultar-se o estado da arte em [19, 20]. No presente trabalho optou-se por seguir o modelo proposto por Mendes e Castro [6]. Trata-se de um modelo semi-analítico da ligação, implementado à escala da armadura.

Não sendo necessário modelar o comportamento da interface para um carregamento cíclico, adopta-se apenas o modelo base (Figura 2.6), definido através de ramos lineares, salvo no amolecimento, permitindo representar um carregamento monotónico. Confrontando com as fases definidas na Figura 2.4, uma primeira parte de rigidez elevada termina para o escorregamento e tensão  $(s_{pb}, \tau_{pb})$ , seguindo-se uma fase de menor rigidez que culmina no ponto de tensão máxima  $(s_0, \tau_0)$ . A partir deste ponto há uma perda de resistência

Tabela 2.1: Parâmetros do modelo de escorregamento (adaptado de Mendes e Castro [6])

Parâmetro	Unidades	Definição
$s_{pb}$	$L$	Limite do escorregamento para aderência perfeita
$s_0$	$L$	Escorregamento para a tensão de aderência máxima
$s_{res}$	$L$	Escorregamento no início do patamar de resistência residual
$k_{pb}$	$FL^{-3}$	Rigidez tangente para aderência perfeita
$k_0$	$FL^{-3}$	Rigidez secante à tensão de aderência máxima
$f_1$	—	Factor de tensão de aderência residual
$c_s$	—	Parâmetro de controlo da curvatura no troço de amolecimento

na ligação (amolecimento) até à tensão residual resultante do atrito ( $s_{res}, \tau_{res}$ ). Os valores das tensões tangenciais de aderência são definidos pelas relações:

$$\tau_{pb} = k_{pb}s_{pb} \quad (2.38)$$

$$\tau_0 = k_0s_0 \quad (2.39)$$

$$\tau_{res} = f_1s_{res} \quad (2.40)$$

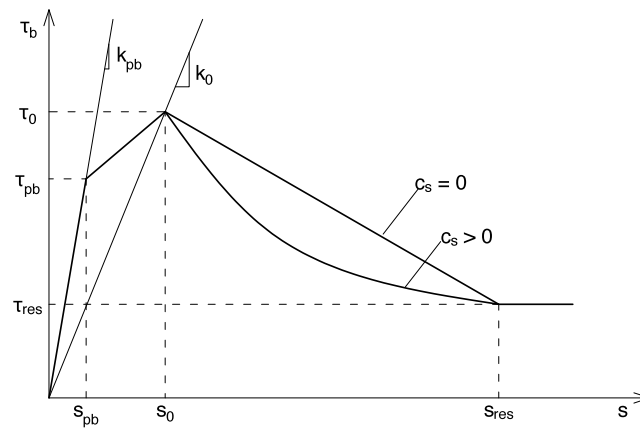


Figura 2.6: Representação esquemática do modelo base (adaptado de Mendes e Castro [6])

A Tabela 2.1 define os parâmetros considerados no modelo apresentado na Figura 2.6. Estes parâmetros são calibrados com base em resultados experimentais que permitam a análise da aderência aço-betão. Dentro destes resultados, os de maior relevância são as curvas de tensão tangencial de aderência vs. escorregamento.

## Capítulo 3

# Modelos de Elementos Finitos

### 3.1 Introdução

A introdução que se segue é baseada no trabalho de Bathe [21]. A mesma obra aborda detalhadamente o método dos elementos finitos, incluindo análise não linear e análise dinâmica.

O método dos elementos finitos é largamente aplicado na resolução de problemas físicos em cálculo e projectos de engenharia, sendo ainda de esperar um aumento significativo do seu uso nos próximos anos. O seu desenvolvimento, para a solução de problemas práticos, ocorreu com o aparecimento do computador e, sendo complicado definir uma data exacta para a sua invenção, a sua origem pode ser apontada a três áreas de investigação distintas: matemática aplicada - Courant (1943); física - Synge (1957); e engenharia - Argyris e Kelsey (1955).

O problema físico a resolver implica uma estrutura, ou componente estrutural, sujeito a um dado carregamento. A partir deste, a análise de elementos finitos consiste na resolução de um modelo matemático que idealize o problema real, com base em hipóteses admitidas que, no seu conjunto, formem um sistema governativo de equações diferenciais. É ainda importante observar que, tratando-se de um método numérico, é necessário avaliar a qualidade da solução e, caso não se verifique o cumprimento dos critérios estabelecidos, há que repetir a resolução, adoptando parâmetros refinados, até ser alcançada precisão suficiente.

De seguida, após uma breve exposição do método dos Elementos Finitos Clássicos (de deslocamento), por ser o de maior utilização, pretende-se apresentar a formulação dos Elementos Híbridos-Mistos de Tensão, foco do presente trabalho, dando atenção às adaptações necessárias para a análise de betão armado, a inclusão do dano e do escorregamento na ligação aço-betão.

#### 3.1.1 Formulações não-convencionais de elementos finitos

Em oposição aos elementos finitos de deslocamento, ditos clássicos, o método dos elementos finitos híbridos-mistos de tensão faz parte das formulações não-convencionais. Estes métodos não-convencionais de elementos finitos iniciaram-se, por um lado, com o desenvolvimento de formulações híbridas por Pian (1967) e, por outro, com a escolha entre elementos de equilíbrio ou de compatibilidade proposta por de Veubeke (1965).

Posteriormente, Freitas et al. [22, 1] deram prosseguimento ao estudo destes métodos, a partir dos quais se desenvolveu o método do presente trabalho. No entanto, e não obstante os benefícios que podem ter, é ainda incomum a utilização destas formulações [1].

As formulações partem de quatro princípios básicos [22, 1]:

- desenvolvimento das formulações a partir dos princípios fundamentais da mecânica - equilíbrio, compatibilidade e relações constitutivas;
- utilização de funções de aproximação hierárquicas e não dependentes de interpolação a partir dos valores nodais;
- definição de variáveis generalizadas do modelo discreto, definidas de forma energeticamente consistente, impondo a igualdade entre o trabalho realizado por grandezas duais no modelo discreto e contínuo;
- utilização dos teoremas da Programação Matemática, que permitem recuperar os teoremas energéticos, e a instituição de condições para a existência e unicidade das soluções.

Três formulações diferentes são propostas por Freitas et al. [1] - híbrida-mista, híbrida e híbrida-Trefftz. Para cada uma delas há ainda dois modelos distintos - de deslocamento e de tensão. A formulação híbrida-mista pressupõe aproximações que apenas cumprem ponderadamente as condições no domínio. Na formulação híbrida, as aproximações no domínio satisfazem localmente o equilíbrio ou a compatibilidade. A formulação híbrida-Trefftz exige a verificação local de todas as condições (equilíbrio, compatibilidade e relações constitutivas) no domínio.

Quanto às condições de fronteira e de continuidade entre elementos, estas são apenas cumpridas de forma ponderada, dando origem a modelos de tensão (imposição da continuidade das tensões) ou de deslocamento (imposição da continuidade cinemática), conforme se adopte uma aproximação dos deslocamentos ou tensões na fronteira, respectivamente.

Algumas vantagens a apontar para estas formulações são [1]:

- a utilização de aproximações independentes e hierárquicas confere uma grande flexibilidade na escolha das funções de aproximação, facilitando a adequação ao problema em análise e o refinamento de tipo-p (refinamento do modelo através do aumento dos graus ou escolha adequada do tipo de funções de aproximação);
- quando comparados com os elementos finitos clássicos, apresentam uma menor sensibilidade à distorção da malha, maior taxa de convergência e menor erro no cálculo de tensões;
- possibilidade de optar por graus de aproximação diferentes para cada campo aproximado;
- a escolha dos campos aproximados permite obter soluções estaticamente admissíveis, ou seja, do lado da segurança para a análise de estruturas.

Por outro lado, algumas desvantagens sobrevêm:

- maior complexidade conceptual e perda do significado físico directo das grandezas consideradas;

- número elevado de graus de liberdade, em especial nos modelos híbridos-mistos, compensado pelo sistema governativo muito esparso, caso se recorra a algoritmos específicos para o armazenamento e manipulação de sistemas de equações esparsos;
- susceptibilidade a dependências no sistema governativo, exigindo cuidado na escolha dos graus das aproximações e na resolução do sistema;
- apesar de ter perdido relevância actualmente, outra desvantagem conota-se com a maior exigência computacional.

## 3.2 Elementos Finitos de Deslocamento

### 3.2.1 Introdução

Procurando-se efectuar apenas uma exposição breve do método, uma explicação mais completa pode ser encontrada em [21, 23].

De forma resumida, o método dos elementos finitos de deslocamentos consiste em:

1. Idealização da estrutura através um sistema de elementos ligados entre si por nós.
2. Cálculo do sistema governativo elementar referente aos graus de liberdade da estrutura idealizada.
3. Cálculo do sistema governativo global da estrutura.
4. Resolução das equações de equilíbrio, obtendo-se os deslocamentos de cada elemento.
5. Cálculo das tensões/esforços, partindo dos deslocamentos.
6. Interpretação dos resultados obtidos como aproximação do comportamento real da estrutura.

### 3.2.2 Aproximação

Neste método, apenas o campo de deslocamentos do elemento é aproximado, adoptando a forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_V \mathbf{q}_V, \quad \text{em } V \quad (3.1)$$

Ou seja, os deslocamentos  $\mathbf{u}$  em cada ponto da estrutura são função dos deslocamentos nodais  $\mathbf{q}_V$ . A matriz  $\mathbf{U}_V$  contém as funções de aproximação, permitindo interpolar, a partir dos nós de cálculo, o valor dos deslocamentos na restante parte do elemento.

### 3.2.3 Sistema governativo

Quanto à condição de elasticidade (2.8), substituindo nesta a condição de compatibilidade (2.5), tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K}(\mathbf{D}^* \mathbf{u}) \quad (3.2)$$

Recorrendo ao princípio dos trabalhos virtuais (relembrando que as cargas aplicadas no domínio e na fronteira são dadas, respectivamente, por  $\mathbf{b}$  e  $\bar{\mathbf{t}}$ ), para um campo de deslocamentos e deformações virtuais:

$$\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \mathbf{U}_V^T \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_V^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_\sigma \quad (3.3)$$

substituindo (2.5) e (3.2) em (3.3), vem:

$$\left( \int_V (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_V)^T \mathbf{K} (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_V) dV \right) \mathbf{q}_V = \int_V \mathbf{U}_V^T \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_V^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_\sigma \quad (3.4)$$

que pode ser escrito sob a forma matricial do sistema governativo do modelo de elementos finitos de deslocamento:

$$\mathbb{K} \mathbf{q}_V = \mathbf{F} \quad (3.5)$$

sendo  $\mathbb{K}$  a matriz de rigidez e  $\mathbf{F}$  o vector das forças nodais equivalentes, definidos por:

$$\mathbb{K} = \int_V (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_V)^T \mathbf{K} (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_V) dV \quad (3.6)$$

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{U}_V^T \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_V^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_\sigma \quad (3.7)$$

É de notar ainda que, caso se assuma um comportamento fisicamente não-linear, a matriz de rigidez passa a depender do campo de deslocamentos. Neste caso há que aplicar um processo de resolução incremental e iterativo [24]. Adiante será apresentado um destes métodos.

### 3.2.4 Observações

Três observações devem ser feitas quanto às funções de aproximação: o grau da aproximação depende do número de nós em cada elemento (sendo o mais comum funções lineares ou quadráticas); o valor da função é unitário no nó a que corresponde e nulo nos restantes; garantem as condições de compatibilidade, obtendo-se um campo de deslocamentos contínuo e cumprindo-se as condições de fronteira cinemática.

Deste modo, é importante realçar que, sendo cumpridas de forma exacta as condições de compatibilidade e da relação tensão-deformação, as condições de equilíbrio são verificadas apenas de modo aproximado/global. Quer isto dizer que as condições de equilíbrio no domínio e na fronteira é imposto de forma fraca, sendo garantida apenas a verificação do equilíbrio de forças nodais. Por outro lado, o erro cometido na definição da aproximação do campo de tensões pode ser elevado, uma vez que a sua obtenção passa pela aplicação sucessiva das condições de compatibilidade (onde é necessário efectuar derivadas do campo de deslocamentos aproximado) e das relações constitutivas. Este erro de aproximação é diminuído com o refinamento da malha, dependendo também do tipo e grau das funções de forma.

## 3.3 Elementos Finitos Híbridos-Mistos de Tensão (HMT)

### 3.3.1 Introdução

Tal como previamente referido, a formulação de elementos finitos híbridos-mistos pode ser consultada em [1]. A classificação de híbrida advém do uso de diferentes campos aproximados independentemente no domínio e na fronteira. É ainda mista pois resulta da aproximação de dois campos distintos no domínio - tensões e

deslocamentos. Como se opta pela aproximação dos deslocamentos na fronteira estática, há uma imposição ponderada das condições de equilíbrio na fronteira, dando origem à designação de modelo de tensão. Neste caso, o equilíbrio é imposto ponderadamente no domínio e na fronteira estática, sendo a condição de compatibilidade integrada por partes. Ou seja, a compatibilidade é imposta de forma mais fraca que o equilíbrio, dando origem a um modelo a partir do qual se pode obter soluções estaticamente admissíveis, em oposição ao modelo de elementos finitos de deslocamento, que resulta em soluções compatíveis.

### 3.3.2 Aproximações

O modelo híbrido-misto de tensão (HMT) implica a aproximação independente de dois campos no domínio do elemento finito  $V$ . Do ponto de vista estático são aproximadas as tensões e, do ponto de vista cinemático, os deslocamentos (poder-se-ia, em alternativa, aproximar as deformações). Tendo como objectivo uma solução estaticamente admissível, é necessário aproximar também os deslocamentos na fronteira estática do elemento  $\Gamma_\sigma$ , o que permitirá impor ponderadamente o equilíbrio dos esforços nessa mesma fronteira.

Deste modo, os campos aproximados são:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\mathbf{X} \quad \text{em } V \quad (3.8)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_V \mathbf{q}_V \quad \text{em } V \quad (3.9)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_\Gamma \mathbf{q}_\Gamma \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (3.10)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  reúne as componentes independentes do tensor das tensões e  $\mathbf{u}$  as entradas independentes do campo de deslocamentos. As matrizes  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{U}_V$  e  $\mathbf{U}_\Gamma$  reúnem as funções de aproximação dos campos de tensões no domínio, deslocamentos no domínio e deslocamentos na fronteira estática, respectivamente, contendo os vectores  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{q}_V$  e  $\mathbf{q}_\Gamma$  os pesos das aproximações.

### 3.3.3 Sistema governativo

O sistema governativo elementar do modelo híbrido-misto de tensão é construído impondo de forma ponderada o equilíbrio, a compatibilidade e a relação constitutiva no domínio do elemento, assim como o equilíbrio na fronteira estática.

#### Equilíbrio

Tendo em conta a condição de equilíbrio no domínio (2.2), da sua imposição ponderada resulta:

$$\int_V \mathbf{U}_V^T (\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) dV = 0 \quad (3.11)$$

Desenvolvendo, para a aproximação das tensões (3.8) vem:

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{U}_V^T (\mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{X} + \mathbf{b}) dV = 0 &\Leftrightarrow \\ \int_V \mathbf{U}_V^T \mathbf{D}\mathbf{S} dV \mathbf{X} = - \int_V \mathbf{U}_V^T \mathbf{b} dV &\quad (3.12) \end{aligned}$$

A equação de equilíbrio (3.12) pode também ser escrita sob o formato:

$$\mathbf{A}_V^T \mathbf{X} = -\mathbf{Q}_V \quad (3.13)$$

onde se considera o operador de compatibilidade no domínio  $\mathbf{A}_V$  e o vector de forças generalizadas no domínio  $\mathbf{Q}_V$ , dados pelas expressões:

$$\mathbf{A}_V = \int_V (\mathbf{DS})^T \mathbf{U}_V dV \quad (3.14)$$

$$\mathbf{Q}_V = \int_V \mathbf{U}_V^T \mathbf{b} dV \quad (3.15)$$

Por sua vez, impondo ponderadamente o equilíbrio na fronteira estática (2.3), tem-se:

$$\int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\Gamma^T (\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{t}}) d\Gamma_\sigma = 0 \quad (3.16)$$

Substituindo a aproximação do campo de tensões (3.8) obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\Gamma^T (\mathbf{NSX} - \bar{\mathbf{t}}) d\Gamma_\sigma &= 0 \Leftrightarrow \\ \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\Gamma^T \mathbf{NS} d\Gamma_\sigma \mathbf{X} &= \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\Gamma^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_\sigma \end{aligned} \quad (3.17)$$

podendo escrever (3.17) na forma:

$$\mathbf{A}_\Gamma^T \mathbf{X} = \mathbf{Q}_\Gamma \quad (3.18)$$

onde o operador de compatibilidade na fronteira  $\mathbf{A}_\Gamma$  e o vector de forças generalizadas na fronteira  $\mathbf{Q}_\Gamma$  são definidos por:

$$\mathbf{A}_\Gamma = \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{NS})^T \mathbf{U}_\Gamma d\Gamma_\sigma \quad (3.19)$$

$$\mathbf{Q}_\Gamma = \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\Gamma^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_\sigma \quad (3.20)$$

### Relação constitutiva

Admitindo um comportamento elástico linear, da imposição ponderada da condição de elasticidade (2.7) resulta:

$$\int_V \mathbf{S}^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{F}\boldsymbol{\sigma}) dV = 0 \quad (3.21)$$

Substituindo a aproximação para o campo de tensões (3.8) vem:

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{S}^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{FSX}) dV &= 0 \Leftrightarrow \\ \int_V \mathbf{S}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV &= \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{FS} dV \mathbf{X} \end{aligned} \quad (3.22)$$

ou, escrevendo (3.22) noutra formato:

$$\mathbf{v} = \mathbb{F} \mathbf{X} \quad (3.23)$$

com a matriz de flexibilidade  $\mathbb{F}$  e o vector de deformações generalizadas  $\mathbf{v}$  dados por:

$$\mathbb{F} = \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{FS} dV \quad (3.24)$$

$$\mathbf{v} = \int_V \mathbf{S}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (3.25)$$



## Compatibilidade

Sendo a compatibilidade no domínio dada por (2.5), impondo-a ponderadamente obtém-se:

$$\int_V \mathbf{S}^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}^* \mathbf{u}) dV = 0 \quad (3.26)$$

Ou, rescrevendo a condição:

$$\int_V \mathbf{S}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{D}^* \mathbf{u} dV \quad (3.27)$$

De modo a cumprir a condição de compatibilidade na fronteira cinemática (2.6), efectua-se uma integração por partes do segundo termo da equação (3.27), recorrendo-se ainda ao teorema da divergência e substituindo-se as aproximações para os campos de deslocamentos no domínio (3.9) e na fronteira (3.10):

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{S}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV &= - \int_V (\mathbf{D}\mathbf{S})^T \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{N}\mathbf{S})^T \mathbf{u} d\Gamma_\sigma + \int_{\Gamma_u} (\mathbf{N}\mathbf{S})^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma_u \Leftrightarrow \\ \int_V \mathbf{S}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV &= - \int_V (\mathbf{D}\mathbf{S})^T \mathbf{U}_V dV \mathbf{q}_V + \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{N}\mathbf{S})^T \mathbf{U}_\Gamma d\Gamma_\sigma \mathbf{q}_\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\mathbf{N}\mathbf{S})^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma_u \end{aligned} \quad (3.28)$$

Escrevendo no formato anteriormente utilizado:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{A}_V \mathbf{q}_V + \mathbf{A}_\Gamma \mathbf{q}_\Gamma + \bar{\mathbf{v}} \quad (3.29)$$

onde o vector das deformações generalizadas na fronteira cinemática  $\bar{\mathbf{v}}$  é dado por:

$$\bar{\mathbf{v}} = \int_{\Gamma_u} (\mathbf{N}\mathbf{S})^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma_u \quad (3.30)$$

Por último, reintroduzindo a relação de elasticidade (3.23) em (3.29), resulta na equação:

$$\mathbb{F}\mathbf{X} + \mathbf{A}_V \mathbf{q}_V - \mathbf{A}_\Gamma \mathbf{q}_\Gamma = \bar{\mathbf{v}} \quad (3.31)$$

## Construção do sistema governativo

Juntando as condições de equilíbrio, compatibilidade e elasticidade definidas para o modelo discreto, é possível obter o sistema governativo elementar do modelo híbrido-misto de tensão (3.13), (3.18) e (3.31) num formato matricial, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{F} & \mathbf{A}_V & -\mathbf{A}_\Gamma \\ \mathbf{A}_V^T & 0 & 0 \\ -\mathbf{A}_\Gamma^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{q}_V \\ \mathbf{q}_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ -\mathbf{Q}_V \\ -\mathbf{Q}_\Gamma \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

O sistema governativo global da estrutura é idêntico ao elementar, efectuando-se a ligação dos elementos adjacentes com a utilização da mesma aproximação do campo de deslocamentos na fronteira inter-elementos. Deste modo, excluindo o operador  $\mathbf{A}_\Gamma$ , todos os restantes são independentes para cada elemento, não se sobrepondo no sistema governativo global. Exemplos detalhados da construção do sistema governativo global podem ser encontrados em [25, 26].

## 3.4 HMT com Elementos de Barra

### 3.4.1 Introdução

Tendo como objectivo a modelação de estruturas de betão armado, é necessária uma generalização do modelo híbrido-misto para que seja possível adicionar as armaduras de reforço. Pelo seu comportamento predominantemente axial, a sua modelação é feita com elementos de barra, ou seja, elementos unidimensionais sujeitos a um esforço axial e cargas aplicadas na direcção do eixo, da parte estática, e a uma deformação e deslocamento axiais, da parte cinemática.

Este tema já foi tratado por Luz [4]. Admitindo a aderência perfeita, fez-se coincidir a aproximação para o campo de deslocamentos no domínio dos varões com a aproximação para o campo de deslocamentos na fronteira dos elementos de betão onde ambos se sobrepõem. Esta formulação é seguidamente apresentada.

A partir deste ponto, dois materiais distintos são considerados, tornando-se necessário diferenciar a qual deles cada operador diz respeito. Deste modo, o índice  $c$  indica operadores relativos ao betão e  $r$  relativos ao aço.

Há ainda a realçar que, sendo os elementos de betão 2D e os elementos de aço 1D, também os domínios e fronteiras de cada um terão dimensões diferentes. Do ponto de vista geométrico, o domínio dos elementos de betão  $V_c$  é no plano e o do aço  $V_r$  na recta. Quanto às fronteiras,  $\Gamma_{\sigma c}$  define-se na recta, enquanto que  $\Gamma_{\sigma r}$  se define no ponto (*idem* para as fronteiras cinemáticas).

### 3.4.2 Aproximações

Quanto aos elementos bidimensionais de betão, as aproximações são as expostas em 3.3.2:

$$\boldsymbol{\sigma}_c = \mathbf{S}_c \mathbf{X}_c \quad \text{em } V_c \quad (3.33)$$

$$\mathbf{u}_c = \mathbf{U}_{V_c} \mathbf{q}_{V_c} \quad \text{em } V_c \quad (3.34)$$

$$\mathbf{u}_c = \mathbf{U}_{\Gamma_c} \mathbf{q}_{\Gamma_c} \quad \text{em } \Gamma_{\sigma c} \quad (3.35)$$

Para os elementos de aço, adoptam-se aproximações para o campo de esforços normais  $\bar{\mathbf{N}}_r$  no domínio  $V_r$  e para os deslocamentos axiais  $\mathbf{u}_r$  no domínio e na fronteira estática  $\Gamma_{\sigma r}$ :

$$\bar{\mathbf{N}}_r = \mathbf{S}_r \mathbf{X}_r \quad \text{em } V_r \quad (3.36)$$

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{U}_{V_r} \mathbf{q}_{V_r} \quad \text{em } V_r \quad (3.37)$$

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{U}_{\Gamma_r} \mathbf{q}_{\Gamma_r} \quad \text{em } \Gamma_{\sigma r} \quad (3.38)$$

As matrizes  $\mathbf{S}_r$ ,  $\mathbf{U}_{V_r}$  e  $\mathbf{U}_{\Gamma_r}$  agrupam as funções de aproximação, respectivamente, dos campos de esforços e deslocamentos no domínio e deslocamentos na fronteira estática, e os vectores  $\mathbf{X}_r$ ,  $\mathbf{q}_{V_r}$  e  $\mathbf{q}_{\Gamma_r}$  reúnem os pesos das aproximações.

No entanto, de modo a impor a ligação entre os materiais, admite-se uma mesma aproximação para o domínio dos varões e fronteira correspondente do betão. Ou seja, a relação (3.37) passa a ser definida por:

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_c = \mathbf{U}_{\Gamma_c} \mathbf{q}_{\Gamma_c} \quad \text{em } V_r \quad (3.39)$$

### 3.4.3 Sistema governativo

#### Betão - Compatibilidade, elasticidade e equilíbrio

Os operadores definidos em 3.3.3 mantêm-se para o betão. Inclusive, a imposição das condições de compatibilidade, elasticidade e equilíbrio no domínio e fronteiras do betão não se alteram. Ou seja, são válidas as equações:

$$\mathbb{F}_c \mathbf{X}_c + \mathbf{A}_{V_c} \mathbf{q}_{V_c} - \mathbf{A}_{\Gamma_c} \mathbf{q}_{\Gamma_c} = \bar{\mathbf{v}}_c \quad (3.40)$$

$$\mathbf{A}_{V_c}^T \mathbf{X}_c = -\mathbf{Q}_{V_c} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{A}_{\Gamma_c}^T \mathbf{X}_c = \mathbf{Q}_{\Gamma_c} \quad (3.42)$$

#### Aço - Compatibilidade e elasticidade no domínio

Impondo ponderadamente a relação constitutiva do aço (2.10) tem-se:

$$\int_{V_r} \mathbf{S}_r^T (\boldsymbol{\varepsilon}_r - \mathbf{F}_r \bar{\mathbf{N}}_r) dV_r = 0 \quad (3.43)$$

Substituindo a aproximação para o campo de tensões (3.36) vem:

$$\int_{V_r} \mathbf{S}_r^T \boldsymbol{\varepsilon}_r dV_r = \int_{V_r} \mathbf{S}_r^T \mathbf{F}_r \mathbf{S}_r dV_r \mathbf{X}_r \quad (3.44)$$

Igualmente:

$$\mathbf{v}_r = \mathbb{F}_r \mathbf{X}_r \quad (3.45)$$

sendo  $\mathbb{F}_r$  a matriz de flexibilidade e  $\mathbf{v}_r$  o vector de deslocamentos generalizados:

$$\mathbb{F}_r = \int_{V_r} \mathbf{S}_r^T \mathbf{F}_r \mathbf{S}_r dV_r \quad (3.46)$$

$$\mathbf{v}_r = \int_{V_r} \mathbf{S}_r^T \boldsymbol{\varepsilon}_r dV_r \quad (3.47)$$

Por sua vez, a imposição, através do método dos resíduos pesados, da compatibilidade no domínio do aço (2.5) é dada por:

$$\int_{V_r} \mathbf{S}_r^T (\boldsymbol{\varepsilon}_r - \mathbf{D}_r^* \mathbf{u}_r) dV_r = 0 \quad (3.48)$$

Tal como exposto anteriormente, integrando por partes o segundo termo da equação e substituindo as aproximações para os campos de deslocamentos no domínio (3.37) e na fronteira (3.38):

$$\begin{aligned} \int_{V_r} \mathbf{S}_r^T \boldsymbol{\varepsilon}_r dV_r = & - \int_{V_r} (\mathbf{D}_r \mathbf{S}_r)^T \mathbf{U}_{\Gamma_c} dV_r \mathbf{q}_{\Gamma_c} \\ & + \int_{\Gamma_{\sigma r}} (\mathbf{N}_r \mathbf{S}_r)^T \mathbf{U}_{\Gamma_r} d\Gamma_{\sigma r} \mathbf{q}_{\Gamma_r} + \int_{\Gamma_{u r}} (\mathbf{N}_r \mathbf{S}_r)^T \bar{\mathbf{u}}_r d\Gamma_{u r} \end{aligned} \quad (3.49)$$

ou:

$$\mathbf{v}_r = -\mathbf{A}_{V_r} \mathbf{q}_{\Gamma_c} + \mathbf{A}_{\Gamma_r} \mathbf{q}_{\Gamma_r} + \bar{\mathbf{v}}_r \quad (3.50)$$

onde os operadores de compatibilidade no domínio  $\mathbf{A}_{V_r}$  e na fronteira  $\mathbf{A}_{\Gamma_r}$ , assim como o vector das deformações generalizadas na fronteira cinemática  $\bar{\mathbf{v}}_r$  são dados por:

$$\mathbf{A}_{V_r} = \int_{V_r} (\mathbf{D}_r \mathbf{S}_r)^T \mathbf{U}_{\Gamma_c} dV_r \quad (3.51)$$

$$\mathbf{A}_{\Gamma_r} = \int_{\Gamma_{\sigma r}} (\mathbf{N}_r \mathbf{S}_r)^T \mathbf{U}_{\Gamma_r} d\Gamma_{\sigma r} \quad (3.52)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_r = \int_{\Gamma_{ur}} (\mathbf{N}_r \mathbf{S}_r)^T \bar{\mathbf{u}}_r d\Gamma_{ur} \quad (3.53)$$

Substituindo a relação de elasticidade (3.45) em (3.50), resulta na equação:

$$\mathbb{F}_r \mathbf{X}_r + \mathbf{A}_{V_r} \mathbf{q}_{\Gamma_c} - \mathbf{A}_{\Gamma_r} \mathbf{q}_{\Gamma_r} = \bar{\mathbf{v}}_r \quad (3.54)$$

### Fronteira aço-betão - Equilíbrio

Quanto ao equilíbrio na interface entre os materiais, ou seja, o equilíbrio no domínio do aço e fronteira do betão que se sobrepõe, é imposto ponderadamente:

$$\int_{V_r} \mathbf{U}_{\Gamma_c}^T (\mathbf{N}_c \boldsymbol{\sigma}_c - \mathbf{D}_r \bar{\mathbf{N}}_r) dV_r = 0 \quad (3.55)$$

Desenvolvendo com as aproximações:

$$\int_{V_r} \mathbf{U}_{\Gamma_c}^T \mathbf{N}_c \mathbf{S}_c dV_r \mathbf{X}_c - \int_{V_r} \mathbf{U}_{\Gamma_c}^T \mathbf{D}_r \mathbf{S}_r dV_r \mathbf{X}_r = 0 \quad (3.56)$$

ou seja:

$$\mathbf{A}_{\Gamma_c}^T \mathbf{X}_c - \mathbf{A}_{V_r}^T \mathbf{X}_r = 0 \quad (3.57)$$

### Aço - equilíbrio na fronteira

Quanto ao equilíbrio na fronteira dos elementos de barra (fazendo notar que são apenas dois pontos por elemento), este é dado por:

$$\int_{\Gamma_{\sigma r}} \mathbf{U}_{\Gamma_r}^T (\mathbf{N}_r \bar{\mathbf{N}}_r - \bar{\mathbf{t}}_r) d\Gamma_{\sigma r} = 0 \quad (3.58)$$

Substituindo os campos aproximados (note-se que, neste caso o integral perde relevância pois a fronteira corresponde apenas a dois pontos):

$$\int_{\Gamma_{\sigma r}} \mathbf{U}_{\Gamma_r}^T \mathbf{N}_r \mathbf{S}_r d\Gamma_{\sigma r} \mathbf{X}_r = \int_{\Gamma_{\sigma r}} \mathbf{U}_{\Gamma_r}^T \bar{\mathbf{t}}_r d\Gamma_{\sigma r} \quad (3.59)$$

ou:

$$\mathbf{A}_{\Gamma_r}^T \mathbf{X}_r = \mathbf{Q}_{\Gamma_r} \quad (3.60)$$

com:

$$\mathbf{Q}_{\Gamma_r} = \int_{\Gamma_{\sigma r}} \mathbf{U}_{\Gamma_r}^T \bar{\mathbf{t}}_r d\Gamma_{\sigma r} \quad (3.61)$$

## Construção do sistema governativo

Da mesma forma que foi feito anteriormente, juntando as equações (3.40), (3.41), (3.42), (3.54), (3.57) e (3.60), o sistema governativo global com elementos de betão e de aço é dado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{F}_c & 0 & \mathbf{A}_{Vc} & -\mathbf{A}_{\Gamma c} & 0 \\ 0 & \mathbb{F}_r & 0 & \mathbf{A}_{Vr} & -\mathbf{A}_{\Gamma r} \\ \mathbf{A}_{Vc}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{A}_{\Gamma c}^T & \mathbf{A}_{Vr}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma r}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_c \\ \mathbf{X}_r \\ \mathbf{q}_{Vc} \\ \mathbf{q}_{\Gamma c} \\ \mathbf{q}_{\Gamma r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}_c \\ \bar{\mathbf{v}}_r \\ -\mathbf{Q}_{Vc} \\ -\mathbf{Q}_{\Gamma c} \\ -\mathbf{Q}_{\Gamma r} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

## 3.5 HMT com Aproximação Independente para Elementos de Barra

### 3.5.1 Introdução

Tal como foi mencionado, a formulação anteriormente apresentada assume aderência perfeita. No entanto, tendo como objectivo último do presente trabalho a inclusão do escorregamento, a abordagem aí tomada não é a de melhor adaptação.

Deste modo, uma adaptação do modelo para que permita a consideração do escorregamento passa pela modelação de forma totalmente independente de todos os campos de aproximações do betão e do aço, efectuando-se a ligação através da imposição de condições de compatibilidade na interface entre ambos os elementos. Ou seja, propõe-se a adição de novos operadores ao sistema governativo global, com o objectivo de estabelecer a ligação aço-betão, que posteriormente permitirão a modelação de diferentes condições de aderência. É ainda de referir que continua a admitir-se a localização dos varões de aço sobre fronteiras dos elementos de betão.

### 3.5.2 Aproximações

Todas as aproximações para o betão e para o aço apresentadas em (3.33) a (3.38) são válidas. Há apenas que acrescentar uma nova aproximação para a tensão tangencial de aderência na interface entre os materiais:

$$\tau_b^* = \mathbf{F}_b \lambda_b \quad \text{em } V_i \quad (3.63)$$

sendo  $\mathbf{F}_b$  a matriz com as funções de aproximação e  $\lambda_b$  os respectivos pesos, definidos para o domínio da interface  $V_i$ .

Relembra-se que, tal como explicado na secção 2.5.3, quando se considera a interface aço-betão, o campo aproximado no domínio do betão são as pseudo-tensões  $\sigma_c^*$ . Deste modo, a tensão  $\sigma_c$ , para um elemento de betão de espessura  $e_c$ , é obtida com a expressão:

$$\sigma_c = \frac{\sigma_c^*}{e_c} \quad (3.64)$$

### 3.5.3 Sistema governativo

#### Equilíbrio, elasticidade e compatibilidade

Ao aproximar de forma totalmente independente os campos de tensões e deslocamentos de ambos os materiais, a imposição das condições de equilíbrio, elasticidade e compatibilidade no domínio e fronteira dá origem às expressões já obtidas em 3.3.3 aplicadas a cada material (mantendo-se a igualmente a definição dos operadores, exceptuando-se o operador  $\mathbf{A}_{V_r}$ , agora com aproximação independente do campo de deslocamentos no domínio do aço):

$$\mathbb{F}_c \mathbf{X}_c + \mathbf{A}_{V_c} \mathbf{q}_{V_c} - \mathbf{A}_{\Gamma_c} \mathbf{q}_{\Gamma_c} = \bar{\mathbf{v}}_c \quad (3.65)$$

$$\mathbf{A}_{V_c}^T \mathbf{X}_c = -\mathbf{Q}_{V_c} \quad (3.66)$$

$$\mathbf{A}_{\Gamma_c}^T \mathbf{X}_c = \mathbf{Q}_{\Gamma_c} \quad (3.67)$$

$$\mathbb{F}_r \mathbf{X}_r + \mathbf{A}_{V_r} \mathbf{q}_{V_r} - \mathbf{A}_{\Gamma_r} \mathbf{q}_{\Gamma_r} = \bar{\mathbf{v}}_r \quad (3.68)$$

$$\mathbf{A}_{\Gamma_r}^T \mathbf{X}_r = \mathbf{Q}_{\Gamma_r} \quad (3.69)$$

A excepção ocorre apenas para o domínio do aço e as correspondentes fronteiras do betão. Nestes casos, há que acrescentar ao equilíbrio a tensão tangencial de aderência.

#### Compatibilização aço-betão

Mantendo-se a hipótese de aderência perfeita, é necessário impor um deslocamento relativo nulo entre o aço e o betão (note-se que, para o betão, apenas se tem em conta a componente do deslocamento na direcção da armadura), recordando (2.30):

$$\mathbf{u}_c - \mathbf{u}_r = 0 \quad (3.70)$$

Impondo ponderadamente a condição (3.70) e substituindo na equação resultante as aproximações para os campos de deslocamentos no domínio do varão e na fronteira do elemento de betão obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{V_r} \mathbf{F}_b^T (\mathbf{U}_{\Gamma_c} \mathbf{q}_{\Gamma_c} - \mathbf{U}_{V_r} \mathbf{q}_{V_r}) dV_r = 0 &\Leftrightarrow \\ \int_{V_r} \mathbf{F}_b^T \mathbf{U}_{\Gamma_c} dV_r \mathbf{q}_{\Gamma_c} - \int_{V_r} \mathbf{F}_b^T \mathbf{U}_{V_r} dV_r \mathbf{q}_{V_r} = 0 &\quad (3.71) \end{aligned}$$

Podendo reescrever-se na forma:

$$\mathbf{C}_{bc} \mathbf{q}_{\Gamma_c} - \mathbf{C}_{br} \mathbf{q}_{V_r} = 0 \quad (3.72)$$

onde:

$$\mathbf{C}_{bc} = \int_{V_r} \mathbf{F}_b^T \mathbf{U}_{\Gamma_c} dV_r \quad (3.73)$$

$$\mathbf{C}_{br} = \int_{V_r} \mathbf{F}_b^T \mathbf{U}_{V_r} dV_r \quad (3.74)$$

#### Equilíbrio na fronteira do betão

Para as fronteiras de betão coincidentes com os varões, admitindo que podem ser actuadas por tensões “exteriores” e tensões tangenciais de aderência, a imposição do equilíbrio (2.33) traduz-se em:

$$\mathbf{N}_c \boldsymbol{\sigma}_c^* = \bar{\mathbf{t}}_c + \boldsymbol{\tau}_b^* \quad (3.75)$$

Impondo ponderadamente a condição de equilíbrio (3.75) obtém-se:

$$\int_{\Gamma_{\sigma c}} \mathbf{U}_{\Gamma c}^T (\mathbf{N}_c \boldsymbol{\sigma}_c^* - \bar{\mathbf{t}}_c - \boldsymbol{\tau}_b^*) d\Gamma_{\sigma c} = 0 \quad (3.76)$$

Substituindo as aproximações para os campos de tensões no domínio do betão e para a tensão de aderência vem:

$$\int_{\Gamma_{\sigma c}} \mathbf{U}_{\Gamma c}^T \mathbf{N}_c \mathbf{S}_c d\Gamma_{\sigma c} \mathbf{X}_c - \int_{\Gamma_{\sigma c}} \mathbf{U}_{\Gamma c}^T \bar{\mathbf{t}}_c d\Gamma_{\sigma c} - \int_{\Gamma_{\sigma c}} \mathbf{U}_{\Gamma c}^T \mathbf{F}_b d\Gamma_{\sigma c} \boldsymbol{\lambda}_b = 0 \quad (3.77)$$

Simplificando, pode obter-se:

$$-\mathbf{A}_{\Gamma c}^T \mathbf{X}_c + \mathbf{C}_{bc}^T \boldsymbol{\lambda}_b = -\mathbf{Q}_{\Gamma c} \quad (3.78)$$

### Equilíbrio no domínio do aço

Quanto ao equilíbrio no domínio do aço, admitindo forças de massa e a tensão tangencial de aderência e relembrando (2.32), tem-se:

$$\mathbf{D}_r \bar{\mathbf{N}}_r + \mathbf{b}_r = \boldsymbol{\tau}_b^* \quad (3.79)$$

Impondo pelo método dos resíduos pesados:

$$\int_{V_r} \mathbf{U}_{V_r}^T (\mathbf{D}_r \bar{\mathbf{N}}_r + \mathbf{b}_r - \boldsymbol{\tau}_b^*) dV_r = 0 \quad (3.80)$$

Desenvolvendo para as aproximações:

$$\int_{V_r} \mathbf{U}_{V_r}^T \mathbf{D}_r \mathbf{S}_r dV_r \mathbf{X}_r - \int_{V_r} \mathbf{U}_{V_r}^T \mathbf{F}_b dV_r \boldsymbol{\lambda}_b = - \int_{V_r} \mathbf{U}_{V_r}^T \mathbf{b}_r dV_r \quad (3.81)$$

ou seja:

$$\mathbf{A}_{V_r}^T \mathbf{X}_r - \mathbf{C}_{br}^T \boldsymbol{\lambda}_b = -\mathbf{Q}_{V_r} \quad (3.82)$$

Com  $\mathbf{A}_{V_r}$  e  $\mathbf{Q}_{V_r}$  definidos por (3.14) e (3.15), respectivamente.

### Sistema governativo global

Juntando as equações indicadas em (3.65) a (3.69), (3.72), (3.78) e (3.82) obtém-se o sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{F}_c & 0 & \mathbf{A}_{V_c} & 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma c} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{F}_r & 0 & \mathbf{A}_{V_r} & 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma r} & 0 \\ \mathbf{A}_{V_c}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{V_r}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_{br}^T \\ -\mathbf{A}_{\Gamma c}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{bc}^T \\ 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma r}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_{br} & \mathbf{C}_{bc} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_c \\ \mathbf{X}_r \\ \mathbf{q}_{V_c} \\ \mathbf{q}_{V_r} \\ \mathbf{q}_{\Gamma c} \\ \mathbf{q}_{\Gamma r} \\ \boldsymbol{\lambda}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}_c \\ \bar{\mathbf{v}}_r \\ -\mathbf{Q}_{V_c} \\ -\mathbf{Q}_{V_r} \\ -\mathbf{Q}_{\Gamma c} \\ -\mathbf{Q}_{\Gamma r} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

## 3.6 HMT com Escorregamento

### 3.6.1 Introdução

Procura-se agora incluir a hipótese de escorregamento na interface aço-betão. Deste modo, ao sistema definido na secção anterior é acrescentada uma nova aproximação representativa do escorregamento, que pretende

modelar a respectiva relação constitutiva. Assim, todo o sistema se mantém inalterado, com a exceção da compatibilidade dos deslocamentos relativos na interface.

### 3.6.2 Aproximações

Às aproximações (3.33) a (3.38) e (3.63) acrescenta-se uma aproximação para o escorregamento na interface aço-betão:

$$s = \mathbf{S}_b \mathbf{s}_b \quad \text{em } V_i \quad (3.84)$$

onde  $\mathbf{S}_b$  engloba as funções de aproximação do escorregamento e  $\mathbf{s}_b$  os respectivos pesos.

### 3.6.3 Sistema governativo

#### Compatibilização aço-betão

O escorregamento é definido pelo deslocamento relativo entre ambos os materiais (2.30), ou seja:

$$s = \mathbf{u}_r - \mathbf{u}_c \quad (3.85)$$

Esta relação, imposta ponderadamente, resulta em:

$$\int_{V_r} \mathbf{F}_b^T (s - \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_c) dV_r = 0 \quad (3.86)$$

Substituindo as aproximações (3.84), (3.37) e (3.35) tem-se:

$$\int_{V_r} \mathbf{F}_b^T \mathbf{S}_b dV_r \mathbf{s}_b - \int_{V_r} \mathbf{F}_b^T \mathbf{U}_{V_r} dV_r \mathbf{q}_{V_r} + \int_{V_r} \mathbf{F}_b^T \mathbf{U}_{\Gamma_c} dV_r \mathbf{q}_{\Gamma_c} = 0 \quad (3.87)$$

De forma simplificada:

$$\mathbf{C}_{bs} \mathbf{s}_b - \mathbf{C}_{br} \mathbf{q}_{V_r} + \mathbf{C}_{bc} \mathbf{q}_{\Gamma_c} = 0 \quad (3.88)$$

com  $\mathbf{C}_{bc}$  e  $\mathbf{C}_{br}$  definidos por (3.73) e (3.74), respectivamente, e  $\mathbf{C}_{bs}$  por:

$$\mathbf{C}_{bs} = \int_{V_r} \mathbf{F}_b^T \mathbf{S}_b dV_r \quad (3.89)$$

#### Relação constitutiva na interface

Considerando o escorregamento com variação elástica (2.34), vem a expressão:

$$\tau_b^* = P_c k_s s \quad (3.90)$$

Impondo-a ponderadamente:

$$\int_{V_r} \mathbf{S}_b^T (\tau_b^* - P_c k_s s) dV_r = 0 \quad (3.91)$$

Introduzindo as aproximações (3.63) e (3.84) resulta em:

$$\int_{V_r} \mathbf{S}_b^T \mathbf{F}_b dV_r \boldsymbol{\lambda}_b - \int_{V_r} \mathbf{S}_b^T P_c k_s \mathbf{S}_b dV_r \mathbf{s}_b = 0 \quad (3.92)$$

Em alternativa:

$$\mathbf{C}_{bs}^T \boldsymbol{\lambda}_b - \mathbf{K}_s \mathbf{s}_b = 0 \quad (3.93)$$

onde:

$$\mathbf{K}_s = \int_{V_r} \mathbf{S}_b^T P_c k_s \mathbf{S}_b dV_r \quad (3.94)$$



## Sistema governativo global

Acrescentando (3.88) e (3.93) ao sistema (3.83) obtém-se o sistema governativo global admitindo escorregamento elástico:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{F}_c & 0 & \mathbf{A}_{Vc} & 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{F}_r & 0 & \mathbf{A}_{Vr} & 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma r} & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{Vc}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{Vr}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_{br}^T & 0 \\ -\mathbf{A}_{\Gamma c}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{bc}^T & 0 \\ 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma r}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_{br} & \mathbf{C}_{bc} & 0 & 0 & \mathbf{C}_{bs} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{bs}^T & -\mathbf{K}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_c \\ \mathbf{X}_r \\ \mathbf{q}_{Vc} \\ \mathbf{q}_{Vr} \\ \mathbf{q}_{\Gamma c} \\ \mathbf{q}_{\Gamma r} \\ \lambda_b \\ \mathbf{s}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}_c \\ \bar{\mathbf{v}}_r \\ -\mathbf{Q}_{Vc} \\ -\mathbf{Q}_{Vr} \\ -\mathbf{Q}_{\Gamma c} \\ -\mathbf{Q}_{\Gamma r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

### 3.6.4 Escorregamento em regime não-linear

No capítulo anterior foi apresentado um modelo não-linear de escorregamento. Para resolver o sistema governativo que resulta da consideração de um comportamento fisicamente não-linear para a ligação aço-betão é utilizado um processo incremental e iterativo. Para cada incremento, recorre-se a um processo iterativo que permita reduzir o erro até um nível aceitável. Ou seja, adopta-se um método incremental e iterativo que converge para a solução do problema [24].

Quanto à componente incremental da análise, dois tipos são possíveis - incrementos de carga e incrementos de deslocamento. O primeiro consiste no incremento do carregamento exterior e o segundo, no incremento dos deslocamentos impostos. O incremento dos deslocamentos tem o benefício de não ser afectado por perdas de rigidez. Observando o diagrama tensão-escorregamento da Figura 2.4, facilmente se percebe que, controlando pela carga, o processo incremental deixa de convergir quando se ultrapassa o valor de pico. Por outro lado, controlando pelo deslocamento, perde-se esta limitação.

Da parte iterativa, o objectivo passa pela redução, até a uma tolerância pré-definida, do erro obtido para um dado valor da resposta estrutural nas relações fundamentais. Um dos processos mais comumente utilizados é o de Newton-Raphson [24], que lineariza a resposta estrutural, recorrendo a módulos tangentes das relações não-lineares, para cada passo incremental.

Impõe-se então que se efectuem as necessárias alterações ao sistema governativo. Admitindo comportamento não-linear apenas para o escorregamento, o único operador matricial que sofre alterações é  $\mathbf{K}_s$ , adoptando-se um novo operador  $\mathbf{K}_s^*$  que depende do escorregamento  $s$  na interface. Assim, tem-se:

$$\tau_b^* = f(s) \quad (3.96)$$

e o incremento da tensão tangencial de aderência é dado por:

$$\partial \tau_b^* = k_s^* \partial s \quad (3.97)$$

onde  $k_s^*$  é a rigidez tangente da interface. Deste modo, o operador de rigidez na interface é dado por:

$$\mathbf{K}_s^* = \int_{V_r} \mathbf{S}_b^T P_c k_s^* \mathbf{S}_b dV_r \quad (3.98)$$

O erro no fim de cada passo de carga pode escrever-se:

$$\begin{bmatrix} R_{X_c} \\ R_{X_r} \\ R_{q_{V_c}} \\ R_{q_{V_r}} \\ R_{q_{\Gamma_c}} \\ R_{q_{\Gamma_r}} \\ R_{\lambda_b} \\ R_{s_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\mathbf{t}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{F}_c & 0 & \mathbf{A}_{V_c} & 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{F}_r & 0 & \mathbf{A}_{V_r} & 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma_r} & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{V_c}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{V_r}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_{br}^T & 0 \\ -\mathbf{A}_{\Gamma_c}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{bc}^T & 0 \\ 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma_r}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_{br} & \mathbf{C}_{bc} & 0 & 0 & \mathbf{C}_{bs} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{bs}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_c \\ \mathbf{X}_r \\ \mathbf{q}_{V_c} \\ \mathbf{q}_{V_r} \\ \mathbf{q}_{\Gamma_c} \\ \mathbf{q}_{\Gamma_r} \\ \lambda_b \\ \mathbf{s}_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}_c \\ \bar{\mathbf{v}}_r \\ -\mathbf{Q}_{V_c} \\ -\mathbf{Q}_{V_r} \\ -\mathbf{Q}_{\Gamma_c} \\ -\mathbf{Q}_{\Gamma_r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

Assim, seguindo o método de Newton-Raphson, é necessário calcular as derivadas parciais das expressões dos resíduos, sendo o único não trivial o cálculo do operador de rigidez na interface, dado por:

$$\frac{\partial R_{s_b}}{\partial \mathbf{s}_b} = -\frac{\partial \mathbf{t}_b}{\partial \mathbf{s}_b} = -\mathbf{K}_s^* \quad (3.100)$$

A partir do erro calculado, caso não seja menor que uma tolerância definida *a priori*, o incremento ao vector das variáveis independentes é determinado com o sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{F}_c & 0 & \mathbf{A}_{V_c} & 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{F}_r & 0 & \mathbf{A}_{V_r} & 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma_r} & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{V_c}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{V_r}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_{br}^T & 0 \\ -\mathbf{A}_{\Gamma_c}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{bc}^T & 0 \\ 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma_r}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_{br} & \mathbf{C}_{bc} & 0 & 0 & \mathbf{C}_{bs} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{bs}^T & -\mathbf{K}_s^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X}_c \\ \Delta \mathbf{X}_r \\ \Delta \mathbf{q}_{V_c} \\ \Delta \mathbf{q}_{V_r} \\ \Delta \mathbf{q}_{\Gamma_c} \\ \Delta \mathbf{q}_{\Gamma_r} \\ \Delta \lambda_b \\ \Delta \mathbf{s}_b \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{X_c} \\ R_{X_r} \\ R_{q_{V_c}} \\ R_{q_{V_r}} \\ R_{q_{\Gamma_c}} \\ R_{q_{\Gamma_r}} \\ R_{\lambda_b} \\ R_{s_b} \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

## 3.7 Elementos Finitos Híbridos Duplamente Mistos de Tensão (HDMT)

### 3.7.1 Introdução

Procurando-se analisar o comportamento do betão armado, é de salientar a importância de considerar o comportamento fisicamente não-linear do betão. Como foi previamente exposto, um dos métodos para o fazer passa pela utilização de um modelo de dano. Tendo sido feitas várias investigações sobre a melhor forma de implementar os modelos de dano contínuo, chegou-se a algumas conclusões:

- a consideração de uma matriz de flexibilidade constante (elástica), com a introdução de um vector de deformações correctivo [27], não permite a utilização de todas as potencialidades do modelo, já que o campo de tensões não é suficiente para definir univocamente a evolução do dano no material; [2]
- a utilização de modelos híbridos de deslocamento [28], com a desvantagem da imposição do equilíbrio local de forma fraca, implica a perda de um dos benefícios da utilização das formulações não convencionais de elementos finitos; [3]
- a substituição da aproximação do campo de tensões no domínio pela aproximação do campo de tensões efectivas [2, 28] dá origem a um sistema governativo assimétrico, exigindo um esforço computacional

significativamente maior. Ademais, a condição de equilíbrio no domínio é imposta com integração por partes, enfraquecendo a sua imposição; [3]

Deste modo, adopta-se a formulação apresentada em Arruda e Castro [3], que consiste no acrescento de uma aproximação independente para o campo de deformações. Primeiramente, é explicado o método admitindo apenas um tipo de elementos. De seguida, apresenta-se a extensão para a inclusão de elementos de aço e para a consideração do escorregamento. Sendo estas extensões triviais do ponto de vista teórico (devido à independência do dano em relação à armadura), o mesmo não ocorre para a sua aplicação em cálculos computacionais quando se admite em simultâneo comportamento não-linear para o betão e para a interface aço-betão.

### 3.7.2 Aproximações

Às aproximações dadas por (3.8), (3.9) e (3.10) acrescenta-se uma aproximação independente para o campo de deformações no domínio:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E}_V \mathbf{e} \quad \text{em } V \quad (3.102)$$

onde, à semelhança dos casos anteriores,  $\mathbf{E}_V$  reúne as funções de aproximação e  $\mathbf{e}$  os respectivos pesos.

### 3.7.3 Sistema governativo

Em relação à construção do sistema governativo, refere-se que a imposição do equilíbrio no domínio e na fronteira estática dos elementos se mantém inalterada em relação ao apresentado em 3.3. As restantes condições sofrem alterações.

#### Compatibilidade

Relembrando a imposição da compatibilidade no domínio, recorrendo à integração por partes, tem-se a equação (3.28), na qual se pode substituir a aproximação para o campo de deformações:

$$\int_V \mathbf{S}^T \mathbf{E}_V dV \mathbf{e} = - \int_V (\mathbf{D}\mathbf{S})^T \mathbf{U}_V dV \mathbf{q}_V + \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{N}\mathbf{S})^T \mathbf{U}_\Gamma d\Gamma_\sigma \mathbf{q}_\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\mathbf{N}\mathbf{S})^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma_u \quad (3.103)$$

Por sua vez, simplificando obtém-se:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{e} = -\mathbf{A}_V \mathbf{q}_V + \mathbf{A}_\Gamma \mathbf{q}_\Gamma + \bar{\mathbf{v}} \quad (3.104)$$

onde  $\mathbf{A}_V$ ,  $\mathbf{A}_\Gamma$  e  $\bar{\mathbf{v}}$  são definidos por (3.14), (3.19) e (3.30), respectivamente, e:

$$\mathbf{B}^T = \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{E}_V dV \quad (3.105)$$

## Relação constitutiva

Na forma de resíduos pesados, a imposição da condição (2.8) resulta na expressão:

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{E}_V^T (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}) dV &= 0 \Leftrightarrow \\ \int_V \mathbf{E}_V^T \mathbf{S} dV \mathbf{X} - \int_V \mathbf{E}_V^T \mathbf{K} \mathbf{E}_V dV \mathbf{e} &= 0 \end{aligned} \quad (3.106)$$

Ou, de forma equivalente:

$$\mathbf{B}\mathbf{X} - \mathbb{K}\mathbf{e} = 0 \quad (3.107)$$

com:

$$\mathbb{K} = \int_V \mathbf{E}_V^T \mathbf{K} \mathbf{E}_V dV \quad (3.108)$$

## Construção do sistema governativo

Combinando então o equilíbrio no domínio (3.13) e fronteira (3.18), a compatibilidade (3.104) e a relação constitutiva (3.107), tem-se:

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{K} & \mathbf{B} & 0 & 0 \\ \mathbf{B}^T & 0 & \mathbf{A}_V & -\mathbf{A}_\Gamma \\ 0 & \mathbf{A}_V^T & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{A}_\Gamma^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{X} \\ \mathbf{q}_V \\ \mathbf{q}_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{v}} \\ -\mathbf{Q}_V \\ -\mathbf{Q}_\Gamma \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

A montagem do sistema governativo global segue o método previamente mencionado.

### 3.7.4 HDMT com elementos de barra

Remete-se para Luz [4] uma descrição mais detalhada da formulação de elementos finitos híbridos duplamente mistos de tensão com a inclusão de elementos de barra. Partindo das aproximações dadas em 3.4.2 e acrescentando a aproximação para o campo de deformações dos elementos de betão, a adaptação do sistema governativo (3.62) e respectivas definições para os operadores resulta no sistema:

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{K}_c & \mathbf{B}_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_c^T & 0 & 0 & \mathbf{A}_{Vc} & -\mathbf{A}_{\Gamma c} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{F}_r & 0 & \mathbf{A}_{Vr} & -\mathbf{A}_{\Gamma r} \\ 0 & \mathbf{A}_{Vc}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma c}^T & \mathbf{A}_{Vr}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma r}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_c \\ \mathbf{X}_c \\ \mathbf{X}_r \\ \mathbf{q}_{Vc} \\ \mathbf{q}_{\Gamma c} \\ \mathbf{q}_{\Gamma r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{v}}_c \\ \bar{\mathbf{v}}_r \\ -\mathbf{Q}_{Vc} \\ -\mathbf{Q}_{\Gamma c} \\ -\mathbf{Q}_{\Gamma r} \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

### 3.7.5 HDMT com aproximação independente dos elementos de barra

Tendo em conta a formulação estabelecida em 3.5, uma extensão do modelo para elementos de betão híbridos duplamente mistos é de simples execução devido à independência entre o operador de flexibilidade do betão e os

restantes operadores do sistema governativo. Ou seja, altera-se sistema (3.83), acrescentando a aproximação (3.102) para o betão. O sistema governativo final resulta em:

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{K}_c & \mathbf{B}_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_c^T & 0 & 0 & \mathbf{A}_{Vc} & 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{F}_r & 0 & \mathbf{A}_{Vr} & 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma r} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{Vc}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{Vr}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_{br}^T \\ 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma c}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{bc}^T \\ 0 & 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma r}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_{br} & \mathbf{C}_{bc} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_c \\ \mathbf{X}_c \\ \mathbf{X}_r \\ \mathbf{q}_{Vc} \\ \mathbf{q}_{Vr} \\ \mathbf{q}_{\Gamma c} \\ \mathbf{q}_{\Gamma r} \\ \boldsymbol{\lambda}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{v}}_c \\ \bar{\mathbf{v}}_r \\ -\mathbf{Q}_{Vc} \\ -\mathbf{Q}_{Vr} \\ -\mathbf{Q}_{\Gamma c} \\ -\mathbf{Q}_{\Gamma r} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

### 3.7.6 HDMT com escorregamento

Seguindo o mesmo raciocínio das secções anteriores, a inclusão da hipótese de escorregamento passa pela adaptação do sistema governativo (3.95), obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{K}_c & \mathbf{B}_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_c^T & 0 & 0 & \mathbf{A}_{Vc} & 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{F}_r & 0 & \mathbf{A}_{Vr} & 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma r} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{Vc}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{Vr}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_{br}^T & 0 \\ 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma c}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{bc}^T & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma r}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_{br} & \mathbf{C}_{bc} & 0 & 0 & \mathbf{C}_{bs} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{bs}^T & -\mathbf{K}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_c \\ \mathbf{X}_c \\ \mathbf{X}_r \\ \mathbf{q}_{Vc} \\ \mathbf{q}_{Vr} \\ \mathbf{q}_{\Gamma c} \\ \mathbf{q}_{\Gamma r} \\ \boldsymbol{\lambda}_b \\ \mathbf{s}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{v}}_c \\ \bar{\mathbf{v}}_r \\ -\mathbf{Q}_{Vc} \\ -\mathbf{Q}_{Vr} \\ -\mathbf{Q}_{\Gamma c} \\ -\mathbf{Q}_{\Gamma r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

### 3.7.7 Dano em regime não-linear

À semelhança do que foi apresentado para a consideração do escorregamento em regime não-linear, a admissão do modelo de dano para o betão exige a aplicação de um método incremental e iterativo para a resolução do problema.

Admitindo a não-linearidade apenas do betão, a aplicação do método de Newton-Raphson implica a consideração duma relação constitutiva do tipo:

$$\boldsymbol{\sigma}_c = f(\boldsymbol{\varepsilon}_c) \quad (3.113)$$

e o incremento da tensão do betão é dado por:

$$\partial \boldsymbol{\sigma}_c = \tilde{k} \partial \boldsymbol{\varepsilon}_c \quad (3.114)$$

onde  $\tilde{k}$  é a rigidez tangente do betão. Assim, o novo operador de rigidez do betão é dado por:

$$\tilde{\mathbb{K}}_c = \int_{V_c} \mathbf{E}_{Vc}^T \tilde{k} \mathbf{E}_{Vc} dV_c \quad (3.115)$$

O erro no fim de cada passo de carga pode escrever-se:

$$\begin{bmatrix} R_{e_c} \\ R_{X_c} \\ R_{X_r} \\ R_{q_{V_c}} \\ R_{q_{V_r}} \\ R_{q_{\Gamma_c}} \\ R_{q_{\Gamma_r}} \\ R_{\lambda_b} \\ R_{s_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{B}_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_c^T & 0 & 0 & \mathbf{A}_{V_c} & 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma_c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{F}_r & 0 & \mathbf{A}_{V_r} & 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{V_c}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{V_r}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_{br}^T & 0 \\ 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma_c}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{bc}^T & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma_r}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_{br} & \mathbf{C}_{bc} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{bs} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{bs}^T & -\mathbf{K}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_c \\ \mathbf{X}_c \\ \mathbf{X}_r \\ \mathbf{q}_{V_c} \\ \mathbf{q}_{V_r} \\ \mathbf{q}_{\Gamma_c} \\ \mathbf{q}_{\Gamma_r} \\ \lambda_b \\ \mathbf{s}_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{v}}_c \\ \bar{\mathbf{v}}_r \\ -\mathbf{Q}_{V_c} \\ -\mathbf{Q}_{V_r} \\ -\mathbf{Q}_{\Gamma_c} \\ -\mathbf{Q}_{\Gamma_r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

Para erros de valor superior à tolerância definida, o incremento ao vector das variáveis independentes é determinado com o sistema:

$$\begin{bmatrix} -\widetilde{\mathbf{K}}_c & \mathbf{B}_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_c^T & 0 & 0 & \mathbf{A}_{V_c} & 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma_c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{F}_r & 0 & \mathbf{A}_{V_r} & 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{V_c}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{V_r}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_{br}^T & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma_c}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{bc}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{A}_{\Gamma_r}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_{br} & \mathbf{C}_{bc} & 0 & 0 & \mathbf{C}_{bs} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{bs}^T & -\mathbf{K}_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{e}_c \\ \Delta \mathbf{X}_c \\ \Delta \mathbf{X}_r \\ \Delta \mathbf{q}_{V_c} \\ \Delta \mathbf{q}_{V_r} \\ \Delta \mathbf{q}_{\Gamma_c} \\ \Delta \mathbf{q}_{\Gamma_r} \\ \Delta \lambda_b \\ \Delta \mathbf{s}_b \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{e_c} \\ R_{X_c} \\ R_{X_r} \\ R_{q_{V_c}} \\ R_{q_{V_r}} \\ R_{q_{\Gamma_c}} \\ R_{q_{\Gamma_r}} \\ R_{\lambda_b} \\ R_{s_b} \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

## Capítulo 4

# Casos de Aplicação

### 4.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo apresentam-se três casos de aplicação que partem de estudos experimentais que se focaram na avaliação da aderência aço-betão. A selecção dos exemplos baseia-se no trabalho de Mendes [20], permitindo comparar os resultados obtidos não só com os resultados experimentais, mas também com outros resultados numéricos obtidos com a formulação tradicional dos elementos finitos de deslocamento. Os dois primeiros casos consistem em testes de “pull-out” que se traduziram em curvas de tensão tangencial de aderência vs. escorregamento. O terceiro exemplo, de um tirante de betão armado, apesar de resultados experimentais menos detalhados (curvas carga vs. deslocamento), tem uma maior proximidade com situações de aplicação prática.

Nos três exemplos que se seguem utiliza-se a formulação apresentada no capítulo anterior, tendo-se como principal objectivo a análise da inclusão do modelo de escorregamento apresentado no Capítulo 2 numa formulação híbrida-mista de tensão. Sendo o principal foco do trabalho a análise do comportamento não-linear da interface, por uma questão de simplificação do cálculo não se inclui a não-linearidade do betão (modelo de dano).

#### 4.1.1 Ancoragem curta vs. ancoragem longa

Há que fazer uma distinção importante entre provetes curtos e longos. A relevância do comprimento dos provetes prende-se com o comprimento de ancoragem dos varões de aço. Para pequenos comprimentos de ancoragem ocorre, ao longo de todo o desenvolvimento da interface, transferência de tensões entre o aço e o betão. Pelo contrário, para grandes comprimentos de ancoragem, igualando-se as deformações de ambos os materiais, parte da interface aço-betão não desenvolve tensões tangenciais de aderência e, pela mesma razão, não ocorre escorregamento nessa zona [19].

### 4.1.2 Funções de aproximação

Uma breve nota deve ser feita em relação às funções de aproximação utilizadas. No seguimento de investigação anterior [29, 26, 30], optou-se pela utilização de polinómios de Legendre. Outras funções poderiam ter sido adoptadas, como as funções trigonométricas [29], séries de Walsh [25] e sistemas de Wavelets [25, 31].

Os polinómios de Legendre são funções ortogonais, um tipo de função com características que as adequam à sua utilização em modelos híbridos-mistos. Estas funções permitem calcular os operadores estruturais através de expressões analíticas, evitando a necessidade de recorrer a métodos de integração numérica (consultar propriedades dos polinómios de Legendre em [32]). Outra vantagem é que resultam em sistemas governativos de esparsidade elevada, dando lugar a um aumento significativo da eficiência do modelo numérico, ao recorrer-se a algoritmos otimizados para este tipo de sistemas. Assim, a redução do número de coeficientes não nulos no sistema governativo permite contornar uma das maiores desvantagens dos modelos híbridos-mistos, isto é, o grande número de graus de liberdade [29].

Quanto aos graus das aproximações, de modo a evitar dependências no sistema, alguns cuidados são tomados. O grau de aproximação dos campos de deslocamentos no betão e na armadura  $n_{uv}$  e  $n_{u\Gamma}$ , respectivamente, para o domínio e para a fronteira, assim como da tensão de aderência  $n_\tau$  do escorregamento  $n_s$  na interface, têm de ser inferiores à aproximação dos campos de esforços no domínio do betão e da armadura  $n_x$ . Acrescenta-se ainda que, de modo a obter as soluções com menores erros de aproximação, é conveniente adoptar o mesmo grau de aproximação para  $n_{uv}$ ,  $n_{u\Gamma}$ ,  $n_\tau$  e  $n_s$ .

### 4.1.3 Elemento de interface

Mendes e Castro [6] aplicam o modelo de escorregamento a uma análise de elementos finitos clássicos utilizando um elemento de interface de espessura nula, colocado em paralelo com os restantes elementos (Figura 4.1). Ou seja, os nós da armadura são sobrepostos aos nós correspondentes do betão, impondo-se a ligação entre os dois tipos de elementos através do elemento de interface que incorpora o modelo de escorregamento e admitindo deslocamentos relativos entre ambos os materiais. No presente capítulo, esta mesma abordagem é utilizada, com as devidas adaptações exigidas pelo tipo de elementos finitos adoptados.

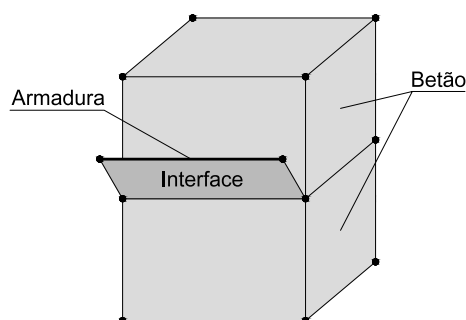


Figura 4.1: Interface implementada em paralelo (adaptado de Mendes [20])



## 4.2 Exemplo 1 - Testes de “Pull-out” de Eligehausen et al. [33]

### Descrição

O estudo experimental elaborado por Eligehausen et al. [33] teve como objectivo a avaliação da relação constitutiva que rege o escorregamento de varões nervurados ancorados em blocos de betão e sujeitos a carregamentos monotónicos e cíclicos.

Os ensaios laboratoriais seguem uma configuração pull-out, isto é, à extremidade saliente do reforço ancorado num bloco de betão é imposto um deslocamento monotonicamente crescente (ver Figura 4.2). Os blocos têm dimensões 15 in  $\times$  12 in  $\times$  7 in (381 mm  $\times$  305 mm  $\times$  178 mm) e resistência à compressão  $f_c = 30 \text{ N/mm}^2$ . A armadura consiste num varão de aço com 1 in (25.4 mm) de diâmetro, inserido na totalidade do comprimento do bloco, havendo ainda armaduras secundárias longitudinais e transversais. Nas zonas extremas do bloco não há ligação com o reforço, evitando concentrações de tensões que possam afectar os resultados. Deste modo, o comprimento de ancoragem é de 5 in, ou seja, um comprimento de  $5 \phi_s$ , valor baixo e que deve dar origem a uma distribuição praticamente uniforme da tensão tangencial de aderência e do escorregamento.

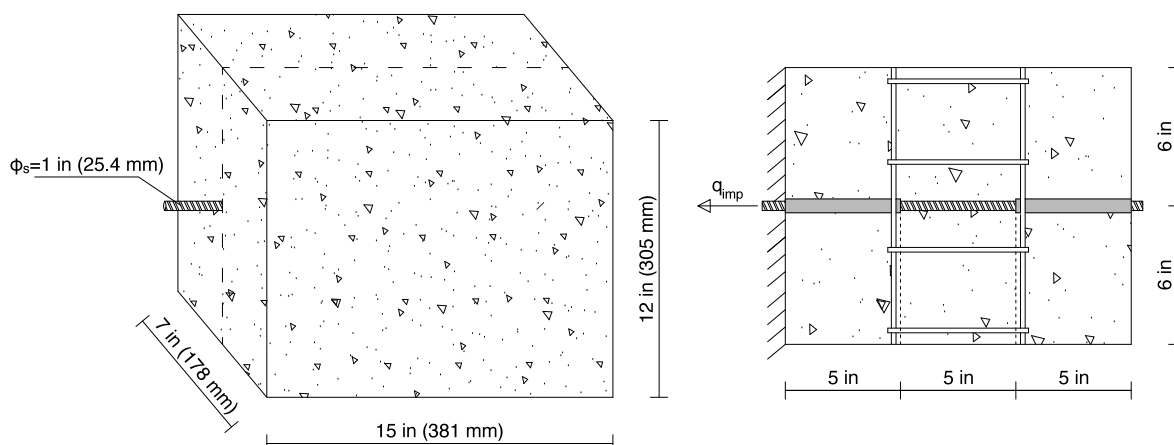


Figura 4.2: Configuração do ensaio (adaptado de Eligehausen et al. [33] e Mendes e Castro [6])

### Malha de elementos finitos e condições de fronteira

Na Figura 4.3 apresenta-se a malha utilizada e as respectivas condições de fronteira. Assumindo que o ensaio se traduz adequadamente por um estado plano de tensão, a modelação do bloco de betão compreende 6 elementos bidimensionais de 5 in  $\times$  6 in (127 mm  $\times$  152.4 mm). O reforço está definido por três elementos lineares de 5 in (127 mm) e o elemento de interface desenvolve-se por 5 in, coincidindo, num mesmo local, a fronteira dos elementos de betão centrais, o elemento de interface e o elemento de armadura central.

Quanto às condições de fronteira, de modo a simular a parede que impede o movimento do bloco de betão, as fronteiras verticais da esquerda estão encastradas. O deslocamento imposto estabelece-se na fronteira do elemento de aço.

Outra observação deve ser feita em relação às condições cinemáticas. Os deslocamentos dos domínios e

fronteiras dos elementos de armadura, assim como do elemento de interface, apenas se podem desenvolver na direcção  $xx$ .

O deslocamento imposto é aplicado no nó  $A$ , localizado na extremidade do elemento de reforço.

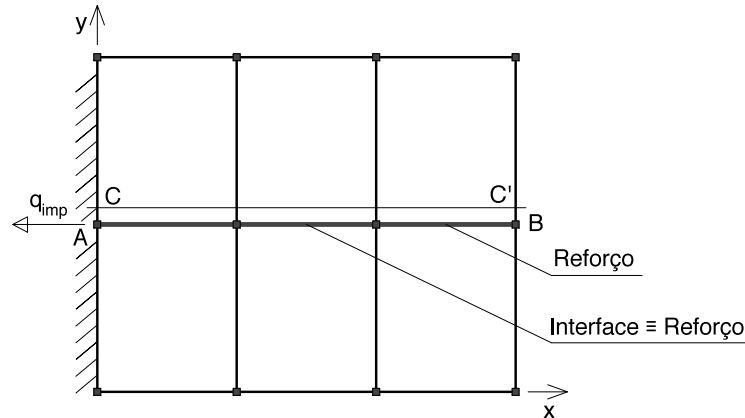


Figura 4.3: Malha de elementos finitos

### Características dos materiais

Assume-se um comportamento elástico linear tanto para o betão como para o reforço. Para o elemento de interface, considerando o modelo de escorregamento apresentado no Capítulo 2, adoptaram-se os valores determinados em [20]. A Tabela 4.1 lista todos os valores adoptados para os parâmetros necessários à definição dos materiais.

Tabela 4.1: Características dos materiais (adaptado de [6])

Material	Características			
Betão	$E_c = 30.5 \text{ GPa}$	$\nu = 0.20$	$t_c = 178 \text{ mm}$	
Aço	$E_r = 200.0 \text{ GPa}$	$\nu = 0.30$	$A_r = 5.067 \text{ cm}^2$ ( $\phi_s = 25.4 \text{ mm}$ )	
Interface	$k_{pb} = 32.94 \text{ GPa/m}$	$k_0 = 8.235 \text{ GPa/m}$	$f_1 = 0.35$	$c_s = 0.00$
	$s_{pb} = 0.343 \text{ mm}$	$s_0 = 1.70 \text{ mm}$	$s_{res} = 10.50 \text{ mm}$	

### Análise

A análise estática efectuada para o presente exemplo tem diversos objectivos. Por um lado, procura-se verificar a modelação do escorregamento, garantindo que o comportamento se adequa aos resultados experimentais obtidos por Eligehausen et al. [33]. Por outro, pretende-se avaliar o desempenho do modelo híbrido-misto de tensão para diferentes graus das funções de aproximação.

O deslocamento  $q_{imp}$  é aplicado na direcção e sentido indicados na Figura 4.3, em 120 incrementos de 0.10 mm, até perfazer 12.00 mm.

Numa primeira análise, torna-se necessário determinar graus de aproximação que produzam resultados

satisfatórios. Deste modo, quatro conjuntos de graus de aproximação distintos foram testados (Tabela 4.2), com ordens de grandeza em concordância com trabalhos anteriores no tema [34, 4], tendo-se como objectivo examinar a sensibilidade do modelo à variação do número de graus de liberdade. Refira-se que o grau  $n_x$  apresentado na tabela diz respeito ao campo de tensões no betão e esforço axial no aço, admitindo-se para as restantes aproximações o grau de valor  $n_x - 1$ .

Tabela 4.2: Aproximações consideradas para o campo de tensão e tempo decorrido na resolução do sistema para 20 passos de carga

Aproximação	Grau $n_x$	Graus de Liberdade	Tempo Decorrido
(a)	3	524	0.532 s
(b)	5	1156	1.115 s
(c)	10	3786	10.477 s
(d)	15	7916	79.506 s

Na Figura 4.4 representam-se as distribuições da tensão  $\sigma_{xx}$  no betão, na secção  $y = 167.75$  mm (corte  $C - C'$  na Figura 4.3) e para um deslocamento imposto  $q_{imp} = 2.0$  mm (passo de carga 20). Assim, conclui-se que os resultados são semelhantes entre si para quase todo o domínio dos elementos. A única situação onde se obtém valores significativamente diferentes está nas zonas mais próximas das extremidades da interface aço-betão, locais de maior concentração de esforços e que se podem caracterizar de zonas de singularidade. Em contraste com a proximidade dos resultados, o esforço computacional, quando considerando o tempo dispendido na resolução do sistema em 20 passos de carga (Tabela 4.2), tem um aumento muito significativo com o aumento do grau da aproximação. Deste modo, para efeitos da análise pretendida, torna-se injustificado utilizar um grau de aproximação demasiado elevado. Os restantes resultados apresentados provirão da aproximação (c).

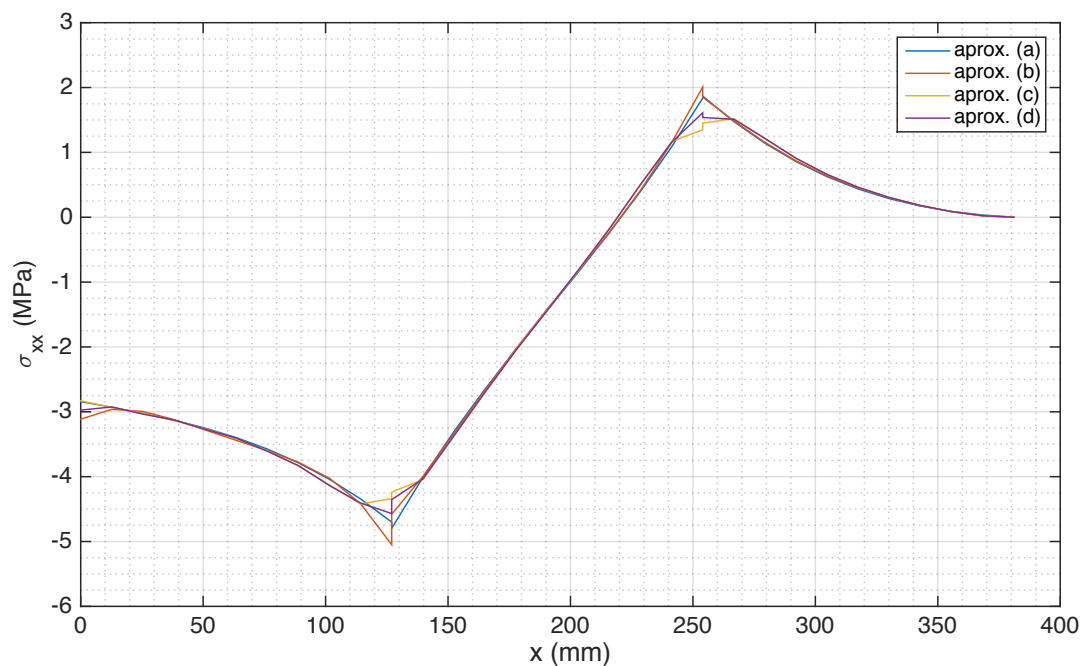


Figura 4.4: Tensão  $\sigma_{xx}$  no betão, na secção  $y = 167.75$  mm e para um deslocamento imposto  $q_{imp} = 2.0$  mm

Refere-se ainda que as tensões no betão permitem verificar uma variação praticamente uniforme da tensão ao longo do elemento central, ou seja, a transferência de carga na interface é também uniforme, estando em concordância com a hipótese do pequeno comprimento de ancoragem.

Quanto ao comportamento do modelo de escorregamento, na Figura 4.5 apresenta-se o diagrama da tensão tangencial de aderência em função do deslocamento medido no ponto  $B$ . A distribuição da tensão tangencial ao longo da interface não é totalmente uniforme, tendo-se optado, deste modo, por considerar uma tensão equivalente  $\tau_b^{eq} = Q_c/A_c$ .  $Q_c$  é o valor da força em  $A$ , resultante da imposição do deslocamento e  $A_c = P_c L_c = 79.80 \times 127 = 10\,135 \text{ mm}^2$  define a área de armadura ao longo da interface, onde  $P_c = 2\pi r$  é o perímetro da armadura de raio  $r$  e  $L_c$  o comprimento de reforço onde há ligação. Para efeitos de comparação, representa-se também a curva obtida experimentalmente por Eligehausen et al. [33] e os resultados obtidos por Mendes e Castro [6] recorrendo a elementos finitos convencionais de deslocamento.

É evidente a sobreposição entre a curva de elementos finitos clássicos e a obtida utilizando os elementos híbridos-mistos de tensão, confirmando, assim, a adequação da formulação da aderência proposta em [6] a elementos não convencionais. Posto isto, a utilização dos parâmetros já calibrados pelos mesmos autores permite obter uma modelação do escorregamento em concordância com os resultados experimentais.

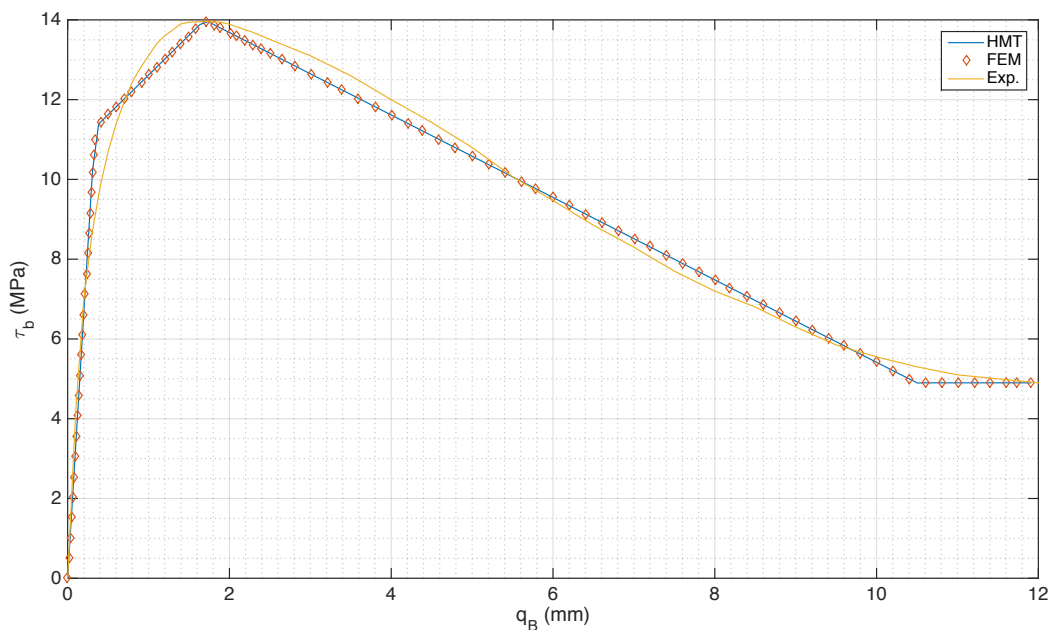


Figura 4.5: Tensão tangencial de aderência vs. deslocamento em  $B$  (dados experimentais adaptados de [33] e análise FEM de [6])

Na Figura 4.6 apresenta-se a distribuição da tensão de aderência na interface para vários passos de carga. São de notar alguns aspectos referentes a estes resultados. Primeiramente, para um pequeno deslocamento imposto (passo de carga inicial de 0.1 mm) a distribuição da tensão de aderência sofre uma redução gradual com o aumento de  $x$ . Isto resulta da interface se encontrar na sua totalidade no ramo elástico inicial, de elevada rigidez. Ou seja, pequenas diferenças de escorregamento, que vão ocorrendo à medida que a carga é transferida para o betão, dão origem a diferenças significativas da tensão da ligação. Para o quinto passo de carga ( $q_{imp} = 0.5 \text{ mm}$ ), a parte inicial da interface já se encontra no segundo ramo da curva de escorregamento (ver Figura 2.6), isto é, já apresenta uma muito menor sensibilidade a uma pequena redução do deslocamento

relativo entre os materiais. Os últimos dois casos representados ( $q_{imp} = 2.0$  mm, muito próximo do valor de pico e  $q_{imp} = 12.0$  mm, já na fase de tensões residuais) exibem um comportamento praticamente uniforme, de acordo com o previsto anteriormente.

Ainda outro resultado relevante é a distribuição das tensões na armadura, apresentado na Figura 4.7 para um deslocamento imposto  $q_{imp} = 2.0$  mm. Na mesma figura representam-se, igualmente, a distribuição das tensões  $\sigma_{xx}$  do betão na secção junto à interface ( $y = 152.40$  mm, corte  $A - B$ ) e um pouco acima ( $y = 167.75$  mm corte  $C - C'$ ). Uma primeira análise confirma o comportamento esperado para a transferência de tensões da armadura para o betão, ou seja, o valor máximo das tensões do aço é mantido durante o trecho inicial (sem ligação ao betão), sendo o esforço gradualmente transferido para o betão, ao longo da interface. No último trecho de armadura, não havendo ligação, a tensão é nula. Outra característica de grande relevância se pretende mostrar com a Figura 4.7: muito próximo do início e final da interface, há uma concentração significativa de tensões. Acrescenta-se que o recurso a um grau elevado para as aproximações de esforços, mantendo graus bastante inferiores nos restantes campos (solução adoptada no terceiro exemplo deste capítulo), não dá origem a melhores resultados quando comparados com os da aproximação (c).

Com um objectivo ilustrativo, na Figura 4.8 representa-se a deformada e tensões  $\sigma_{xx}$  do bloco de betão, para  $q_{imp} = 2.0$  mm. Esta figura permite demonstrar a influência das condições de fronteira (ausência de deformação na fronteira esquerda) e o efeito de Poisson no betão (dando origem a uma retracção na direcção vertical). Igualmente, percebe-se a grande concentração de tensões nas extremidades da interface. Note-se que, na Figura 4.8, a malha marcada serve apenas para ilustrar a deformação do bloco de betão, não tendo qualquer relação com a malha de elementos finitos utilizada

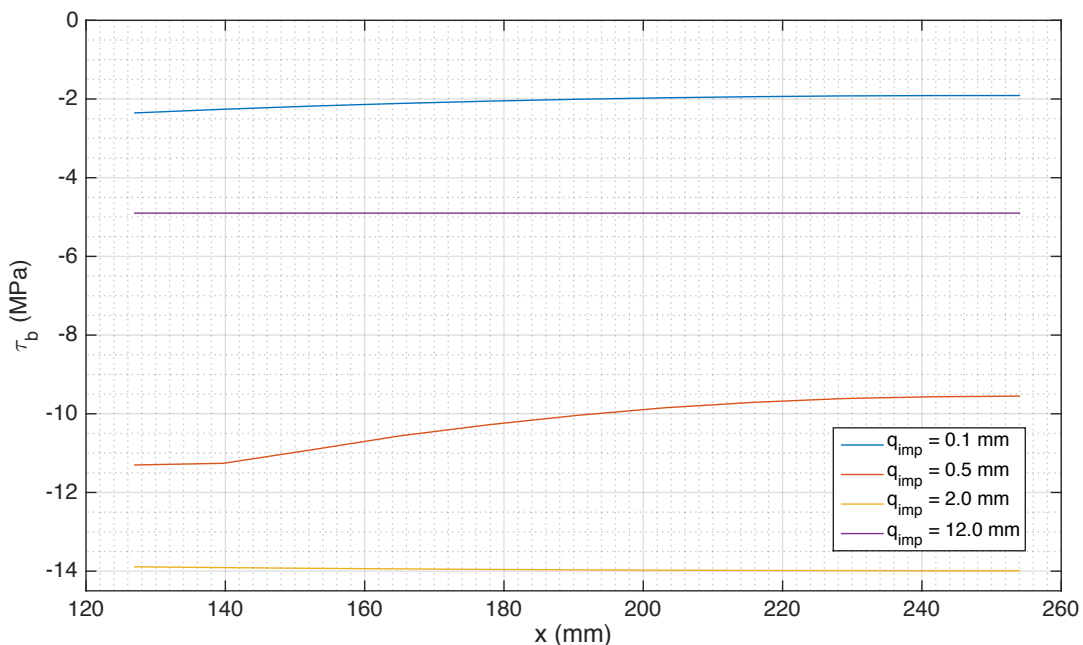


Figura 4.6: Distribuição da tensão tangencial de aderência ao longo da interface para diferentes passos de carga

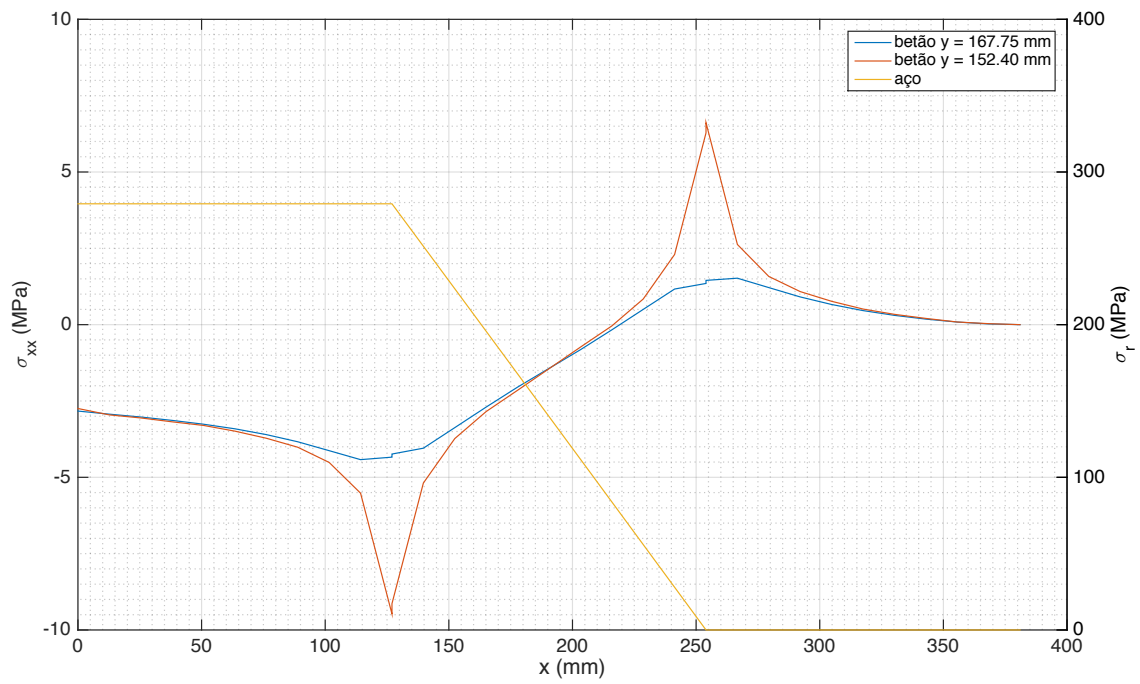


Figura 4.7: Distribuição das tensões no aço e no betão para  $q_{imp} = 2.0$  mm

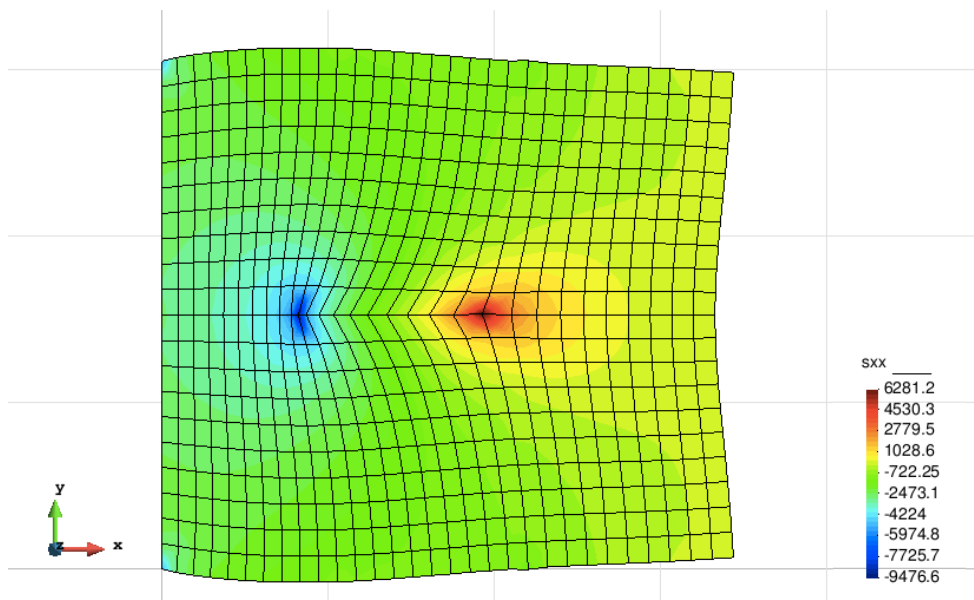


Figura 4.8: Deformada e tensões  $\sigma_{sxx}$  do betão, em  $\text{kN/m}^2$ , para  $q_{imp} = 2.0$  mm

## 4.3 Exemplo 2 - Testes de “Pull-out” de La Borderie e Pijaudier-Cabot [35]

### Descrição

O objectivo principal dos ensaios realizados por La Borderie e Pijaudier-Cabot [35] foi a avaliação do comportamento da ligação aço-betão para diferentes estados de tensão, dependentes do nível de confinamento. Como o modelo de aderência considerado no presente trabalho não contempla a hipótese de tensões radiais de confinamento, apenas são relevantes os resultados para tensões radiais nulas.

Novamente, os ensaios apresentam uma configuração pull-out. Tal como se pode verificar na Figura 4.9, a armadura embebida em blocos de betão de 80 mm tem um comprimento de ancoragem de 45 mm, não estando ligada nos 10 mm iniciais, de forma a evitar concentrações de esforços. O betão apresenta uma resistência à compressão  $f_c = 14.5$  MPa, e parâmetros característicos  $E_c = 15.5$  GPa e  $\nu = 0.17$ .

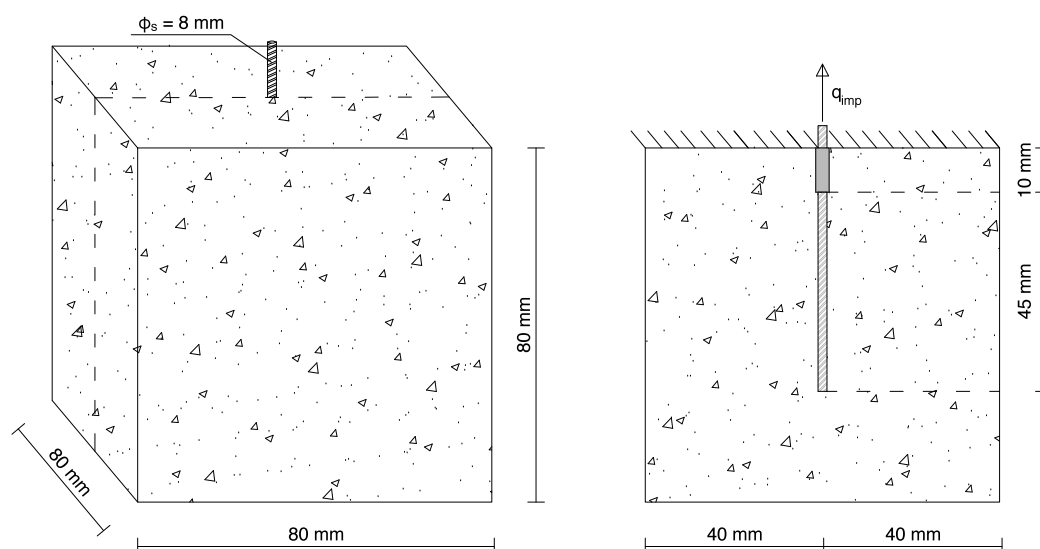


Figura 4.9: Configuração do ensaio de Pull-out de La Borderie e Pijaudier-Cabot [35] (adaptado de [6])

### Malha de elementos finitos e condições de fronteira

À semelhança do exemplo anterior, utiliza-se uma malha com seis elementos bidimensionais de betão, com as dimensões apresentadas na Figura 4.10. A armadura está definida por dois elementos lineares e um único elemento de interface conecta o elemento de aço de 45 mm à fronteira dos elementos de betão que se sobrepõe.

As condições de fronteira são estabelecidas através do encastramento das duas fronteiras superiores dos elementos de betão a maior cota. O deslocamento imposto é aplicado na fronteira exterior do elemento de aço (ponto A). Neste caso, como a armadura se desenvolve verticalmente, os deslocamentos dos elementos de aço e de interface são impedidos na direcção  $yy$ .

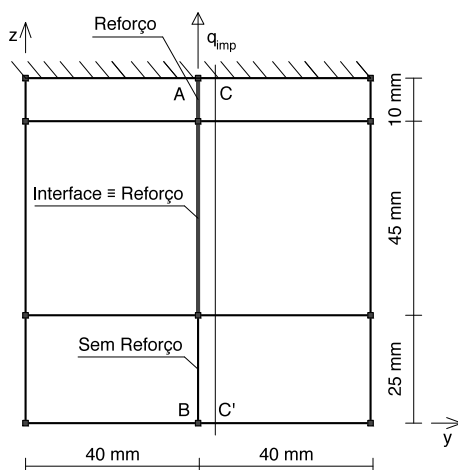


Figura 4.10: Malha de elementos finitos para o exemplo 2

### Características dos materiais

Assume-se um comportamento elástico linear tanto para o betão como para o reforço. As características do modelo de escorregamento da interface seguem os valores calibrados por Mendes e Castro [6], apresentando-se na Tabela 4.3 todos os valores adoptados na definição dos materiais. Salienta-se o parâmetro  $c_s = 2.80$ , que permite modelar um amolecimento não linear na curva da aderência aço-betão.

Tabela 4.3: Características dos materiais (adaptado de Mendes e Castro [6])

Material	Características			
Betão	$E_c = 15.5 \text{ GPa}$	$\nu = 0.17$	$t_c = 80 \text{ mm}$	
Aço	$E_r = 200.0 \text{ GPa}$	$\nu = 0.30$	$A_r = 0.5026 \text{ cm}^2$ ( $\phi_s = 8 \text{ mm}$ )	
Interface	$k_{pb} = 14.4 \text{ GPa/m}$	$k_0 = 9.72 \text{ GPa/m}$	$f_1 = 0.09$	$c_s = 2.80$
	$s_{pb} = 0.68 \text{ mm}$	$s_0 = 1.15 \text{ mm}$	$s_{res} = 25.00 \text{ mm}$	

### Análise

Devido às semelhanças significativas entre este exemplo e o anterior, justifica-se adoptar um grau de aproximação igual ao admitido anteriormente. Ou seja, o grau de aproximação dos campos de esforços do betão e do aço é dado por  $n_x = 10$ , sendo as restantes aproximações definidas por  $n_{uv} = n_{u\Gamma} = n_\tau = n_s = 9$ . Assim, os graus de liberdade totalizam 3764.

O deslocamento imposto tem um valor último  $q_{imp} = 25.0 \text{ mm}$ , sendo aplicado incrementalmente com 250 intervalos de 0.1 mm.

Na Figura 4.11 compare-se o comportamento da aderência da ligação obtido com os resultados experimentais de La Borderie e Pijaudier-Cabot [35] e os resultados de elementos finitos clássicos (com o mesmo modelo de escorregamento) de Mendes e Castro [6]. Por uma questão de coerência entre os vários resultados, o diagrama é traçado considerando a carga resultante da imposição do deslocamento em  $A$  em função do



deslocamento imposto  $q_{imp}$ . Mais uma vez, a proximidade aos resultados experimentais e a sobreposição entre a curva de HMT e FEM confirma a adequação da utilização do modelo de escorregamento proposto em [6] com elementos híbridos mistos de tensão. Ainda dos mesmos resultados, na Tabela 4.4 apresentam-se a tensão de aderência de pico (para  $q_{imp} = 1.2$  mm) e escorregamento correspondente, assim como a tensão de aderência residual (para  $q_{imp} = 25.0$  mm). Adoptando-se a tensão equivalente  $\tau_b^{eq}$  tal como definida no exemplo anterior, com  $A_c = P_c L_c = 25.1 \times 45 = 1130$  mm<sup>2</sup>, verifica-se valores muito próximos entre si e de acordo com o expectável tendo em conta as características dos materiais definidos na Tabela 4.3.

Tabela 4.4: Valores de pico e residuais obtidos através dos modelos HMT e FEM e ensaios

—	HMT	FEM	Exp.
$s_{pico}$ (mm)	1.2	1.2	1.1
$\tau_{pico}^{eq}$ (MPa)	11.17	11.18	11.16
$\tau_{res}^{eq}$ (MPa)	1.01	1.01	1.03

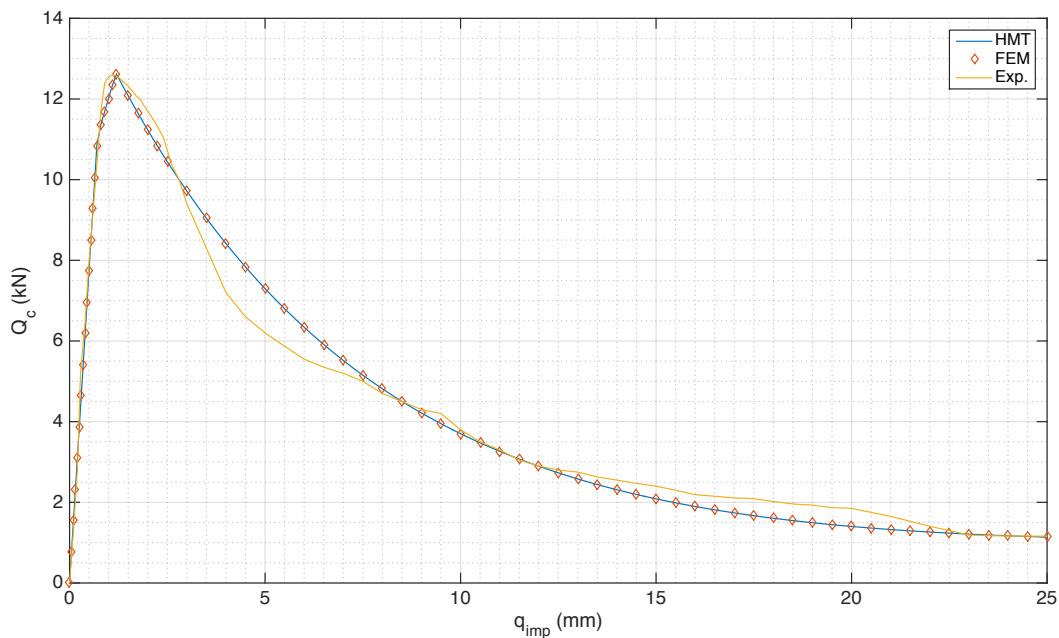


Figura 4.11: Tensão tangencial de aderência vs.  $q_{imp}$  (dados experimentais adaptados de [35] e análise FEM de [6])

Traçando a distribuição da tensão tangencial de aderência para diferentes passos de carga (Figura 4.12) percebe-se o comportamento quase uniforme do comportamento da interface. Deste modo, o que é coerente com a hipótese de um pequeno comprimento de ancoragem. À semelhança do exemplo anterior, a variação maior ocorre nos passos de carga iniciais, ou seja, quando a rigidez da ligação é mais elevada: para  $q_{imp} = 0.1$  mm a tensão de aderência varia de 1.41 MPa, no ponto de cota mais elevada, até 1.36 MPa, no ponto de menor cota; já em passos de carga seguintes,  $q_{imp} = 1.2$  mm e  $q_{imp} = 10.0$  mm, vão de 11.1 MPa a 11.2 MPa e de 3.27 MPa a 3.28 MPa, respectivamente; o último passo de carga, com resistência residual da ligação, apresenta um valor constante de 1.01 MPa. Da mesma forma, a distribuição do escorregamento para estes passos de carga (Figura 4.13) tem uma distribuição muito próxima do uniforme.

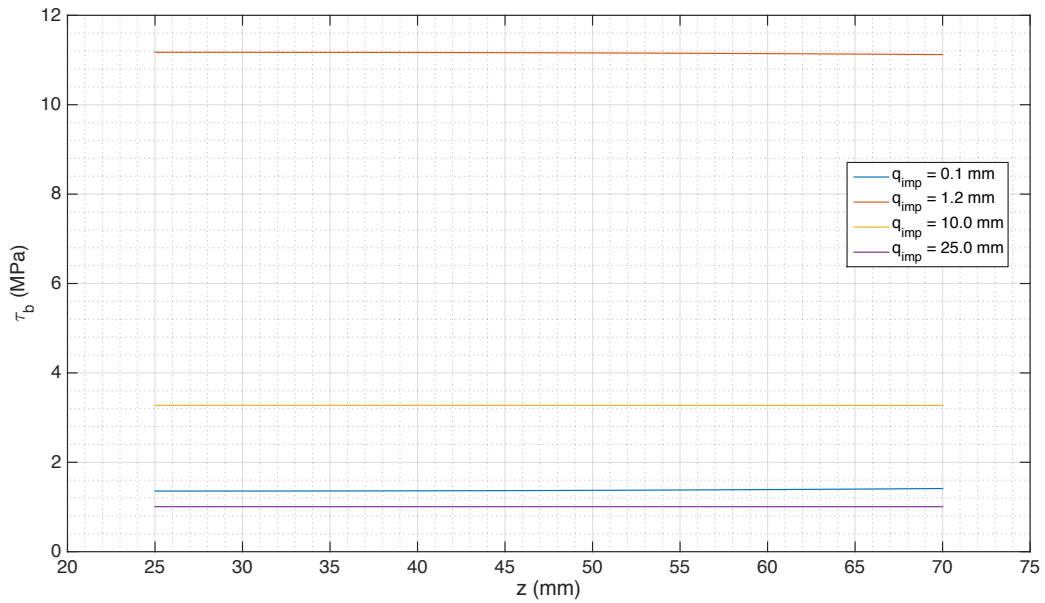


Figura 4.12: Distribuição da tensão tangencial de aderência ao longo da interface, para diferentes passos de carga

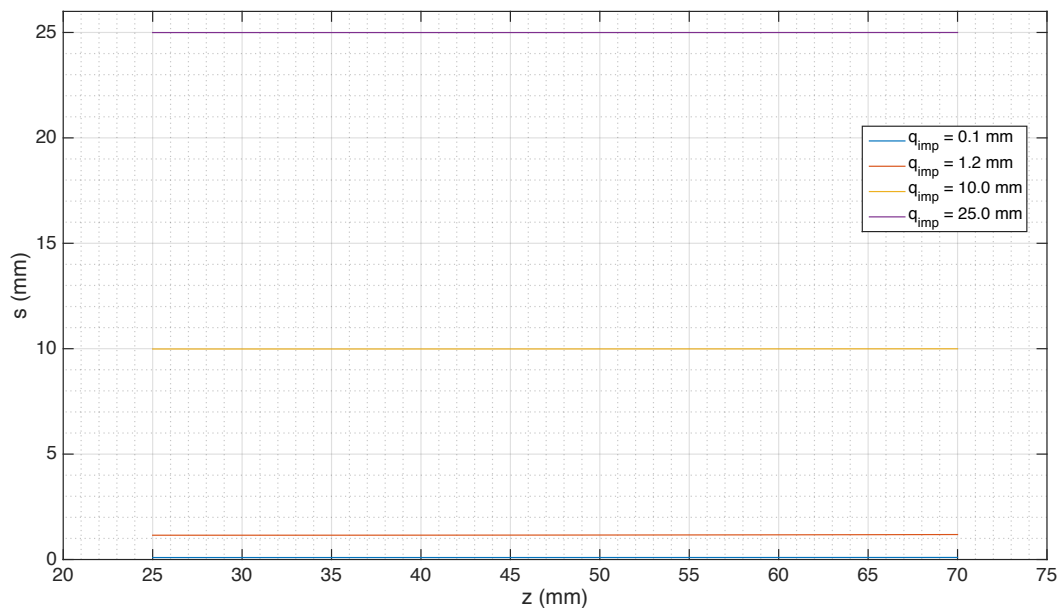


Figura 4.13: Distribuição do escorregamento ao longo da interface, para diferentes passos de carga

A Figura 4.14 apresenta a distribuição das tensões  $\sigma_{zz}$  no bloco de betão para o passo de carga de pico ( $q_{imp} = 1.2$  mm). De novo se verifica uma grande concentração de tensões na proximidade dos extremos do elemento de interface. Para o mesmo passo de carga, a distribuição de tensões  $\sigma_{zz}$  no betão nos planos de corte  $y = 40$  mm e  $y = 44$  mm, (corte  $A - B$  e  $C - C'$  da Figura 4.10) na Figura 4.15, permite observar este mesmo efeito. Verifica-se também a existência de esforços de compressão no betão na fronteira encastrada, a transferência praticamente linear de carga ao longo do desenvolvimento da interface aço-betão e, ainda, a

diminuição progressiva das tensões até à sua anulação na fronteira livre.

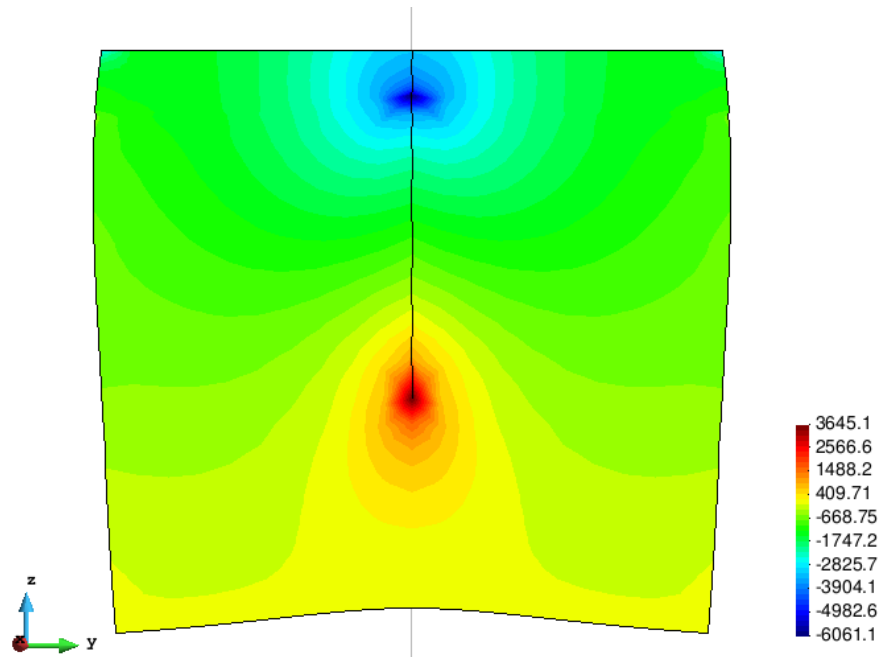


Figura 4.14: Deformada e distribuição das tensões  $\sigma_{zz}$  no bloco de betão, em  $\text{kN/m}^2$ , para  $q_{imp} = 1.2 \text{ mm}$

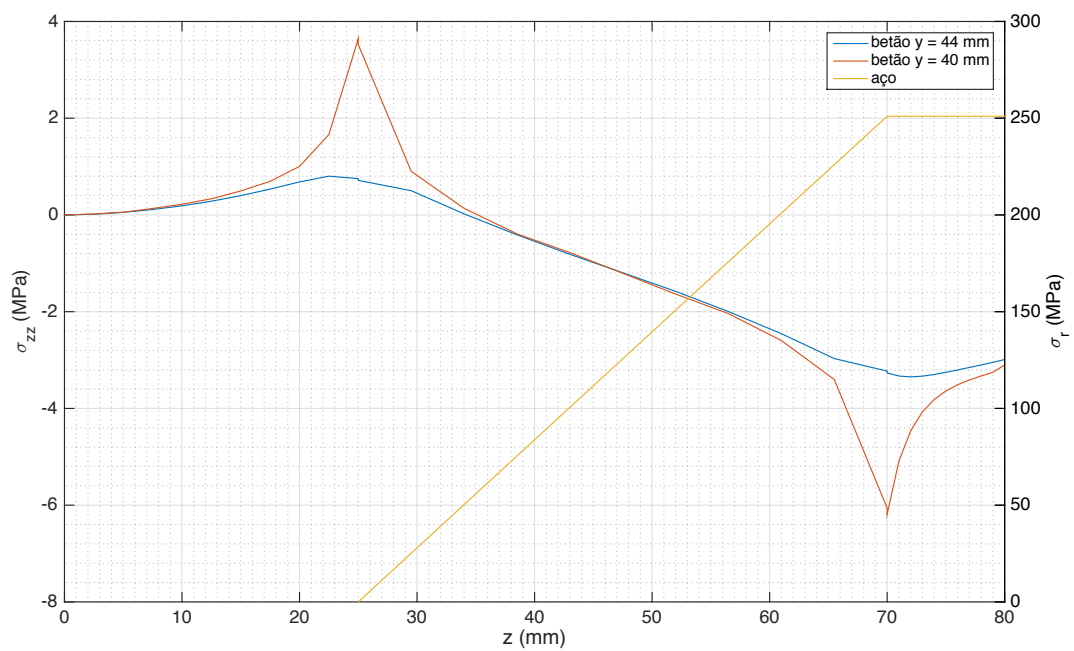


Figura 4.15: Distribuição das tensões  $\sigma_{zz}$  do betão nos planos de corte  $y = 40 \text{ mm}$  e  $y = 44 \text{ mm}$  e distribuição das tensões nos elementos de aço, ambas para  $q_{imp} = 1.2 \text{ mm}$

## 4.4 Exemplo 3 - Tirante de Betão Armado de Clément [36]

### Descrição

Este último caso de aplicação parte do estudo experimental de caracterização da interface aço-betão por parte de Clément [36]. Foram testados três tirantes de betão armado de secção quadrada com 100 mm de lado e 680 mm de comprimento e um varão centrado com 10 mm de diâmetro, tal como ilustrado na Figura 4.16. O betão utilizado apresenta uma resistência à compressão  $f_c = 32$  MPa e resistência à tracção  $f_{ct} = 2.8$  MPa.

Os ensaios foram efectuados impondo deslocamentos monotónicos simétricos em ambas as extremidades do varão, interrompendo o ensaio aquando da formação da primeira fenda transversal. A resposta dos provetes está representada em diagramas carga-deslocamento (ver Figura 4.18), permitindo verificar um comportamento inicial de elevada rigidez, seguido de uma rápida redução da mesma, até à perda brusca de carga causada pela formação da fenda.

Nestes testes, ao contrário dos dois exemplos anteriores, os elementos de betão armado têm um comprimento de ancoragem médio/longo. Acrescenta-se ainda que o seu comportamento é representativo do que ocorre na parte traccionada de vigas sujeitas a flexão, permitindo uma maior aproximação a situações reais em estruturas de betão armado.

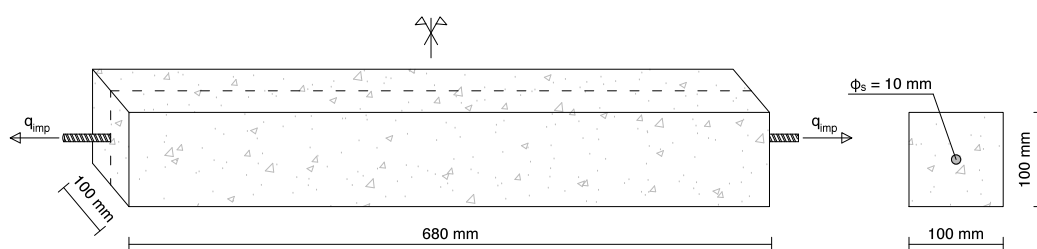


Figura 4.16: Configuração do ensaio elaborado por Clément [36] (adaptado de Mendes [20])

### Malha de elementos finitos e condições de fronteira

A malha utilizada consiste em quatro elementos bidimensionais de betão de dimensões 340 mm  $\times$  50 mm, dois elementos lineares de reforço com 340 mm de comprimento e dois de interface, efectuando a ligação entre os elementos de reforço e as fronteiras de betão coincidentes.

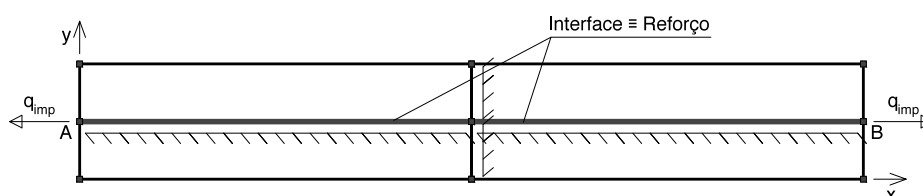


Figura 4.17: Malha de elementos finitos utilizada no exemplo 3

Para além da malha, a Figura 4.17 apresenta ainda as condições de fronteira. Neste caso, por questões de simetria da estrutura e do carregamento, aplica-se um encastramento deslizante nas fronteiras verticais

interiores dos elementos de betão e um encastramento total na fronteira interior dos elementos de aço. Para que não seja permitido um movimento de corpo livre na direcção  $yy$ , as fronteiras horizontais interiores dos elementos de betão estão encastradas nesse eixo. Por último, tal como nos exemplos anteriores, repete-se a restrição de movimentos em  $yy$  para os elementos de interface e de armadura.

O carregamento consiste em dois deslocamentos impostos simétricos aplicados nos nós  $A$  e  $B$ , fronteiras externas dos elementos de aço.

### Características dos materiais

Assume-se um comportamento elástico linear tanto para o betão como para o reforço. Os valores, adaptados de [20], encontram-se na Tabela 4.5.

Tabela 4.5: Características dos materiais (adaptado de Mendes [20])	
Material	Características
Betão	$E_c = 30.5 \text{ GPa}$ $\nu = 0.20$ $t_c = 178 \text{ mm}$
Aço	$E_r = 210.0 \text{ GPa}$ $\nu = 0.30$ $A_r = 78.5398 \text{ mm}^2$ ( $\phi_s = 10 \text{ mm}$ )
Interface	$k_s = \{0, 60, 120, 240\} \text{ GPa/m}$

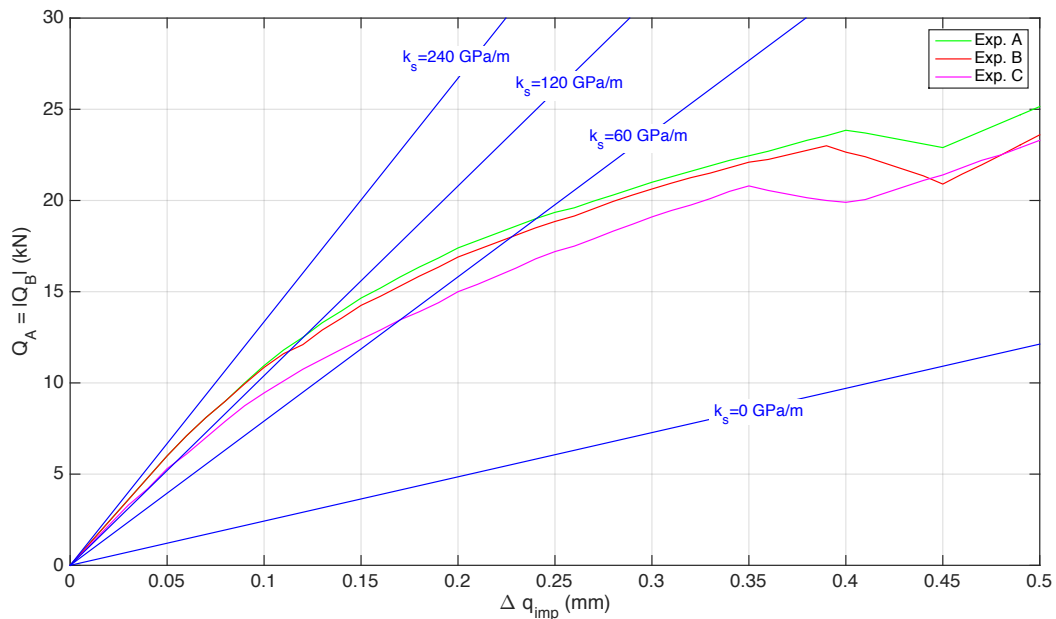


Figura 4.18: Diagramas carga-deslocamento (resultados experimentais de Clément [36] e diagramas lineares determinados com modelo HMT)

Seguindo a abordagem usada em [20], faltando informação experimental que permita calibrar os valores do modelo de aderência, a interface é definida através de uma rigidez constante  $k_s$ . Dos diagramas carga-deslocamento obtidos experimentalmente em [36] e representados na Figura 4.18, o autor identifica um intervalo de valores  $k_s = \{120 - 240\} \text{ GPa/m}$  como o mais representativo do primeiro trecho da curva de comportamento. Deste modo, quatro valores serão testados para o parâmetro  $k_s$ : 0 GPa/m, ilustrativo de uma

situação de carga totalmente resistida pelo varão; 60GPa/m, interface com uma ligação de rigidez moderada, arroximando-se do comportamento após o trecho linear inicial; 120GPa/m e 240GPa/m, limites inferior e superior propostos. Note-se que os diagramas lineares da Figura 4.18 resultam da aplicação de uma relação constitutiva linear para a interface associado ao modelo híbrido misto de tensão, efectuando o cálculo para  $q_{imp} = 0.25$  mm, ou seja, um deslocamento imposto total de  $\Delta q_{imp} = 0.50$  mm. Os graus de aproximação são os mesmos que os adoptados na secção seguinte.

## Análise

No presente caso de análise, procura-se verificar o comportamento de um comprimento de ancoragem médio/longo, sujeito a diferentes valores de rigidez da interface aço-betão.

Por forma a obter resultados comparáveis com os alcançados por Mendes [20], aplica-se um carregamento igual ao utilizado pelo autor. Ou seja, com a direcção e sentido indicados na figura 4.17, são impostos dois deslocamentos de valor  $q_{imp} = 0.125$  mm, dando um deslocamento imposto total de  $\Delta q_{imp} = 0.25$  mm. Lembra-se que, neste caso, não havendo qualquer não-linearidade no sistema governativo, não é necessário recorrer a uma análise incremental e iterativa.

Quanto à definição dos graus de aproximação, testando-se várias hipóteses concluiu-se que um grau muito elevado para os esforços  $n_x$ , associado a um grau significativamente mais baixo para as restantes aproximações  $n_{uv} = n_{u\Gamma} = n_\tau = n_s$ , leva aos melhores resultados. Caso contrário, para graus de aproximação do tipo  $n_{uv} = n_{u\Gamma} = n_\tau = n_s = n_x - 1$  dá origem a erros numéricos que geram um pico de tensões na ligação entre ambos os elementos de interface. Esta situação pode ser observada na Figura 4.19, com as aproximações definidas na Tabela 4.6. Assim sendo, para a análise final adoptou-se a aproximação (c).

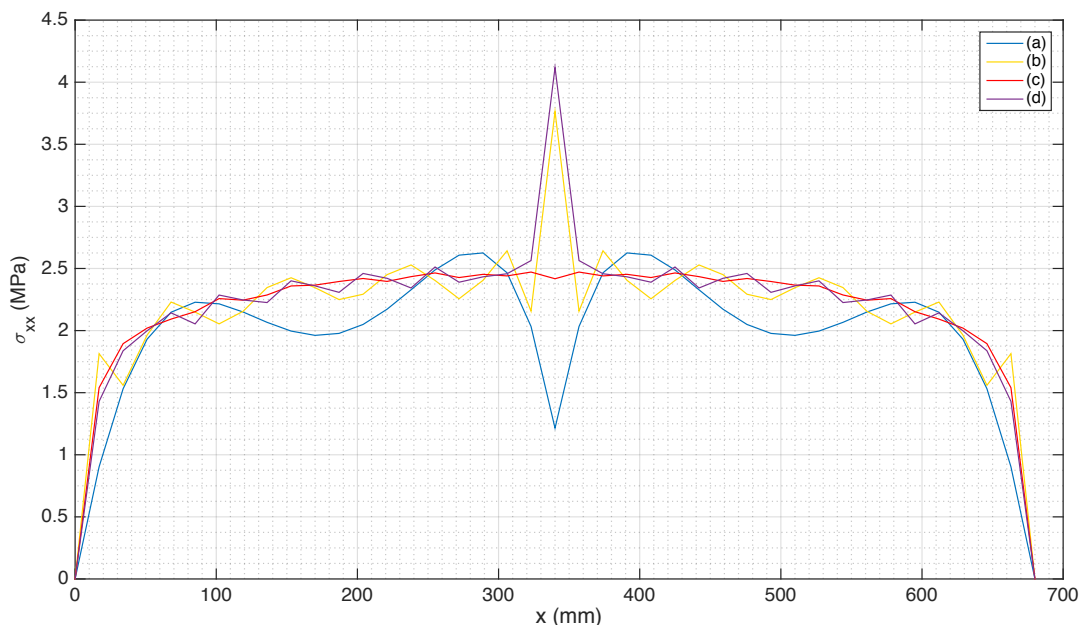


Figura 4.19: Distribuição de tensões no betão  $\sigma_{xx}$  na proximidade do varão de aço, para  $k_s = 120$  GPa/m e  $\Delta q_{imp} = 0.25$  mm

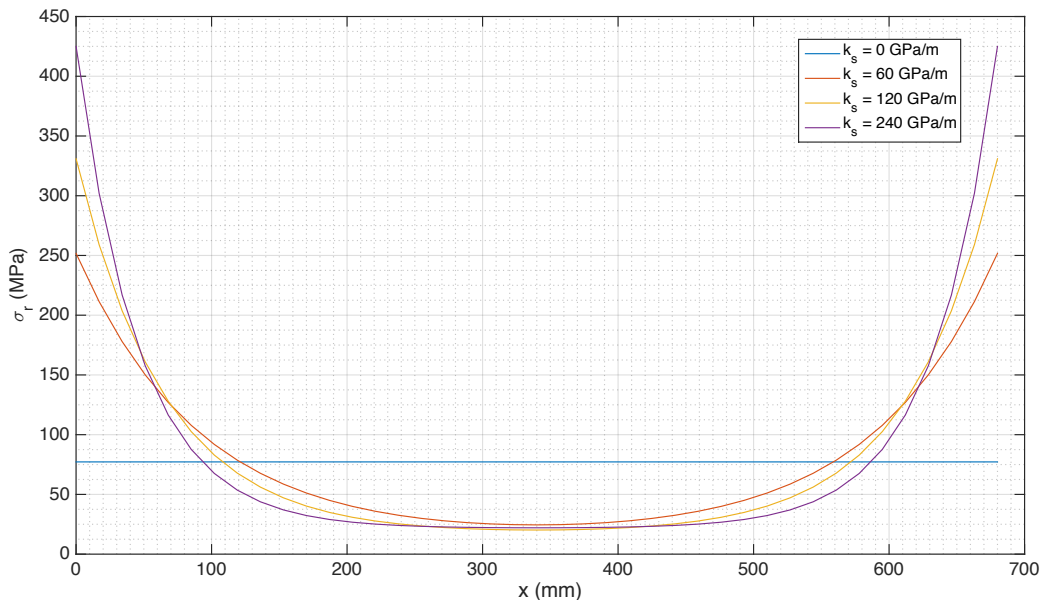
Nas Figuras 4.20, 4.21 e 4.22 representa-se a distribuição de tensões na armadura, tensões de aderência

Tabela 4.6: Aproximações consideradas

—	$n_x$	restantes	Graus de liberdade
(a)	5	4	778
(b)	12	11	3522
(c)	20	12	7028
(d)	20	19	9058

na interface e tensões  $\sigma_{xx}$  do betão em  $y = 50$  mm (secção  $A - B$ ), respectivamente. Verifica-se que, quanto maior o valor de  $k_s$ , mais  $\sigma_r$  e  $\sigma_{xx}$  se aproximam de um valor constante na área central. Ou seja, nessa zona não há transferência de tensões através da interface, confirmado pelos valores nulos de  $\tau_b$ , apresentando um comportamento de ancoragem longa. Quanto maior o valor de  $k_s$ , maior é o declive da distribuição das tensões nos extremos, comprovando a maior capacidade da interface na transferência de tensões. Por outro lado, para valores menores de  $k_s$ , a transmissão de tensões da armadura para o betão desenvolve-se a uma menor taxa, exigindo um maior comprimento de interface para a transferência. No caso extremo,  $k_s = 0$  GPa/m, a ligação aço-betão deixa de existir, não se verificando qualquer transferência de tensões entre os materiais. A distribuição de tensões  $\sigma_{xx}$  nos elementos de betão é apresentada na Figura 4.24, indo de encontro às observações já feitas. Esta figura permite ainda verificar que, para  $k_s = 0$  GPa/m, não havendo transferência de tensões para o betão, também não há deformações nos elementos deste material.

Refere-se também que, com o aumento da rigidez da ligação, o escorregamento máximo diminui, isto é, o deslocamento relativo entre a armadura e o betão é menor. Levado ao extremo, situação de aderência perfeita, este deslocamento relativo teria de ser nulo. Inversamente, para um  $k_s$  nulo, o escorregamento equivale à extensão do varão por estar sujeito à tracção (ver Figura 4.23).

Figura 4.20: Tensão no aço  $\sigma_r$  para  $\Delta q_{imp} = 0.25$  mm

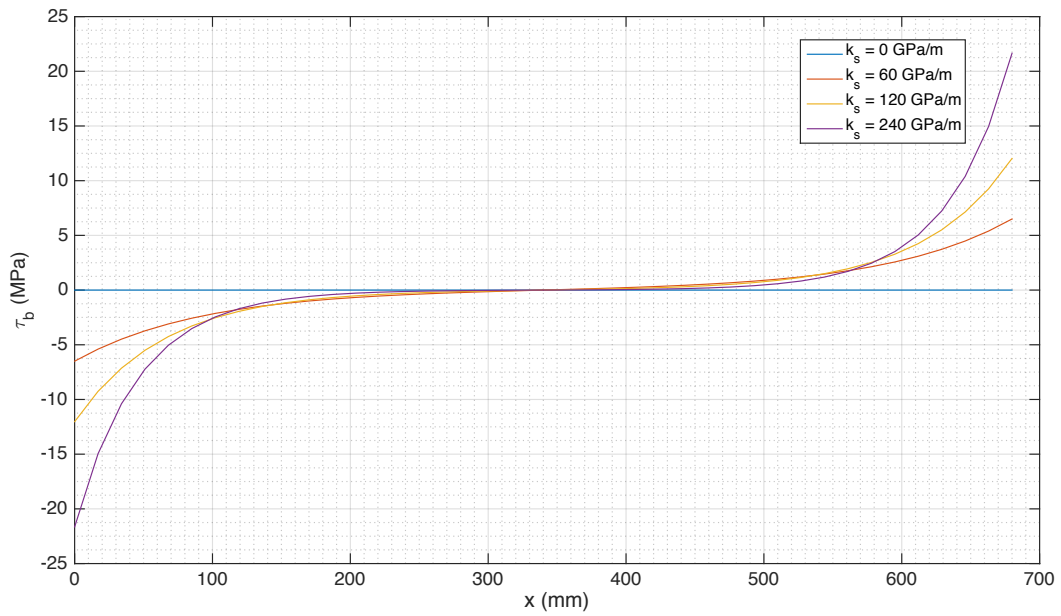


Figura 4.21: Tensão de aderência  $\tau_b$  para  $\Delta q_{imp} = 0.25$  mm

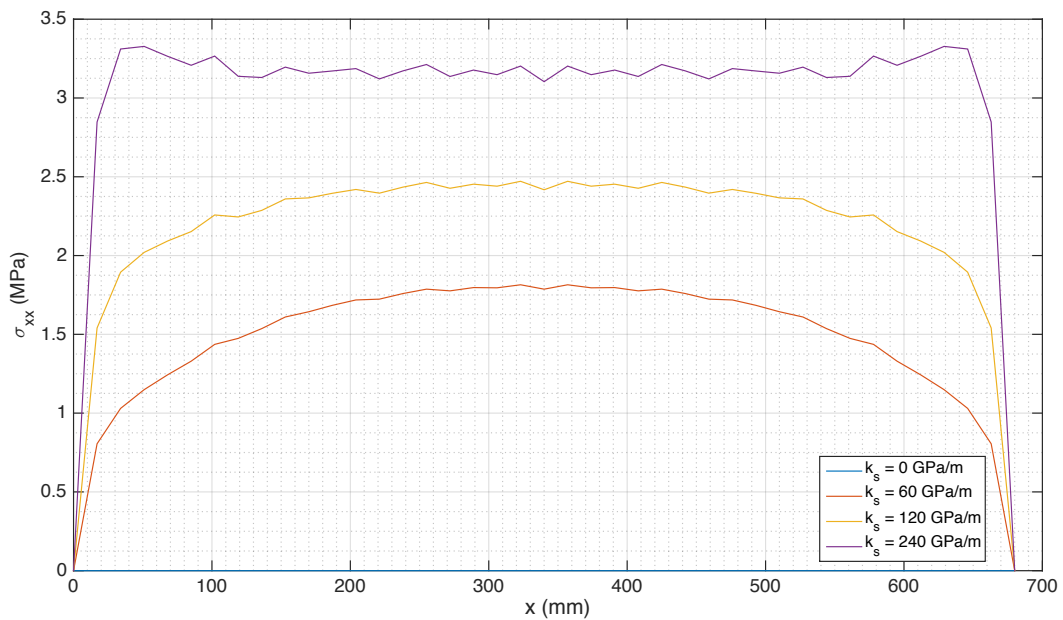


Figura 4.22: Tensão no betão  $\sigma_{xx}$  na proximidade da interface para  $\Delta q_{imp} = 0.25$  mm



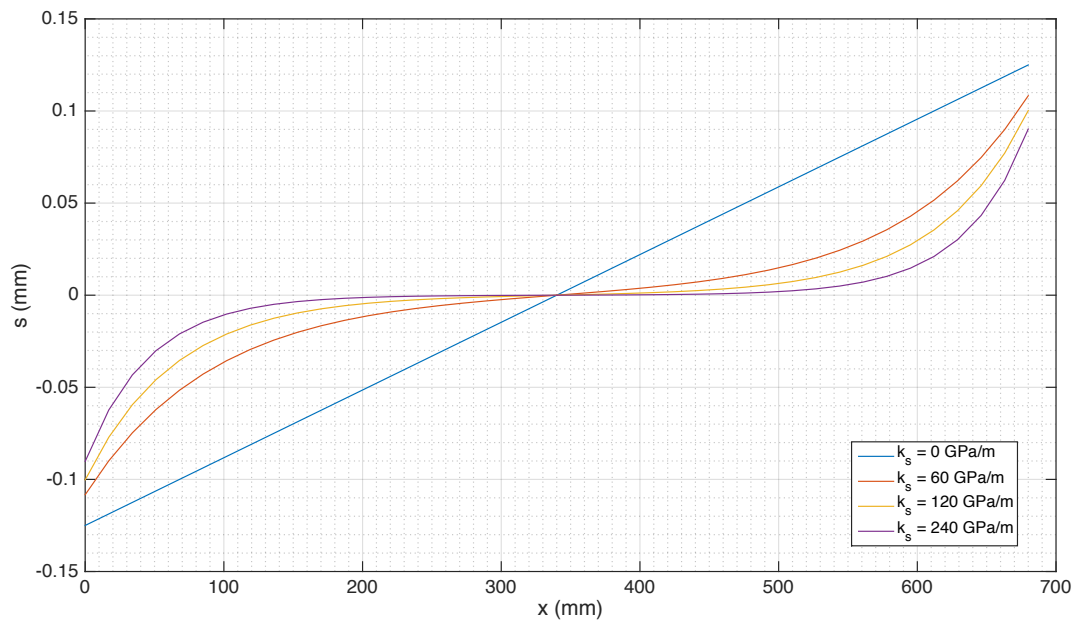


Figura 4.23: Escorregamento na interface aço-betão para  $\Delta q_{imp} = 0.25$  mm

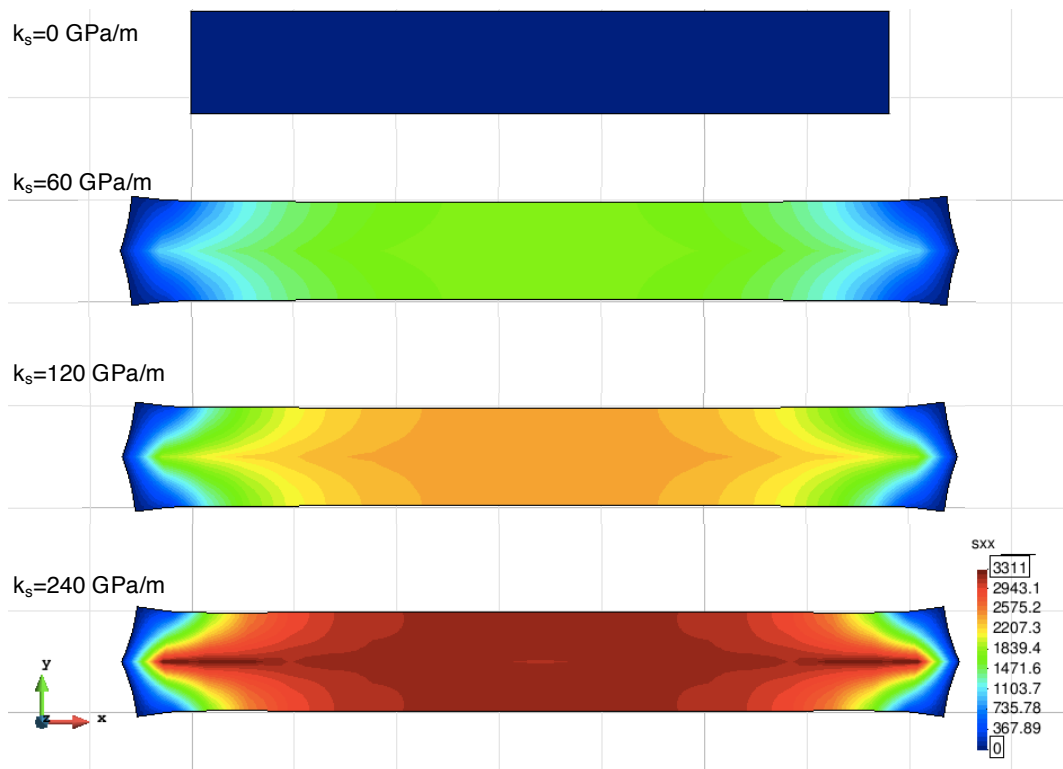


Figura 4.24: Deformada e distribuição de tensões no betão  $\sigma_{xx}$  para  $\Delta q_{imp} = 0.25$  mm



## Capítulo 5

# Conclusões e Desenvolvimentos Futuros

### 5.1 Conclusões

Na elaboração do presente trabalho pretendeu-se dar continuidade a investigações anteriores sobre as formulações não-convencionais de elementos finitos. O principal objectivo consistiu na generalização da formulação híbrida-mista de tensão à modelação do betão armado, admitindo a perda de aderência na interface aço-betão. Tendo como base a formulação híbrida mista para betão armado, constituída por elementos bidimensionais de betão e elementos lineares de aço, incluiu-se o modelo de aderência proposto por Mendes e Castro [6] através da consideração de novos campos de aproximação para o escorregamento e a tensão de aderência na interface.

Como avaliação do modelo, aplicou-se a formulação a três casos de ensaio cujo foco era o estudo da ligação aço-betão. As principais conclusões são as seguintes:

- O modelo HMT presta-se à generalização para a modelação do betão armado com perda de aderência na interface aço-betão, fornecendo resultados satisfatórios e de acordo com os obtidos em ensaios laboratoriais;
- A consideração da não-linearidade física do comportamento da interface é eficazmente implementável recorrendo a um processo de resolução incremental e iterativo (Newton-Raphson);
- A modelação da perda de aderência entre os dois materiais afecta os resultados obtidos, quando comparado com a admissão de aderência perfeita;
- O recurso ao modelo HMT com funções de aproximação dadas por polinómios de Legendre dá origem a campos de tensões coerentes com o expectável em casos reais, à excepção de alguns pontos de singularidade (em especial nas extremidades dos elementos de interface).

### 5.2 Desenvolvimentos Futuros

Como trabalhos futuros propõe-se:

- Aplicação, com carácter avaliativo, da formulação HMT em simultâneo com não-linearidade física do betão (modelo de dano) e não-linearidade física da ligação aço-betão (modelo de escorregamento);
- Extensão da formulação a estruturas bidimensionais de maior complexidade (por exemplo, inclusão de armaduras transversais);
- Extensão da formulação a estruturas tridimensionais;
- Incorporação e teste da formulação da perda de aderência para carregamentos cíclicos;
- Avaliação consistente e metódica dos conjuntos de graus de aproximação mais adequados;
- Consideração de modelos de mecânica da fractura para modelar o comportamento do material betão.
- Consideração de carregamentos dinâmicos.

# Bibliografia

- [1] J. T. Freitas, J. M. de Almeida e E. R. Pereira, “Non-conventional formulations for the finite element method”, *Computational Mechanics*, vol. 23, nº 5-6, pp. 488–501, 1999.
- [2] C. M. Silva e L. M. S. S. Castro, “Hybrid-mixed stress formulation using continuum damage models”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 22, pp. 605–617, 2006.
- [3] M. R. T. Arruda e L. M. S. S. Castro, “A new hybrid-mixed stress model for the analysis of concrete structures using damage mechanics”, *Computers and Structures*, vol. 125, pp. 23–44, 2013.
- [4] M. F. S. Luz, “Modelos híbridos-mistos de tensão para a análise de estruturas de betão armado”, tese de mestrado, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2013.
- [5] J. Mazars, “Application de la mécanique de l’endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure”, tese de doutoramento, 1984.
- [6] L. A. M. Mendes e L. M. S. S. Castro, “A new rc bond model suitable for three-dimensional cyclic analyses”, *Computers and Structures*, vol. 120, pp. 47–64, 2013.
- [7] L. Mendes e L. Castro, “Pyhm - python-based hybrid-mixed finite element code”, Relatório ICIST, 2016.
- [8] MATLAB, *MATLAB Release 2015a*. Natick, Massachusetts, United States: The MathWorks, Inc., 2015.
- [9] GID, “Gid - the personal pre and postprocessor”, CIMNE, Barcelona, version 12.1.11d, 2016.
- [10] E. R. Arantes e Oliveira, *Elementos da teoria da elasticidade*. Lisboa: IST Press, 1999.
- [11] O. Pereira, “Um modelo de elementos finitos de equilíbrio para elasticidade tridimensional”, tese de mestrado, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 1993.
- [12] A. M. Neville, *Properties of concrete*, 5th. Pearson, 2011.
- [13] J. Lemaitre, *A course on damage mechanics*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1992.
- [14] J. Lemaitre e R. Desmorat, *Engineering damage mechanics: Ductile, creep, fatigue and brittle failures*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
- [15] C. S. R. Garrido, “Modelos híbridos-mistos de tensão para a análise fisicamente não-linear de estruturas tridimensionais de betão”, tese de mestrado, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2009.
- [16] G. Pijaudier-Cabot e J. Mazars, *Lemaitre Handbook of Materials Behavior Models*, J. Lemaitre, ed. Academic Press, 2001, cap. Damage models for concrete, pp. 500–512.
- [17] 2016. endereço: [https://en.wikipedia.org/wiki/Macaulay\\_brackets](https://en.wikipedia.org/wiki/Macaulay_brackets).
- [18] M. A. Perego, “Danneggiamento dei materiali lapidei : Leggi costitutive, analisi per elementi finiti ed applicazioni”, tese de doutoramento, Politecnico de Milano, Milan, 1990.
- [19] FIB, *Bond of reinforcement in concrete*, sér. State-of-art report, Bulletin 10. Lausanne, Switzerland: International Federation for Structural Concrete (FIB), 2000.

- [20] L. A. M. Mendes, “Refined three-dimensional seismic analysis of reinforced concrete structures”, tese de doutoramento, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2011.
- [21] K. Bathe, *Finite Element Procedures*, sér. Prentice-Hall International Series in. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1996, ISBN: 9780133014587.
- [22] J. A. T. Freitas, “Duality and symmetry in mixed integral methods of elastostatics”, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 28, nº 5, pp. 1161–1179, 1989.
- [23] O. C. Zienkiewicz e R. L. Taylor, *The finite element method*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.
- [24] DIANA, *DIANA-9.43 User’s Manual - Analysis Procedures*, 1ª ed., J. Manie e W. P. Kikstra, eds. The Netherlands: TNO DIANA BV, 2010.
- [25] L. M. S. S. Castro, “Wavelets e séries de walsh em elementos finitos”, tese de doutoramento, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 1996.
- [26] L. A. M. Mendes, “Modelos de elementos finitos híbridos-mistos de tensão na análise elástoplastica de estruturas laminares planas”, tese de mestrado, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2002.
- [27] C. M. Silva e L. M. S. S. Castro, “Hybrid-mixed stress model for the nonlinear analysis of concrete structures”, *Computers and Structures*, vol. 85, pp. 2381–2394, 2005.
- [28] —, “Continuum damage models with non-conventional finite element formulations”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 45, pp. 83–99, 2010.
- [29] E. M. B. R. Pereira e J. A. T. Freitas, “A mixed-hybrid finite element model based on orthogonal functions”, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 39, pp. 1295–1312, 1996.
- [30] C. S. Leal, “Modelos de elementos finitos híbridos-mistos: Aplicação a uma barragem de gravidade”, tese de mestrado, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2007.
- [31] L. M. S. S. Castro e J. A. T. Freitas, “Wavelets in hybrid-mixed stress elements”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, pp. 3977–3998, 2001.
- [32] L. A. M. Mendes e L. M. S. S. Castro, “Placa-leg – programa de aplicação de um modelo híbrido-misto de tensão à análise elástica de placas”, Instituto de Engenharia de Estruturas, Território e Construção, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Relatório ICIST DTC 07/06, 2006.
- [33] R. Eligehausen, E. P. Popov e V. V. Bertero, “Local bond stress-slip relationships of deformed bars under generalized excitations”, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, USA, Report UCB/EERC 83/23, 1983.
- [34] P. F. T. Arruda, “Análise de estabilidade de estruturas com elementos finitos híbridos-mistos de tensão”, tese de mestrado, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2009.
- [35] C. La Borderie e G. Pijaudier-Cabot, “Etude expérimentale du comportement des matériaux renforcés”, Electricité de France, Cachan, France, Rapport LMT Cachan, Contrat I70/1F 3146, 1987.
- [36] J. L. Clément, “Interface acier-béton et comportement des structures en béton armé: Caractérisation, modélisation”, tese de doutoramento, Université Paris VI, Paris, 1987.