DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Introdução à Probabilidade e Estatística

MA

2º Trimestre – 2024/2025
10/12/2024 — 12:30, IA
MAP45 #2 — 45 minutos

- Justifique convenientemente as suas respostas e escreva os resultados com casas decimais.
- Só pode sair da sala vinte e cinco minutos após o início do MAP, devendo nesse caso entregar a sua prova ou desistir da mesma. Escreva o seu número e nome completo abaixo.

Número: **Nome completo**:

1. Numa grande empreitada, as empresas A, B e C ficaram responsáveis por 20%, 30% e 50% dos trabalhos, respectivamente. Suponha que a probabilidade de ocorrerem atrasos nos trabalhos, sabendo que a empresa responsável pelos mesmos é a empresa A, é igual a 0.15. Esta probabilidade é de 0.10 e 0.05 para as empresas B e C, respectivamente.

(a) Obtenha a probabilidade de ocorrerem atrasos nos trabalhos dessa grande empreitada. **(2.1)**

- **Quadro de eventos e probabilidades**

Evento	Probabilidade
A = (seleccionar) trabalho da responsabilidade da empresa A	$P(A) = 0.2$
B = (seleccionar) trabalho da responsabilidade da empresa B	$P(B) = 0.3$
C = (seleccionar) trabalho da responsabilidade da empresa C	$P(C) = 0.5$
D = (ocorrer) atraso (*delay*) nos trabalhos da empreitada	
	$P(D \mid A) = 0.15$
	$P(D \mid B) = 0.10$
	$P(D \mid C) = 0.05$

- **Prob. pedida**

A lei da probabilidade total (LPT) permite-nos afirmar que

$$\begin{aligned} P(D) &\stackrel{LPT}{=} P(D \mid A) \times P(A) + P(D \mid B) \times P(B) + P(D \mid C) \times P(C) \\ &= 0.15 \times 0.2 + 0.10 \times 0.3 + 0.05 \times 0.5 \\ &= 0.085. \end{aligned}$$

(b) Sabendo que houve atrasos nos trabalhos da empreitada, qual é a probabilidade de esse atraso ser da responsabilidade da empresa A ou da empresa B? **(1.6)**

- **Prob. pedida**

Ao invocarmos o teorema de Bayes (TB), temos

$$\begin{aligned} P[(A \cup B) \mid D] &\stackrel{A\cap B=\emptyset}{=} P(A \mid D) + P(B \mid D) \\ &\stackrel{TB}{=} \frac{P(D \mid A) \times P(A)}{P(D)} + \frac{P(D \mid B) \times P(B)}{P(D)} \\ &\stackrel{(a)}{=} \frac{0.15 \times 0.2}{0.085} + \frac{0.10 \times 0.3}{0.085} \\ &\simeq 0.352941 + 0.352941 \\ &= 0.705882. \end{aligned}$$

[Alternativamente, $P[(A \cup B) \mid D] = P(\bar{C} \mid D) = 1 - P(C \mid D) \stackrel{TB}{=} \frac{P(D|C)\times P(C)}{P(D)} \stackrel{(a)}{=} 1 - \frac{0.05\times 0.5}{0.085} \simeq$ 0.705882.]

(c) Serão os eventos *seleccionar trabalho da responsabilidade da empresa A* e *ocorrer atraso nos trabalhos da empreitada* dois eventos independentes? **(0.8)**

- **Averiguação de independência**
  Os eventos A (*seleccionar trabalho da responsabilidade da empresa* A) e D (*ocorrer atraso nos trabalhos da empreitada*) dir-se-ão independentes se e só se $P(A\cap D) = P(A)\times P(D)$.
  Por um lado, pela lei da probabilidade composta (LPC), temos $P(A\cap D) \stackrel{LPC}{=} P(D \mid A)\times P(A) = 0.15\times 0.2 = 0.03$. Por outro lado, $P(A)\times P(D) \stackrel{(a)}{=} 0.2\times 0.085 = 0.017$. Assim sendo, $P(A\cap D) \neq P(A)\times P(D)$, pelo que A e D não são eventos independentes.
  [Alternativamente, sabemos que se A e D forem eventos independentes então $P(D \mid A) = P(D)$. Contudo, $P(D\mid A) \stackrel{(a)}{=} 0.15 \neq P(D) \stackrel{(a)}{=} 0.085$, donde se conclui que A e D não são eventos independentes.]

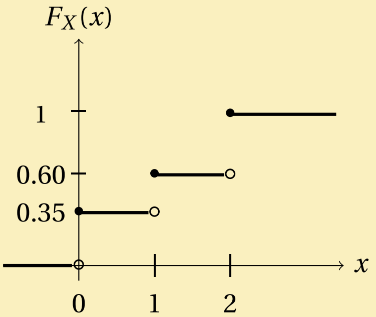
2. Num gabinete de arquitectura existem duas licenças de *SketchUp*. Seja X a variável aleatória que representa o número de licenças activas em dado momento nos computadores em utilização de tal gabinete. Suponha que a função de probabilidade de X é dada por

$$P(X=x) = \begin{cases} 0.35, & x=0 \\ 0.25, & x=1 \\ 0.40, & x=2 \\ 0, & \text{outros valores de } x. \end{cases}$$

(a) Determine a função de distribuição de X, $F_X(x) = P(X\leq x)$, $x\in\mathbb{R}$, e trace o gráfico de $F_X(x)$. **(1.6)**

- **V.a.**
  X = número de licenças activas em dado momento...
- **F.d. de X e seu gráfico**

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X\leq x) = \sum_{x_i\leq x} P(X=x_i) \\ &= \begin{cases} 0, & x<0 \\ P(X=0)=0.35, & 0\leq x<1 \\ P(X=0)+P(X=1)=0.35+0.25=0.60, & 1\leq x<2 \\ P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0.35+0.25+0.40=1, & x\geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$



(b) Obtenha a mediana de X. **(0.6)**

- **Mediana de X**
  É sabido que $me: P(X\leq me)\geq 0.5$ e $P(X\geq me)\geq 0.5$. Equivalentemente,
  $$F_X[(me)^-] \leq 0.5 \leq F_X(me).$$
  De acordo com (a) (ver f.d. de X e seu gráfico),
  $$0.35 = F_X(0) = P(X\leq 0) = F_X(1^-) \leq 0.5 \leq F_X(1) = 0.6,$$
  pelo que a mediana da v.a. X é igual a $me = 1$.
  [Alternativamente, $me: 0.5\leq F_X(me)\leq 0.5+P(X=me)$ e temos $0.5\leq F_X(1)\leq 0.5+P(X=1) = 0.5+0.25 = 0.75$, logo $me=1$.]