MODELAÇÃO E SIMULAÇÃO

MEEC – IST, TESTE N0.1, 21/04/20

Duração: 2 horas

Recepção do Teste: 19:50

Submissão de pdf do Teste: até às 22:20

PROBLEMA No.1 [6v] Análise de sistemas não lineares (dimensão 1)

Considere o modelo muito simplificado da evolução de indivíduos de uma determinada espécie (por exemplo, uma colónia de micro-organismos num ambiente confinado) sem que haja competição com outras espécies. Para isso, adoptam-se as seguinte definições.

x(t) – quantidade de indivíduos da espécie no instante *t*

b – taxa normalizada de nascimento da espécie

n- taxa normalizada de mortalidade da espécie

O modelo para a evolução de *x(t),* proposto por Verhulst, é dado por

$$\frac{dx}{dt} = (b-n)x(1-\frac{x}{K})$$

onde *K* denota é o máximo número de indivíduos que podem sobreviver de modo sustentado, dados os recursos (nutrientes) ao dispor. *Note que x(t) é sempre positivo.*

P1.1 [1 v] Calcule os pontos de equilíbrio do sistema (1) em função de *b, n,* e *K.*

P1.2 [3 v] Considere o caso em que *b=0.2*, *n=0.1*, e *K=100*. ***Note que b>n.***

Trace ***de modo aproximado*** a evolução das trajectórias de *x(t)* para os seguintes *3* valores iniciais de *x:*

$$x(0) = 20; 80; 150$$

Para isso, calcule explicitamente os sinais de $dx(t)/dt$ e $d^2x(t)/dt^2$ em função de *x*. Com base nesta informação, estabeleça uma conjectura àcerca da estabilidade local de cada um dos pontos de equilíbrio. Dê uma explicação intuitiva para o tipo de trajectórias obtidas.

P1.3. **[2 v]** Confirme a conjectura àcerca das propriedades de estabilidade dos pontos de equilíbrio feita em P1.2 por análise das linearizações do sistema em torno de cada um desses pontos.

Problema No. 2 [9v] Modelação em espaço de estados. Linearização e análise do comportamento dinâmico.

O veículo representando na Figura 1 denomina-se "*Ducted-fan Unmanned Aerial Vehicle (UAV)*". O veículo desloca-se na vertical, ao longo da coordenada *z*, sob a acção de um propulsor a hélice inserido no seu corpo central, que gera uma força ***T***. O veículo tem massa *m=1Kg*.

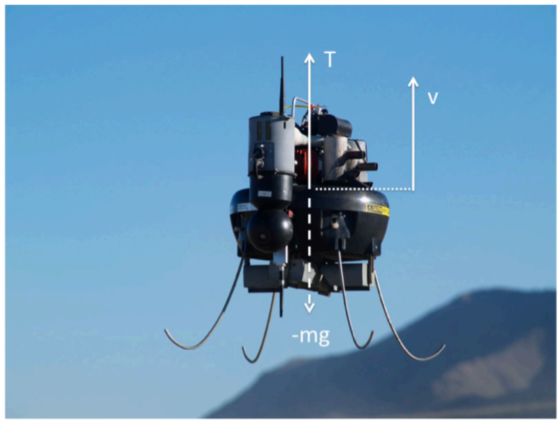

Fig. 1 "Ducted-fan Unmanned Aerial Vehicle (UAV)"

O veículo está sujeito a duas forças verticais: i) força *G=-mg* devida ao campo gravítico *(g é a aceleração da gravidade)*, e ii) força *T* gerada pelo hélice. Sejam *v* a velocidade vertical do veículo e *z* a sua posição vertical medida em relação a uma posição arbitrária de referência *z=0*.

P2.1 [2v] Admita o **modelo dinâmico** simplificado do veículo (com atrito aerodinâmico quadrático) dado por

$$\frac{dv}{dt} = -g - v\,|\,v\,| + T \qquad (1)$$

juntamente com o modelo **cinemático** dada por

$$\frac{dz}{dt} = v$$

a) Escreva as equações acima indicadas utilizando a formulação em espaço de estados, isto é, sob a forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u);\ \ x \in R^2, u \in R \qquad (2)$$

com

$$x = [x_1, x_2]^T = [z, v]^T;\ \ u = T$$

e *f(x, u)* a determinar.

b) Calcule os valores correspondentes de equilíbrio x_0 e u_0. *Nota*: existe um número infinito de valores de equilíbrio para a variável z (o veículo pode ficar em equilíbrio a qualquer altitude, com velocidade nula, sempre com o mesmo valor de $T=T_0$). No entanto, como estamos interessados em estudar o sistema em torno do valor $z=0$, consideramos simplesmente o caso em que $z_0=0$.

c) Linearize o sistema total descrito por (2) em torno do ponto de equilíbrio determinado por x_0 e u_0 e mostre que o sistema linearizado se pode escrever na forma

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = u \tag{3}$$

onde, **com abuso óbvio de notação**, x_1, x_2 *e* u correspondem agora a pequenos desvios de z, v, e T respectivamente em torno de $z_0=0$, $v_0=0$, e $T_0=g$.

P2.2 [2v] Pretende-se regular o movimento do veículo aéreo de modo a conduzir x_1 e x_2 assimptoticamente para 0. Mostre que este objectivo não é atingível em malha aberta, ou seja, com $u=0$ em (3). Para isso, calcule simplesmente os valores próprios do sistema (3) com $u=0$ e tire conclusões.

P2.3 [2v] A fim de ultrapassar a dificuldade enunciada em P2.2, propõe-se agora uma lei de controlo por retroacção de estado para o sistem (3) dada por

$$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2 \tag{4}$$

com $k_1=1$ e $k_2=1$. Mostre que com esta lei de retroacção a posição de equilíbrio $x_1=0$; $x_2=0$ é assimptoticamente estável. Para isso, calcule os valores próprios do sistema de controlo em malha fechada.

P2.4 [3v] Suponha que devido a um erro na implementação da lei de controlo para o sistema (3) dada pela equação (4) os valores de k_1 e k_2 foram alterados para $k_1=-1$ e $k_2=0$, ou seja, a nova lei (errada) de controlo é dada por $u=x_1$. Mostre que o novo sistema em malha fechada é instável. Para confirmar este resultado trace de modo aproximado um conjunto representativo de trajectórias do sistema no plano de fase (x_1, x_2). *Procedimento a adoptar*: i) calcule os valores e vectores próprios do sistema, ii) faça uma mudança de coordenadas nas quais a dinâmica do sistema fique em forma diagonal, iii) trace trajectórias representativas no novo espaço de fases, iv) "transfira" as trajectórias calculadas para o espaço de fase original.

PROBLEMA No.3 [5v] Análise de sistemas não lineares (dimensão 2)

Atenção: deve resolver somente o subproblema (A ou B) que lhe foi atribuido.

Subproblema No. 3A

Considere o sistema não linear de duas dimensões que consiste na "justaposição" de 3 subsistemas descritos pelas equações

$$i)\, \frac{dx_1}{dt} = +1, \frac{dx_2}{dt} = 0 \quad quando \quad x_1 < -1$$
$$ii)\, \frac{dx_1}{dt} = -1, \frac{dx_2}{dt} = +1 \quad quando \quad x_1 > +1$$
$$iii)\, \frac{dx_1}{dt} = -x_1, \frac{dx_2}{dt} = -x_2 \quad quando \quad -1 \leq x_1 \leq 1$$

3A.1 [1v] Mostre que o sistema não linear "total" tem um único ponto de equilíbrio dado por x_1=x_2=*0.*

3A.2 [3v] Trace de modo aproximado a evolução das trajectórias do sistema total para as seguintes 8 condições iniciais:

$$[x_1(0), x_2(0)] = [-2, 1]; [-2, -1]; [-2, 0]; [2, 1]; [2, -1]; [2, 0]; [0, 1]; [0, -1]$$

Sugestão: determine, para cada um dos 3 subsistemas acima indicados, o comportamento aproximado das suas trajectórias, utilizando o método das isóclinas. Em seguida, determine trajectórias do sistema total que se obtêm para cada uma das condições iniciais referidas, fazendo a "concatenação" apropriada das sub-trajectórias referentes a cada um dos 3 subsistemas.

3A.3 [1v] Diga, justificadamente, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "o ponto de equilíbrio dado por x_1=x_2=0 é globalmente assimptoticamente estável".

Subproblema No. 3 B

Considere o sistema não linear de duas dimensões que consiste na "justaposição" de 3 subsistemas descritos pelas equações

$$i)\, \frac{dx_1}{dt} = -1, \frac{dx_2}{dt} = +1 \quad quando \quad x_1 < -1$$
$$ii)\, \frac{dx_1}{dt} = +1, \frac{dx_2}{dt} = -1 \quad quando \quad x_1 > +1$$
$$iii)\, \frac{dx_1}{dt} = +1, \frac{dx_2}{dt} = 0 \quad quando \quad -1 \leq x_1 \leq 1$$

3B.1 [1v] Mostre que o sistema não linear "total" tem um único ponto de equilíbrio dado por x_1=x_2=*0.*

3B.2 [3v] Trace de modo aproximado a evolução das trajectórias do sistema total para as seguintes 8 condições iniciais:

$$[x_1(0), x_2(0)] = [-2, 1]; [-2, -1]; [-2, 0]; [2, 1]; [2, -1]; [2, 0]; [-0.5, 0]; [+0.5, 0]$$

Sugestão: determine, para cada um dos 3 subsistemas acima indicados, o comportamento aproximado das suas trajectórias, utilizando o método das isóclinas. Em seguida, determine trajectórias do sistema total que se obtêm para cada uma das condições iniciais referidas, fazendo a "concatenação" apropriada das sub-trajectórias referentes a cada um dos 3 subsistemas.

3B.3 [1v] Diga, justificadamente, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "o ponto de equilíbrio dado por $x_1=x_2=0$ é globalmente assimptoticamente estável".