Probabilidades e Estatística

— TODOS OS CURSOS —

1º semestre – 2019/2020
29/01/2020 – **11:30**

Duração: 90 minutos **1º Teste C**

Justifique convenientemente todas as respostas

Grupo I	10 valores

1. Considere que uma empresa produz máquinas de corte a laser. Sabe-se que: 3% das máquinas produzidas possuem defeitos na cabeça de processamento; 5% das máquinas possuem defeitos na fonte de laser; 93% não possuem qualquer defeito.

(a) Admita que selecionou, ao acaso e de modo independente, quatro dessas máquinas. Obtenha a probabilidade de a primeira máquina inspecionada possuir algum defeito, a segunda máquina inspecionada não apresentar defeitos, a terceira possuir defeitos na cabeça de processamento e a quarta possuir defeitos na fonte de laser. (2.5)

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	**Probabilidade**
A = máquina possui defeitos na cabeça de processamento	$P(A) = 0.03$
B = máquina possui defeitos na fonte de laser	$P(B) = 0.05$
$\bar{A} \cap \bar{B}$ = {máquina não possui qualquer defeito	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.93$

- **Evento**
D = 1a. máquina inspecionada possuir algum defeito, a 2a. máquina inspecionada não apresentar defeitos, 3a. possuir defeitos na cabeça de processamento e 4a. possuir defeitos na fonte de laser

- **Prob. pedida**
Uma vez que a selecção foi feita ao acaso e de modo independente, temos

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cup B) \times P(\bar{A} \cap \bar{B}) \times P(A) \times P(B) \\ &= [1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})] \times P(\bar{A} \cap \bar{B}) \times P(A) \times P(B) \\ &= (1 - 0.93) \times 0.93 \times 0.03 \times 0.05 \\ &= 0.00009765. \end{aligned}$$

(b) Para efeitos de controlo de qualidade, um inspetor da empresa analisa as máquinas. A probabilidade de ele classificar uma máquina como defeituosa é igual a: 0.07, caso a máquina não possua defeitos; 0.91, caso a máquina possua algum defeito. Determine a probabilidade de uma máquina, selecionada ao acaso, não possuir defeitos sabendo que o inspetor a classificou como defeituosa. (2.5)

- **Evento auxiliar**
E = {máquina ser classificada como defeituosa pelo inspector}.

- **Prob. pedida**
É sabido que

$$\begin{aligned} P[E \mid (\bar{A} \cap \bar{B})] &= 0.07 \\ P[E \mid (A \cup B)] &= 0.91. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Bayes segue-se

$$\begin{aligned} P[(\bar{A} \cap \bar{B}) \mid E] &= \frac{P[E \mid (\bar{A} \cap \bar{B})] \times P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P[E \mid (\bar{A} \cap \bar{B})] \times P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P[E \mid (A \cup B)] \times P(A \cup B)} \\ &= \frac{0.07 \times 0.93}{0.07 \times 0.93 + 0.91 \times 0.07} \\ &= \frac{0.93}{0.93 + 0.91} \\ &\simeq 0.505435. \end{aligned}$$

2. Um carregamento é constituído por 16 lotes dos quais 25% possuem produtos em mau estado. Seis dos lotes são selecionados, ao acaso e sem reposição, e de seguida inspecionados.

(a) Identifique a distribuição da variável aleatória X que representa o número de lotes com produtos em mau estado entre os seis lotes inspecionados. Determine $E(X)$ e $E(X^2)$. (3.5)

- **V.a. de interesse**
  X = número de lotes com produtos em mau estado em 6 lotes selecionados, ao acaso e sem reposição, de entre os 16 existentes dos quais 25% possuem produtos em mau estado

- **Distribuição de X**
  $X \sim$ hipergeométrica(N, M, n), com $N = 16$, $M = 4$, $n = 6$.

- **F.p. de X**

$$
\begin{aligned}
P(X=x) &= \begin{cases} \dfrac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & x = \max\{0, n-(N-M)\}, \ldots, \min\{n, M\} \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{\binom{4}{x}\binom{16-4}{6-x}}{\binom{16}{6}}, & x = 0,1,2,3,4 \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}
\end{aligned}
$$

- **Valor esperado de X**

$$
\begin{aligned}
E(X) &\stackrel{form.}{=} n\frac{M}{N} \\
&= 6 \times \frac{4}{16} \\
&= 1.5
\end{aligned}
$$

- **Variância de X**

$$
\begin{aligned}
V(X) &\stackrel{form.}{=} n\frac{M}{N}\,\frac{N-M}{N}\,\frac{N-n}{N-1} \\
&= 6 \times \frac{4}{16} \times \frac{16-4}{16} \times \frac{16-6}{16-1} \\
&= \frac{24}{16} \times \frac{12}{16} \times \frac{10}{15} \\
&= 0.75
\end{aligned}
$$

- **2o. momento de X**
  Uma vez que $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$, temos

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= V(X) + E^2(X) \\
&= 0.75 + 1.5^2 \\
&= 3.
\end{aligned}
$$

(b) Obtenha $P(X \geq 2)$. (1.5)

- **Prob. pedida**

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) \\
&= 1 - [P(X=0) + P(X=1)] \\
&= 1 - \frac{\binom{4}{0}\binom{16-4}{6-0}}{\binom{16}{6}} - \frac{\binom{4}{1}\binom{16-4}{6-1}}{\binom{16}{6}} \\
&= 1 - \frac{\binom{12}{6}}{\binom{16}{6}} - \frac{\binom{4}{1}\binom{12}{5}}{\binom{16}{6}} \\
&= 1 - \frac{\frac{12!}{6!6!}}{\frac{16!}{6!10!}} - \frac{4 \times \frac{12!}{5!7!}}{\frac{16!}{6!10!}} \\
&= 1 - \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{16 \times 15 \times 14 \times 13} - 4 \times \frac{10 \times 9 \times 8 \times 6}{16 \times 15 \times 14 \times 13}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - \frac{5\,040}{43\,680} - \frac{17\,280}{43\,680} \qquad [\equiv 1 - \frac{924}{8008} - \frac{4 \times 792}{8008}] \\
&= 1 - \frac{22\,320}{43\,680} \\
&= \frac{89}{182} \\
&\simeq 0.489011.
\end{aligned}
$$

Grupo II	10 valores

1. Admita que o comprimento (em mm) dos parafusos de secção circular fabricados por uma empresa é uma variável aleatória com função de distribuição

$$
F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3(4-3x) & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}
$$

Os parafusos são analisados e os que apresentam comprimento inferior a 0.20mm ou superior a 0.80mm são rejeitados por serem demasiado pequenos ou demasiado grandes, respetivamente.

(a) Obtenha a função de densidade de probabilidade de X e calcule a probabilidade de um parafuso, selecionado ao acaso, ser rejeitado. (2.0)

- **V.a.**
  X = comprimento do parafuso (em mm)
- **F.d. de** X

$$
F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3(4-3x) & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}
$$

- **F.d.p. de** X

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{dF_X(x)}{dx} \\
&= \begin{cases} \frac{d[x^3(4-3x)]}{dx} = \frac{d(4x^3-3x^4)}{dx} = 12x^2 - 12x^3 = 12x^2(1-x) & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}
\end{aligned}
$$

- **Prob. pedida**

$$
\begin{aligned}
P(X < 0.20 \text{ ou } X > 0.80) &= 1 - P(0.20 \leq X \leq 0.80) \\
&= 1 - [P(X \leq 0.80) - P(X \leq 0.20)] \\
&= 1 - [F_X(0.80) - F_X(0.20)] \\
&= 1 - [0.80^3 \times (4 - 3 \times 0.80) - 0.20^3 \times (4 - 3 \times 0.20)] \\
&= 1 - (0.8192 - 0.0272) \\
&= 0.208.
\end{aligned}
$$

(b) Considere que a variável aleatória Y representa o número de parafusos demasiado pequenos, numa amostra de 200 parafusos escolhidos ao acaso com reposição. Determine $P(3 < Y \leq 7)$, recorrendo à aproximação normal da distribuição binomial (sem correcção de continuidade). (3.0)

- **V.a.**
  Y = no. de parafusos demasiado pequenos numa amostra de n parafusos
- **Distribuição de** Y
  $Y \sim \text{binomial}(n, p)$, onde $n = 200$, $p = F_X(0.20) = 0.20^3 \times (4 - 3 \times 0.20) \overset{(a)}{=} 0.0272.$

$Y = \sum_{i=1}^{200} Y_i$, onde
$Y_i \overset{i.i.d.}{\sim}$ Bernoulli$(p = 0.0272)$, $i = 1, \ldots, n$

- **Valor esperado e variância de Y**
  $E(Y) \overset{form.}{=} np = 200 \times 0.0272 = 5.44$
  $V(Y) \overset{form.}{=} np(1-p) = 200 \times 0.0272 \times (1 - 0.0272) = 5.29203$

- **Distribuição aproximada de Y**
  De acordo com o teorema do limite central (TLC) podemos escrever

$$\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} = \frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}} \overset{a}{\sim} \text{normal}(0,1).$$

  [Alternativamente, $Y \overset{a}{\sim} \text{normal}(np, np(1-p))$.]

- **Valor aproximado da prob. pedida**

$$\begin{aligned}
P(3 < Y \leq 7) &= P\left[\frac{3 - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \leq \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \leq \frac{7 - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}}\right] \\
&= P\left[\frac{3 - 5.44}{\sqrt{5.29203}} \leq \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \leq \frac{7 - 5.44}{\sqrt{5.29203}}\right] \\
&= P\left[-1.06 \leq \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \leq 0.68\right] \\
&\overset{TLC}{\simeq} \Phi(0.68) - \Phi(-1.06) \\
&= \Phi(0.68) - [1 - \Phi(1.06)] \\
&= 0.7517 - (1 - 0.8554) \\
&= 0.6071.
\end{aligned}$$

2. Considere o par aleatório (X, Y) com função de probabilidade conjunta dada na tabela seguinte.

X \ Y	0	1	2	3
0	$\frac{4}{84}$	$\frac{18}{84}$	$\frac{12}{84}$	$\frac{1}{84}$
1	$\frac{12}{84}$	$\frac{24}{84}$	$\frac{6}{84}$	0
2	$\frac{4}{84}$	$\frac{3}{84}$	0	0

(a) Obtenha $P(X \geq 1 \mid Y = 1)$. (1.5)

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned}
P(X \geq 1 \mid Y = 1) &= \frac{P(X \geq 1,\, Y = 1)}{P(Y = 1)} \\
&= \frac{P(X = 1,\, Y = 1) + P(X = 2,\, Y = 1)}{\sum_{x=0}^{2} P(X = x,\, Y = 1)} \\
&= \frac{\frac{24}{84} + \frac{3}{84}}{\frac{18}{84} + \frac{24}{84} + \frac{3}{84}} \\
&= \frac{27}{45} \\
&= \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

(b) Calcule a correlação entre X e Y e comente o resultado obtido. (3.5)

- **Correlação pedida**

$$corr(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X) \times E(Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}.$$

Logo são necessários alguns cálculos auxiliares que envolverão as f.p. conjunta de (X, Y) e marginais de X e Y.

X	Y				$P(X=x)$
	0	1	2	3	
0	$\frac{4}{84}$	$\frac{18}{84}$	$\frac{12}{84}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{35}{84}$
1	$\frac{12}{84}$	$\frac{24}{84}$	$\frac{6}{84}$	0	$\frac{42}{84}$
2	$\frac{4}{84}$	$\frac{3}{84}$	0	0	$\frac{7}{84}$
$P(Y=y)$	$\frac{20}{84}$	$\frac{45}{84}$	$\frac{18}{84}$	$\frac{1}{84}$	1

- **Valor esperado e variância de X**

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=0}^{2} x \times P(X=x) \\
&= 1 \times \frac{42}{84} + 2 \times \frac{7}{84} \\
&= \frac{56}{84} \\
&= \frac{2}{3} \\
V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\
&= \sum_{x=0}^{2} x^2 \, P(X=x) - E^2(X) \\
&= \left(1^2 \times \frac{42}{84} + 2^2 \times \frac{7}{84}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\
&= \frac{70}{84} - \frac{4}{9} \\
&= \frac{5}{6} - \frac{4}{9} \\
&= \frac{7}{18}
\end{aligned}$$

- **Valor esperado e variância de Y**

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{y=0}^{3} y \times P(Y=y) \\
&= 1 \times \frac{45}{84} + 2 \times \frac{18}{84} + 3 \times \frac{1}{84} \\
&= \frac{84}{84} \\
&= 1 \\
V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\
&= \sum_{y=0}^{3} y^2 \, P(Y=y) - E^2(Y) \\
&= \left(1 \times \frac{45}{84} + 2^2 \times \frac{18}{84} + 3^2 \times \frac{1}{84}\right) - 1^2 \\
&= \frac{126}{84} - 1 \\
&= \frac{42}{84} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- **Valor esperado de XY**

$$E(XY) = \sum_{x=0}^{2} \sum_{y=0}^{3} xy \times P(X=x, Y=y)$$

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= 1\times 1\times \frac{24}{84} + 1\times 2\times \frac{6}{84} + 2\times 1\times \frac{3}{84}\\
&= \frac{42}{84}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

- **Covariância entre X e Y**

$$
\begin{aligned}
cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)\times E(Y)\\
&= \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\times 1\\
&= -\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

- **Correlação pedida** (cont.)

$$
\begin{aligned}
corr(X,Y) &= \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}\\
&= \frac{-\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{7}{18}\times\frac{1}{2}}}\\
&= -\frac{1}{\sqrt{7}}\\
&\simeq -0.377964
\end{aligned}
$$

- **Comentários**
  - É sabido que: caso X e Y sejam v.a. independentes, então $corr(X,Y) = 0$. Uma vez que $corr(X,Y) \neq 0$, concluímos que X e Y são v.a. dependentes.
  - Dado que $corr(X,Y) < 0$ podemos adiantar que X e Y tenderão a variar em sentidos opostos relativamente aos respectivos valores esperados.
  - Como $|corr(X,Y)| \simeq 0.38$ não está próximo de 1, as v.a. estão fracamente correlacionadas.