


# Elementos de Mecânica Orbital

*Para a cadeira de Dinâmica de Satélites*

PAULO J. S. GIL

Instituto Superior Técnico  
 2015, vs. 1.1.6 (2020-01-11)



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Mecânica de partículas</b>	<b>1</b>
1.1	Movimento e referenciais: cinemática . . . . .	1
1.1.1	O que é o movimento . . . . .	1
1.1.2	Velocidade e aceleração . . . . .	1
1.2	Cinemática em coordenadas curvilíneas . . . . .	3
1.2.1	Velocidade e aceleração em coordenadas polares . . . . .	3
1.2.2	Velocidade e aceleração em coordenadas curvilíneas . . . . .	6
1.2.3	Componentes Normal e Tangencial . . . . .	8
1.3	Referenciais relativos . . . . .	8
1.3.1	Referenciais e variação com o tempo . . . . .	8
1.3.2	Vectores dependentes do tempo em referenciais diferentes . . . . .	8
1.3.3	Translação Relativa de Referenciais . . . . .	10
1.3.4	Referenciais em Rotação . . . . .	12
1.3.5	Variação temporal em dois referenciais — caso geral . . . . .	13
1.3.6	Velocidade e Aceleração Relativas . . . . .	16
1.3.7	Significado Físico dos Termos de Aceleração . . . . .	17
1.3.8	Exemplo: referencial em rotação síncrona . . . . .	18
1.4	Dinâmica de uma partícula . . . . .	19
1.4.1	Leis de Newton do Movimento . . . . .	19
1.4.2	Lei da Gravitação Universal . . . . .	20
1.4.3	Força, impulso e quantidade de movimento . . . . .	21
1.4.4	Trabalho e Energia . . . . .	21
1.4.4.1	Trabalho realizado e energia cinética . . . . .	21
1.4.4.2	Forças conservativas e energia potencial . . . . .	21
1.4.4.3	Conservação de Energia . . . . .	22
1.4.4.4	Exemplo de força conservativa: força gravítica . . . . .	23
1.4.5	Momento angular e momento de forças . . . . .	23
1.5	Sistemas de Partículas . . . . .	25
1.5.1	Forças internas e externas . . . . .	25
1.5.2	Centro de Massa e Momento Angular . . . . .	26
1.6	O problema dos $n$ corpos . . . . .	29
1.6.1	O problema dos $n$ corpos gravítico . . . . .	29
1.6.2	Movimento do centro de massa . . . . .	30

1.6.3	Momento Angular . . . . .	31
1.6.4	Energia . . . . .	32
1.6.5	Integrais do Movimento . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Órbitas Keplerianas</b>	<b>35</b>
2.1	Força central . . . . .	35
2.1.1	Movimentos celestes e força central . . . . .	35
2.1.2	Momento angular e velocidade areolar . . . . .	36
2.1.3	Segunda Lei de Kepler . . . . .	37
2.1.4	Equações do movimento em coordenadas polares . . . . .	38
2.1.5	Força central conservativa e conservação de energia . . . . .	39
2.1.6	Potencial efectivo . . . . .	40
2.1.7	Solução formal geral do Problema de Força Central . . . . .	40
	Integração em função do Tempo. . . . .	40
	Trajectória. . . . .	41
	Exemplo: caso de força proporcional a uma Potência de $r$ . . . . .	41
2.1.8	Força central gravítica . . . . .	41
2.1.9	Potencial gravítico e energia . . . . .	42
2.1.10	Solução para força central gravítica . . . . .	42
2.1.11	Determinação da constante de integração $C$ . . . . .	44
2.1.12	Solução das Órbitas Keplerianas . . . . .	45
2.2	O problema dos 2 corpos . . . . .	46
2.2.1	Introdução . . . . .	46
2.2.2	Mudança de Coordenadas . . . . .	47
2.2.3	Redução ao problema de força central . . . . .	48
2.2.4	Trajectórias no referencial do centro de massa $C$ . . . . .	49
2.3	Órbitas Keplerianas . . . . .	51
2.3.1	Geometria das Secções Cónicas . . . . .	51
2.3.2	Cónicas construídas utilizando a directriz . . . . .	52
2.3.3	Elipses . . . . .	53
2.3.4	Parábolas . . . . .	55
2.3.5	Hipérbole . . . . .	56
2.3.6	Órbitas de astros . . . . .	57
	2.3.6.1 Excentricidade e energia . . . . .	57
	2.3.6.2 Semi-eixo maior e energia . . . . .	58
	2.3.6.3 Equação <i>vis-viva</i> . . . . .	60
2.3.7	Leis de Kepler revisitadas . . . . .	60
	Leis de Kepler . . . . .	60
	Demonstração da 3 <sup>a</sup> Lei de Kepler . . . . .	61
2.4	A Equação de Kepler . . . . .	61
2.4.1	Anomalias verdadeira, excêntrica e média . . . . .	61
2.4.2	A equação de Kepler . . . . .	63
2.4.3	Órbitas parabólicas e hiperbólicas . . . . .	65



2.4.4	Dedução directa da relação entre a anomalia verdadeira e o tempo	66
2.5	Órbita estabelecida a partir de condições iniciais	70
2.5.1	Condições iniciais	70
2.5.1.1	Momento angular e velocidade radial	71
2.5.2	Anomalia verdadeira inicial $\theta_0$	72
2.5.3	Excentricidade	73
2.5.4	Semi-eixo maior	73
2.5.5	Tipo de órbita e $\frac{r_0 v_0^2}{\mu}$	73
2.5.6	Caso de satélite lançado com $\gamma_0 = 0$	74
2.6	Estabilidade das órbitas circulares	75
2.6.1	Perturbação de uma órbita circular	76
2.6.2	Solução aproximada e análise de estabilidade	77
2.6.3	Órbitas circulares com força da gravidade	78
2.7	O vector de Laplace-Runge-Lenz	79
2.7.1	Integral do Movimento	79
2.7.1.1	Vector Excentricidade	80
<b>3</b>	<b>Órbitas no Espaço e no Tempo</b>	<b>83</b>
3.1	Elementos Clássicos de Órbita	83
3.1.1	Introdução	83
3.1.2	Referencial de inércia	83
3.1.3	Epoch	85
3.1.4	Elementos Clássicos de Órbita	85
3.2	Elementos Clássicos de Órbita versus $\vec{r}_0, \vec{v}_0$	87
3.2.1	Determinação dos Elementos Clássicos de Órbita de $\vec{r}_0, \vec{v}_0$	88
3.2.2	Referencial de inércia alinhado com a órbita	90
3.2.3	Transformação entre referenciais (resumido)	91
<b>4</b>	<b>Manobras orbitais</b>	<b>93</b>
4.1	Manobras impulsivas	93
4.2	A transferência de Hohmann	95
4.2.1	Manobra fundamental da mecânica orbital: a transferência de Hohmann	95
4.2.2	Transferência de Hohmann entre órbitas elípticas	97
4.2.3	A transferência bi-elíptica	98
4.2.4	Mudanças de plano	99
4.3	Heurísticas de desempenho	100
4.3.1	Manobras combinadas	100
4.3.2	Ganhos por gravidade	100
4.3.3	Impulsos finitos	102
4.4	Outras manobras impulsivas	102
4.4.1	<i>Rendez-vous</i>	103
4.4.2	Outras manobras	105
4.4.3	Transferências com impulso contínuo	105

<b>5</b>	<b>Perturbações Orbitais</b>	<b>109</b>
5.1	Perturbações . . . . .	109
5.2	Efeitos da atmosfera . . . . .	112
5.2.1	Atmosfera exponencial . . . . .	112
5.2.2	Tempo de vida de um satélite . . . . .	113
5.3	Achatamento da Terra . . . . .	114
5.3.1	Astros não-esféricos . . . . .	114
5.3.2	Simetria axial . . . . .	115
5.3.3	Efeitos do $J_2$ . . . . .	116
5.3.4	Variações periódicas e seculares dos elementos orbitais . . . . .	116
5.3.5	Satélites <i>Sun-synchronous</i> e Molniya . . . . .	118
	Satélites <i>Sun-synchronous</i> . . . . .	119
	Satélites Molniya. . . . .	120
<b>6</b>	<b>O problema dos três corpos</b>	<b>123</b>
6.1	Introdução e definições . . . . .	123
6.1.1	Introdução . . . . .	123
6.1.2	P3C e suas simplificações . . . . .	124
6.1.3	Problema restrito circular dos três corpos . . . . .	125
6.2	Escalas Físicas Típicas do problema . . . . .	125
	Escala de comprimento. . . . .	126
	Escala de Massa. . . . .	126
	Escala de Tempo. . . . .	126
6.3	Equações do Movimento . . . . .	126
6.4	Pontos de Lagrange . . . . .	129
6.5	Estabilidade dos Pontos de Lagrange . . . . .	131
6.5.1	Equações da estabilidade . . . . .	132
6.5.2	Estabilidade dos pontos triangulares . . . . .	134
6.5.3	Solução perturbada dos pontos triangulares . . . . .	136
6.5.4	Estabilidade dos pontos colineares . . . . .	137
6.6	Integral de Jacobi . . . . .	137
6.7	Curvas de velocidade zero e regiões inacessíveis . . . . .	138
6.7.1	Utilidade do integral de Jacobi . . . . .	138
6.7.2	Regiões inacessíveis no sistema Terra-Lua . . . . .	139
6.8	Generalizações . . . . .	142
<b>7</b>	<b>Viagens Interplanetárias</b>	<b>145</b>
7.1	Especificidades das órbitas planetárias . . . . .	145
7.1.1	Região de influência . . . . .	146
7.1.2	A aproximação das cônicas ajustadas . . . . .	147
7.2	Fase de transferência interplanetária . . . . .	149
7.2.1	Transferência de Hohmann . . . . .	149
7.2.2	Considerações sobre as fases . . . . .	150
7.2.3	Notas breves sobre casos mais realistas . . . . .	152

	Transferência mais realista: o problema de Lambert. . . . .	152
7.3	Partida . . . . .	154
7.4	Chegada . . . . .	157
7.5	Fly-by . . . . .	160
7.6	O caso da Lua . . . . .	160
<b>8</b>	<b>Dinâmica de Atitude de Satélites</b>	<b>163</b>
8.1	Equações do movimento . . . . .	163
8.1.1	Corpos rígidos . . . . .	163
8.1.2	Momento angular e momento das forças de um corpo rígido . . . . .	164
8.1.3	Momento angular de rotação e tensor de inércia . . . . .	165
8.1.4	Energia cinética de um corpo rígido . . . . .	166
8.1.5	A equação do movimento . . . . .	166
8.2	Ângulos de Euler . . . . .	167
8.2.1	Rotações Sucessivas $\psi, \nu, \sigma$ em torno dos eixos $z, x$ e $z$ . . . . .	168
8.2.2	Velocidade Angular em Função dos Ângulos de Euler . . . . .	170
8.3	Satélite axissimétrico . . . . .	172
8.3.1	Velocidade do referencial em movimento e do corpo rígido em função das frequências de Euler . . . . .	172
8.3.2	O corpo axissimétrico livre . . . . .	172
8.4	Estabilidade do satélite genérico em voo livre . . . . .	178
8.4.1	Elipsóides de Poinsot e do momento angular . . . . .	178
8.4.2	Casos limite da relação entre os elipsóides . . . . .	181
8.4.3	Estabilidade da rotação em torno de eixos principais de inércia . . . . .	182
8.4.4	Caso com variação de energia cinética . . . . .	182
8.5	Exemplos de mecanismos de controlo de atitude . . . . .	185
8.6	Gradiente de gravidade . . . . .	186
8.6.1	Satélite em forma de barra em órbita circular . . . . .	186
8.6.2	Caso de satélites pequenos . . . . .	189
	<b>Bibliografia</b>	<b>193</b>



# Capítulo 1

## Mecânica de partículas

Este capítulo pretende apenas lembrar o conhecimento necessário para prosseguir o estudo, não pretende ser um curso de mecânica Newtoniana para quem nunca a aprendeu.

### 1.1 Movimento e referenciais: cinemática

A Cinemática debruça-se sobre o movimento — mudança de posição — dos objectos sem ligar às suas causas. A preocupação com as causas do movimento — forças, e como elas fazem mover os corpos — é o objecto de estudo da Dinâmica: o que provoca o movimento e como ele evolui.

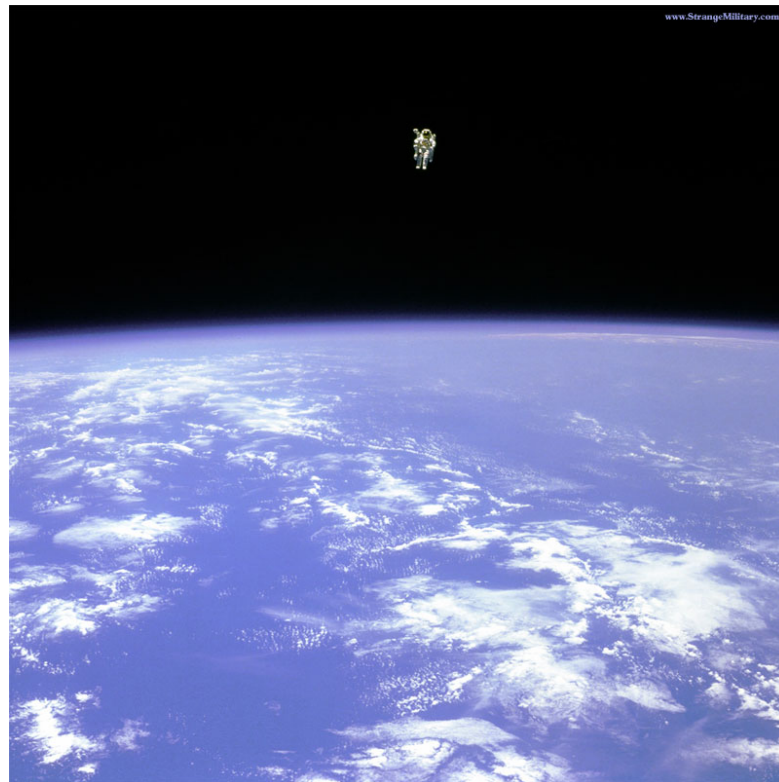
#### 1.1.1 O que é o movimento

Considere-se o astronauta da Figura 1.1. Ele está a mover-se? Podemos pensar no movimento do astronauta relativamente a muitas referências: relativamente à estação espacial de onde é feita a observação, à Terra, ao Sol, a uma galáxia distante. As possibilidades são infinitas.

O movimento é sempre relativo a algo i.e. sempre medido relativamente a um referencial que defina coordenadas. Para ter a percepção de movimento é necessário observar o que acontece relativamente a esse ponto de vista. Podemos então compreender o movimento como uma alteração de coordenadas do objecto no referencial escolhido, ou seja como *variação no tempo da posição do objecto num certo referencial*. Por definição, nunca há movimento de algo relativamente a si próprio. Um astronauta está sempre parado relativamente a si próprio. Neste contexto, as variações com o tempo estão então sempre intrinsecamente associadas a um referencial já que cada referencial tem uma visão diferente do movimento.

#### 1.1.2 Velocidade e aceleração

Considere-se uma partícula no espaço. A sua posição e movimento — velocidade, aceleração — têm que ser medidos num certo referencial. A posição da partícula num certo



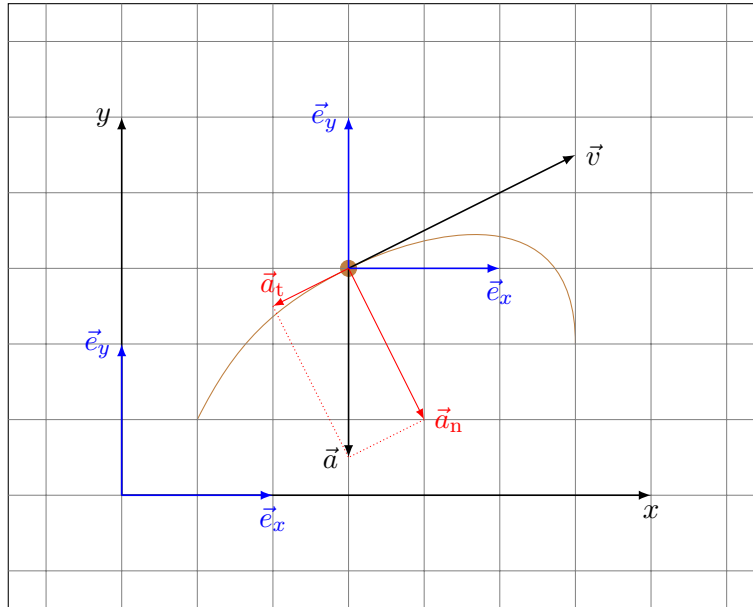
**Figura 1.1:** Movimento de um astronauta relativamente a um referencial. Fonte: NASA.

instante é identificada como as coordenadas da partícula nesse instante. A velocidade *medida* (i.e. relativa) ao referencial considerado pode ser definida como a variação com o tempo, nesse referencial, das coordenadas da partícula  $v^i = \dot{x}^i$ . A variação do *vector* velocidade é a aceleração medida nesse referencial. Sublinhou-se a expressão *medida* para indicar que o movimento e as suas propriedades são relativamente ao referencial seleccionado. O movimento será diferente relativamente a outro referencial.

Uma questão importante é que para determinar a posição da partícula bastam as suas coordenadas. Num espaço plano pode definir-se um vector posição mas este pode não fazer sentido num espaço curvo, ou em coordenadas curvilíneas num espaço plano, onde só a redução a coordenadas cartesianas oferece garantia de que pode ser definido. Esta questão surge porque na realidade há uma diferença entre o espaço (a variedade) dos acontecimentos, que utilizamos para descrever o Universo, e o espaço vectorial onde os vectores são escritos. Em cada ponto da variedade, associado com o sistema de coordenadas, é definido um espaço tangente onde os vectores associados com esse ponto são escritos. No caso de coordenadas cartesianas os espaços tangentes de todos os pontos são iguais e confundem-se, podendo-se por simplicidade ignorar a diferença entre eles. No caso de coordenadas curvilíneas isso já não acontece e é necessário distinguir os espaços tangentes de cada ponto.

Assim, a posição é o conjunto de coordenadas que especificam o ponto onde se

encontra a partícula, que podem especificar um vector posição em certos casos ou se se reduzir a coordenadas cartesianas, a velocidade é o vector do espaço tangente cujas componentes são as derivadas das coordenadas em ordem ao tempo (no referencial dado), e a aceleração a derivada do vector velocidade.



**Figura 1.2:** Trajectória com velocidade e aceleração (decomposta em componentes normal e tangencial) num referencial.

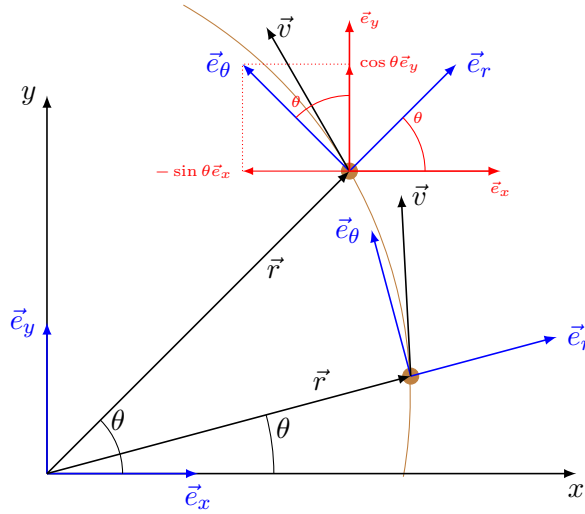
A velocidade da partícula é sempre tangente à trajectória enquanto que a aceleração se decompõe em componentes tangencial e normal, correspondentes a variar-se o módulo e direcção da velocidade. A aceleração normal pode ser pensada como uma aceleração centrípeta de um movimento em torno de um centro instantâneo de rotação  $\vec{a} = (a_t, a_n) = (\dot{v}, v^2/\rho)$ .

## 1.2 Cinemática em coordenadas curvilíneas

### 1.2.1 Velocidade e aceleração em coordenadas polares

Um caso muito relevante em mecânica orbital é a utilização de coordenadas curvilíneas, em particular das coordenadas polares  $(r, \theta)$ . Através da relação entre as coordenadas cartesianas e polares podemos deduzir as expressões da velocidade e da aceleração escritas

<sup>1</sup>Embora fosse em princípio possível relacionar referenciais com sistemas de coordenadas curvilíneas que se movem uns relativamente aos outros, esse caso não vai ser explorado aqui para não aumentar a complexidade sem necessidade. Assim, em cada referencial considerar-se-á sistemas de coordenadas curvilíneas porque há essa necessidade. Mas vai sempre considerar-se um sistema de coordenadas cartesiano quando for necessário relacionar um referencial com outro que se mova relativamente ao primeiro.



**Figura 1.3:** Trajectória de partícula parametrizada utilizando coordenadas polares. Os vectores velocidade e aceleração são escritos no referencial local.

nas últimas<sup>1</sup>.

Considere-se uma partícula numa certa trajectória. A sua posição pode ser parametrizada pelas suas coordenadas em função do tempo e pode-se utilizar coordenadas polares para tal (cf. Figura 1.3). Neste caso, os vectores velocidade e aceleração (em coordenadas polares) têm que ser escritos no espaço tangente local na base natural que está directamente relacionada com as coordenadas utilizadas. Em posições diferentes os espaços tangente são diferentes e têm uma base natural diferente que, mesmo que o vector a escrever seja igual, resultará em componentes diferentes por se estar noutro ponto do espaço. Observando o movimento ao longo do tempo, a base onde os vectores são escritos é diferente em cada instante i. e. dependem do tempo. Portanto será necessário levar em conta também a *variação* dos vectores da base, e não só das componentes, para saber como os vectores em geral evoluem.

Utilizando os espaços tangente das coordenadas cartesianas, que é igual em todo o lado, podemos calcular as taxas de variação dos vectores das bases locais polares (dos espaços tangente). Observando a Figura 1.3 e lembrando que todos os vectores envolvidos têm norma igual à unidade tem-se, em cada ponto:

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y, \quad (1.1a)$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y, \quad (1.1b)$$

onde  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  são os versores (i.e. vectores normalizados) da base polar em cada ponto do espaço (espaço tangente) e  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ , os versores cartesianos, são independentes do tempo porque são iguais em todo o plano.



Derivando (1.1) e lembrando que os vectores cartesianos não dependem do tempo, obtém-se:

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = -\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y = \vec{e}_\theta, \quad (1.2a)$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta \vec{e}_x - \sin\theta \vec{e}_y = -\vec{e}_r, \quad (1.2b)$$

e ainda

$$\frac{d\vec{e}_r}{dr} = 0 = \frac{d\vec{e}_\theta}{dr}, \quad (1.3)$$

ou seja,  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  só dependem de  $\theta$ . Utilizando a regra da derivada composta:

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \vec{e}_\theta \dot{\theta}, \quad (1.4a)$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\vec{e}_r \dot{\theta}, \quad (1.4b)$$

obtemos as derivadas dos vectores da base polar em cada ponto em função das coordenadas da partícula e suas derivadas e dos próprios vectores.

Recorrendo às coordenadas cartesianas sabemos que a posição da partícula em coordenadas polares pode ser dada pelo vector posição, que em coordenadas polares é simplesmente  $\vec{r} = r\vec{e}_r$ ; nesse caso, a velocidade pode ser calculada pela derivada do vector posição

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta, \quad (1.5)$$

de onde resulta que as componentes  $(r, \theta)$  da velocidade de uma partícula em coordenadas polares são, respectivamente:

$$v_r = \dot{r}, \quad (1.6a)$$

$$v_\theta = r\dot{\theta}. \quad (1.6b)$$

A aceleração em coordenadas polares pode obter-se derivando o vector velocidade  $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$  em coordenadas polares, lembrando que os vectores da base também dependem do tempo,

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + r\dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \\ &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta} \vec{e}_\theta + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + r\dot{\theta} (-\dot{\theta} \vec{e}_r), \end{aligned} \quad (1.7)$$

que se simplifica para

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta, \quad (1.8)$$

o que significa que as componentes da aceleração em coordenadas polares são:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad (1.9a)$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}. \quad (1.9b)$$

Note-se que  $a_r \neq \frac{dv_r}{dt}$ ,  $a_\theta \neq \frac{dv_\theta}{dt}$  porque os vectores da base dependem do tempo. No caso de movimento circular não uniforme em torno da origem com velocidade angular  $\omega$  ( $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ ) tem-se  $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow v = \omega r$ ,  $\vec{a}_n = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r \Rightarrow a_n = r\omega^2 = v^2/r$  e  $\vec{a}_t = r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow a_t = r\dot{\omega}$

### 1.2.2 Velocidade e aceleração em coordenadas curvilíneas

A dedução da § 1.2.1 pode ser realizada utilizando a abordagem da geometria diferencial<sup>2</sup>. As coordenadas polares  $(r, \theta)$  são coordenadas curvilíneas definidas pela transformação:

$$x = r \cos \theta, \quad (1.10a)$$

$$y = r \sin \theta. \quad (1.10b)$$

A matriz de transformação inversa é dada por

$$X_{i'}^i = \begin{pmatrix} \partial x / \partial r & \partial x / \partial \theta \\ \partial y / \partial r & \partial y / \partial \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

e a matriz de transformação directa, que é a inversa de  $X_{i'}^i$ , por

$$X_i^{i'} = [X_{i'}^i]^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

As componentes da velocidade da partícula na base natural  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  (componentes contravariantes) são determinadas pelas derivadas das coordenadas

$$v^i = \dot{x}^i = (\dot{r}, \dot{\theta}). \quad (1.13)$$

No resto desta secção vai-se utilizar a convenção da soma de Einstein onde se interpretam índices repetidos como estando a ser somados sobre a sua gama de variação. A métrica é dada por

$$g_{ij} = X_i^{i'} X_j^{j'} \delta_{i'j'} = \begin{pmatrix} h_r^2 & 0 \\ 0 & h_\theta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

de onde resultam os factores de escala

$$h_i = 1, r. \quad (1.15)$$

As componentes contravariantes dos vectores, que são as que obedecem às propriedades de transformação tensorial e podem ser usadas para tal, não têm as unidades correctas, nem as bases — ditas natural ou dual — são necessariamente normalizadas. Por exemplo, a segunda componente contravariante da velocidade,  $\dot{\theta}$ , não tem dimensões físicas de velocidade linear mas sim de velocidade angular. Ao mesmo tempo, o respectivo vector

<sup>2</sup>Apresenta-se aqui os cálculos sem grande explicação dos símbolos, já que foram objecto de estudo

da base natural,  $\vec{e}_\theta$ , não é adimensional. Para obter as componentes com as dimensões correctas e vectores locais normalizados tem que se passar para a denominada *base física*, que se obtém em cada ponto a partir da base natural (e as componentes físicas das contravariantes). As componentes físicas obtêm-se das contravariantes multiplicando estas pelos factores de escala,

$$v_{(i)} = h_{\underline{i}} \dot{x}^i; \quad (1.16)$$

por sua vez, o vector da base natural correspondente deve ser dividido pelo factor de escala para se obter o vector da base física. A velocidade física em coordenadas polares é então:

$$\boxed{v_{(i)} = (v_r, v_\theta) = (\dot{r}, r\dot{\theta})}. \quad (1.17)$$

A aceleração contravariante é definida como a *derivada total* para levar em conta a variação dos vectores da base local

$$\begin{aligned} a^i &= \frac{Dv^i}{dt} = \frac{dx^j}{dt} \nabla_j v^i = v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i v^j v^k \\ &= \ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i v^j v^k, \end{aligned} \quad (1.18a)$$

onde os símbolos de Christoffel  $\Gamma_{jk}^i$  se podem obter da métrica (não mostrado) e são, no caso de coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \Gamma_{\theta\theta}^\theta = \Gamma_{rr}^\theta = \Gamma_{r\theta}^r = \Gamma_{\theta r}^r = 0, \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

As componentes contravariantes polares da aceleração são então:

$$a^1 = \ddot{x}^1 + \Gamma_{\theta\theta}^r v^{\theta^2} + 0 = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad (1.20a)$$

$$a^2 = \ddot{x}^2 + \Gamma_{r\theta}^\theta v^r v^\theta + \Gamma_{\theta r}^\theta v^\theta v^r + 0 = \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta}. \quad (1.20b)$$

Tal como no caso da velocidade, as componentes físicas da aceleração obtêm-se das contravariantes multiplicando estas pelo respectivo factor de escala  $a_{(i)} = h_{\underline{i}} a^i$ :

$$a_{(1)} = a_r = 1 a^1 = 1 (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad (1.21a)$$

$$a_{(2)} = a_\theta = r a^2 = r \left( \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} \right) = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}; \quad (1.21b)$$

ou seja, as *componentes físicas* da aceleração são:

$$\boxed{(a_r, a_\theta) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2, r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}. \quad (1.22)$$

O procedimento de geometria diferencial utilizado aqui para coordenadas polares pode ser usado para qualquer sistema de coordenadas curvilíneo e, sendo sistemático, acaba por se tornar mais simples do que obter as derivadas directamente, como em § 1.2.1.

### 1.2.3 Componentes Normal e Tangencial

Seguindo as construções da Figura 1.4 e como já referido, no caso de uma trajectória arbitrária a *velocidade* é sempre tangente à trajectória,  $\vec{v} = v\vec{e}_t$ . Localmente, a trajectória pode sempre ser pensada como uma curva de raio  $\rho$  e centro na direcção normal  $\vec{e}_n$ ; a velocidade escalar  $v$  obedece a  $vdt = ds = \rho d\theta$ . A variação da base local (similar ao que aconteceu em coordenadas polares) é  $\frac{d\vec{e}_t}{d\theta} = \vec{e}_n$  e a aceleração é

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n. \quad (1.23)$$

A aceleração normal  $a_n$  só altera a direcção de  $\vec{v}$ , é centrípeta; a aceleração tangencial  $a_t$  só varia  $\|\vec{v}\|$ . Em três dimensões (3D) a trajectória pode ter *torção* e sair do *plano osculador*; nesse caso  $\vec{a}$  tem 3 componentes, a *binormal* altera a direcção do centro instantâneo de rotação.

## 1.3 Referenciais relativos

### 1.3.1 Referenciais e variação com o tempo

Um referencial<sup>3</sup> é um ponto de vista com coordenadas associadas que mapeiam o espaço e podem identificar a posição de objectos. Essa posição pode ser identificada pelo vector posição, relativamente à origem do referencial em questão. Se se considera outro referencial com uma origem diferente, o vector posição será diferente.

Se um referencial se move relativamente a outro a variação com o tempo de uma grandeza que depende das coordenadas será diferente nos dois referenciais. Por exemplo, a velocidade é a taxa de variação das coordenadas, que por sua vez dependem do referencial. As grandezas físicas dependentes do tempo são relativas ao referencial onde é observada essa variação. A velocidade será *medida*, observada, num certo referencial e tem o significado de velocidade relativa a esse referencial. Por outro lado, a velocidade é uma grandeza vectorial. Após o vector que a representa ser obtido, este pode ser *escrito* em qualquer base de vectores adequada, incluindo uma base associada a outro referencial. No entanto, a velocidade continua a ter o significado de velocidade relativa ao referencial original. Uma coisa é o significado da grandeza física, outra como essa grandeza é descrita matematicamente.

### 1.3.2 Vectores dependentes do tempo em referenciais diferentes

Considere-se dois referenciais ortonormados,  $i$  e  $e$ , com movimento relativo com vectores de base, respectivamente,  $\{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3\}$ <sup>4</sup> e  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ . Seja uma grandeza física vectorial

em disciplinas anteriores, nomeadamente *Mecânica Aplicada I* e *Mecânica Aplicada II*.

<sup>3</sup>Apenas se vai considerar transformações entre referenciais ortonormados; em cada referencial pode-se depois passar para coordenadas curvilíneas.

<sup>4</sup>A designação  $i$  para os vectores de um referencial sugere que ele será um referencial de inércia. No entanto, por enquanto não estamos preocupados com as causas do movimento, logo não é necessário que

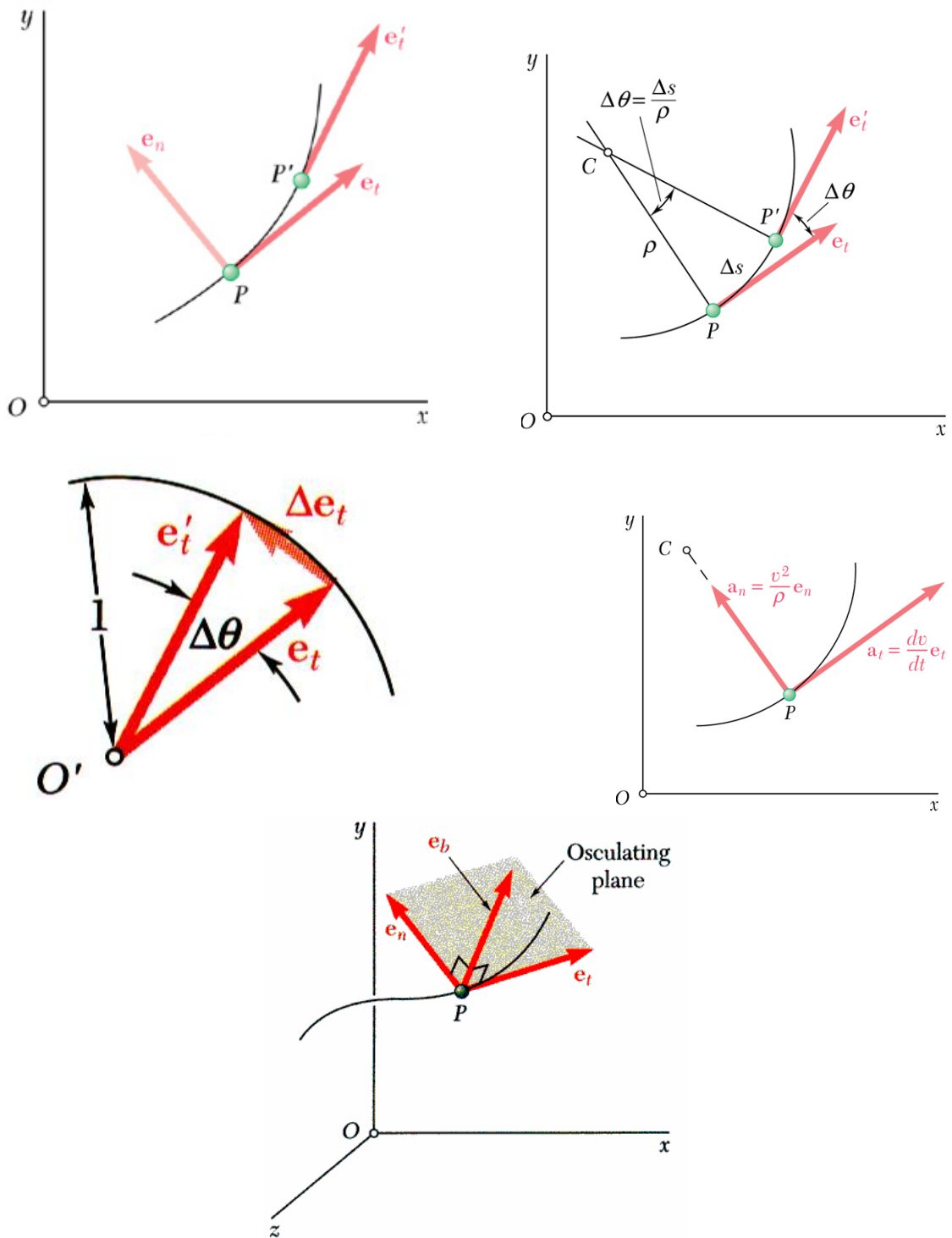


Figura 1.4: Componentes normal e tangencial da velocidade e aceleração de uma partícula [9].

(i. e. representada por um vector)  $\vec{A}$  que depende do tempo. A variação com o tempo depende do referencial onde é *observada (medida)*. Mas do ponto de vista de cada referencial, os vectores de base desse referencial<sup>5</sup> não variam com o tempo. Pode-se escrever  $\vec{A}$  utilizando tanto uma base do referencial  $\{i\}$  como um de  $\{s\}$ <sup>6</sup>,

$$\vec{A} = A_k^{(i)} \vec{i}_k = A_m^{(e)} \vec{e}_m. \quad (1.24)$$

A variação com o tempo depende do referencial utilizado. Por causa disso, temos que distinguir o ponto de vista tomado quando se deriva em ordem ao tempo. Para distinguir onde a variação com o tempo está a ser observada, usaremos um prefixo a indicar o referencial na derivada. Assim:

- $\frac{{}^i d}{dt}$  é a variação temporal observada (medida) do referencial  $\{i\}$ ,

$$\frac{{}^i d\vec{A}}{dt} = \dot{A}_k^{(i)} \vec{i}_k, \quad (1.25)$$

que faz apenas variar as componentes, já que a base de um referencial não varia relativamente ao próprio referencial.

- Similarmente,  $\frac{{}^e d}{dt}$  é a variação com o tempo medida no referencial  $\{e\}$ ,

$$\frac{{}^e d\vec{A}}{dt} = \dot{A}_m^{(e)} \vec{e}_m. \quad (1.26)$$

Se derivarmos em ordem ao tempo, do ponto de vista de um referencial, um vector escrito noutra referencial, os vectores da base em geral também vão variar,

$$\frac{{}^i d\vec{A}}{dt} = \dot{A}_m^{(e)} \vec{e}_m + A_m^{(e)} \dot{\vec{e}}_m. \quad (1.27)$$

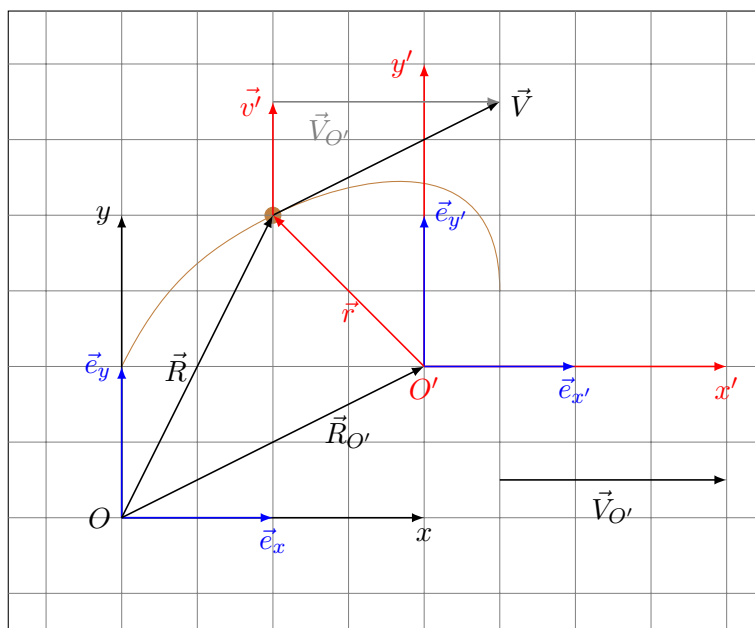
### 1.3.3 Translação Relativa de Referenciais

Considere-se dois referenciais,  $i$  e  $e$ , com origens  $O$  e  $O'$ , respectivamente (Figura 1.5). A posição da origem de  $e$  medida em  $i$  é  $\vec{R}_{O'}$ . O referencial  $e$  desloca-se relativamente a  $i$  com velocidade  $\vec{V}_{O'}$ . O movimento é de translação pura, cada ponto de um desloca-se com a mesma velocidade relativamente ao ponto correspondente do outro, o que significa que o sistema de coordenadas que se estende no espaço do referencial não muda a sua orientação relativamente ao outro. Sem perda de generalidade pode-se considerar que as coordenadas cartesianas de um estão alinhadas com as de outro (a alternativa seria que fizessem um ângulo constante). Uma vez que não há rotação e as coordenadas são

assim seja. As relações entre estes dois referenciais são puramente cinemáticas.

<sup>5</sup>Como observado antes, estamos a utilizar coordenadas cartesianas, o que significa que os vectores em cada referencial são escritos de modo igual em quaisquer coordenadas, já que o espaço tangente é igual em todos os pontos.

<sup>6</sup>Tal como anteriormente, sempre que a notação indicial for utilizada, a convenção da soma de Einstein



**Figura 1.5:** Translação de um referencial relativamente a outro.

cartesianas, os vectores das bases dos espaços tangente são todos iguais — i. e. não variam com o tempo.

A posição de qualquer ponto do espaço pode ser determinada pelo vector posição  $\vec{R}$  relativamente à origem de  $e$  ou  $\vec{r}$  relativamente à origem de  $e'$ . É imediato somar os vectores para obter  $\vec{R} = \vec{R}_{O'} + \vec{r}$ , e derivando esta expressão obtém-se a velocidade  $\vec{V}$  medida em  $i$ ,

$$\frac{{}^i d\vec{R}}{dt} \equiv \vec{V} = \frac{{}^i d\vec{R}_{O'}}{dt} + \frac{{}^i d\vec{r}}{dt}. \tag{1.28}$$

Note-se que  $\frac{{}^i d\vec{R}_{O'}}{dt} = \vec{V}_{O'}$  é a velocidade do referencial  $e'$ , medida no referencial  $i$ . Por outro lado os vectores da(s) base(s) de  $s$  não variam,  $\vec{e}'_i = \text{Cte}$ , logo a velocidade  $\vec{v}'$  medida no referencial  $s$  é simplesmente a variação das componentes

$$\frac{{}^i d\vec{r}}{dt} = \frac{{}^e d\vec{r}}{dt} = \vec{v}' \quad \Rightarrow \quad \vec{V} = \vec{V}_{O'} + \vec{v}'. \tag{1.29}$$

Como os vectores de base não variam com o tempo, não há grandes diferenças nas grandezas medidas num referencial e noutra, mesmo que façam um ângulo (constante). Nesse caso a decomposição de vectores é mais complicada mas nada se altera de significativo. Esta é a lei de transformação de velocidades de Galileu.

Para a aceleração (e outros vectores) é similar, obtendo-se

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}', \tag{1.30}$$

---

será utilizada.

onde  $\vec{a}'$  é a velocidade *medida* no referencial  $e$ . A situação altera-se significativamente se um referencial rodar relativamente ao outro, pois os vectores da base vão, nesse caso, depender do instante considerado.

### 1.3.4 Referenciais em Rotação

Consideremos agora dois referenciais no plano (problema bidimensional, mais fácil de compreender) com a mesma origem, um referencial  $\{s\}$  a rodar relativamente ao outro  $\{i\}$  com velocidade angular  $\vec{\omega}$ . O vector posição de uma partícula é o mesmo mas decompõe-se em bases diferentes em cada referencial. A velocidade medida no referencial  $\{i\}$  é

$$\{i\} : \quad \vec{V} = \frac{{}^i d\vec{r}}{dt}. \quad (1.31)$$

Por sua vez, a velocidade medida no referencial  $\{s\}$  é

$$\{s\} : \quad \vec{v}' = \frac{{}^s d\vec{r}}{dt}. \quad (1.32)$$

Seja o vector posição  $\vec{r}$  escrito no referencial  $\{s\}$  com coordenadas  $x, y$ ,

$$\{s\} : \quad \vec{r} = x\vec{s}_1 + y\vec{s}_2; \quad (1.33)$$

então, tem-se

$$\vec{V} = \frac{{}^i d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{s}_1 + \dot{y}\vec{s}_2 + x\dot{\vec{s}}_1 + y\dot{\vec{s}}_2 = \frac{{}^s d\vec{r}}{dt} + x\dot{\vec{s}}_1 + y\dot{\vec{s}}_2, \quad (1.34)$$

onde agora temos que calcular a derivada dos vectores da base de um referencial, vistos do outro.

Na Figura 1.6 está representada uma rotação infinitesimal do referencial  $\{s\}$  entre  $t$  e  $t + \Delta t$ . O referencial roda  $\Delta\theta = \omega\Delta t$ , portanto a variação dos vectores da base é:

$$\Delta\vec{s}_1 = \|\vec{s}_1\|\Delta\theta\vec{s}_2 = \Delta\theta\vec{s}_2, \quad (1.35a)$$

$$\Delta\vec{s}_2 = \|\vec{s}_2\|\Delta\theta(-\vec{s}_1) = -\Delta\theta\vec{s}_1. \quad (1.35b)$$

No limite, quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtém-se as derivadas:

$$\dot{\vec{s}}_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{s}_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{s}_2 = \dot{\theta}\vec{s}_2 = \omega\vec{s}_2, \quad (1.36a)$$

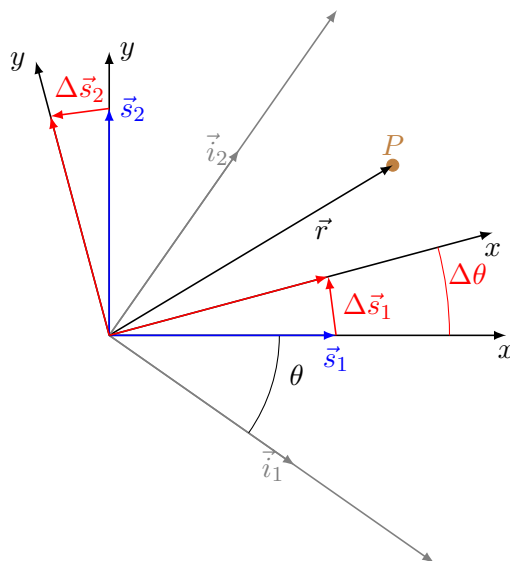
$$\dot{\vec{s}}_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{s}_2}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{s}_1 = -\dot{\theta}\vec{s}_1 = -\omega\vec{s}_1. \quad (1.36b)$$

Notando que a *velocidade angular*  $\vec{\omega} = \omega\vec{s}_3$  do referencial  $\{s\}$  medida em  $\{i\}$  tem a direcção da terceira componente, obtém-se:

$$\dot{\vec{s}}_1 = \omega\vec{s}_2 = \vec{\omega} \times \vec{s}_1, \quad (1.37a)$$

$$\dot{\vec{s}}_2 = -\omega\vec{s}_1 = \vec{\omega} \times \vec{s}_2. \quad (1.37b)$$





**Figura 1.6:** Derivada dos vetores da base de um referencial em rotação (2D).

Finalmente, voltando a (1.34), tem-se a velocidade medida em  $\{i\}$ ,

$$\vec{V} = \frac{{}^i d\vec{r}}{dt} = \frac{{}^s d\vec{r}}{dt} + x\dot{\vec{s}}_1 + y\dot{\vec{s}}_2 = \frac{{}^s d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times (x\vec{s}_1) + \vec{\omega} \times (y\vec{s}_2) = \frac{{}^s d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (1.38)$$

e função da velocidade angular do referencial e da velocidade

$$v' = \frac{{}^s d\vec{r}}{dt}, \quad (1.39)$$

medida no referencial  $\{s\}$ .

Embora acima apenas se tenha obtido o resultado para o caso bidimensional, o resultado é válido para qualquer quantidade física vectorial que dependa do tempo, quaisquer referenciais e para três dimensões, i. e.

$$\boxed{\frac{{}^i d(\cdot)}{dt} = \frac{{}^s d(\cdot)}{dt} + \vec{\omega}^{si} \times (\cdot)}, \quad (1.40)$$

onde, para se evitar ambiguidade, se explicitaram os referenciais em questão na velocidade angular:  $\vec{\omega}^{si}$  é então a velocidade angular do referencial  $\{s\}$  relativamente ao referencial  $\{i\}$ .

Uma vez obtidos os vetores, estes podem ser *escritos na base que se quiser*, desde que se possa realizar os cálculos (e. g. para somar vetores têm que estar no mesmo referencial).

### 1.3.5 Variação temporal em dois referenciais — caso geral

Vale a pena demonstrar o caso geral em três dimensões e com um vector qualquer. Para tal, torna-se mais fácil utilizar a notação indicial, já usada antes. Sejam dois referenciais

$A$  e  $B$ . Seja o vector  $\vec{v} = v^i \vec{e}_i = v^{i'} \vec{e}_{i'}$  escrito, respectivamente, em  $A$  e  $B$ . Como os vectores  $\vec{e}_i$  não variam em  $A$ , então

$$\frac{{}^A d\vec{v}}{dt} = \left( \frac{dv^i}{dt} \right) \vec{e}_i = \dot{v}^i \vec{e}_i. \quad (1.41)$$

Utilizando a matriz da transformação introduzida em (1.11) podemos transformar  $\vec{v}$  e os vectores da base:

$$v^i = X_{i'}^i v^{i'}, \quad (1.42a)$$

$$\vec{e}_i = X_i^{j'} \vec{e}_{j'}, \quad (1.42b)$$

e transformar a derivada de  $\vec{v}$  medida em  $A$ ,

$$\begin{aligned} \frac{{}^A d\vec{v}}{dt} &= \left( \frac{dv^i}{dt} \right) \vec{e}_i = \frac{d}{dt} \left( X_{i'}^i v^{i'} \right) X_i^{j'} \vec{e}_{j'} \\ &= \underbrace{\dot{X}_{i'}^i X_i^{j'}}_{\substack{\text{matriz } T \\ \text{comp. vector em } B}} v^{i'} \vec{e}_{j'} + \underbrace{X_{i'}^i X_i^{j'} (\dot{v}^{i'})}_{\dot{v}^{j'} \vec{e}_{j'} = \frac{{}^B d\vec{v}}{dt}} \vec{e}_{j'}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

onde por facilidade de notação foi definida uma matriz  $T$  no primeiro termo do lado direito da equação. O segundo termo do lado direito de (1.43) é reconhecido como sendo a velocidade medida em  $B$ .

Como os referenciais são ortonormados as transformações são ortonormadas, e simplificando-se a notação para  $R \equiv X_{i'}^i$ , tem-se:

$$R \equiv X_{i'}^i : \quad X_i^{j'} = R^{-1} = R^\top \quad \Rightarrow \quad T = R^\top \dot{R}, \quad (1.44a)$$

$$R^\top = R^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad R^\top R = R^{-1} R = 1. \quad (1.44b)$$

Diferenciando (1.44b), tem-se

$$\frac{d(R^\top R)}{dt} = \dot{R}^\top R + R^\top \dot{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{R}^\top R = -R^\top \dot{R} = -(\dot{R} R^\top)^\top; \quad (1.44c)$$

A matriz  $T$ , de componentes  $T_{ij}$ , escreve-se

$$[T_{ij}] = R^\top \dot{R} = -(\dot{R} R^\top)^\top = -[T_{ji}], \quad (1.44d)$$

ou seja,  $T$  é antissimétrica. Uma matriz antissimétrica num espaço tridimensional pode ser sempre escrita à custa de uma matriz antissimétrica com três entradas independentes. Escolhendo judiciosamente o nome das entradas independentes, podemos sem perda de generalidade escrever  $T$  na forma

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{3'} & \omega_{2'} \\ \omega_{3'} & 0 & -\omega_{1'} \\ -\omega_{2'} & \omega_{1'} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (1.43) vem então

$$\begin{aligned} X_i^{j'} \dot{X}_i^i v^i \vec{e}_{j'} &= \begin{pmatrix} \vec{e}_{1'} & \vec{e}_{2'} & \vec{e}_{3'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{3'} & \omega_{2'} \\ \omega_{3'} & 0 & -\omega_{1'} \\ -\omega_{2'} & \omega_{1'} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{1'} \\ v^{2'} \\ v^{3'} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{e}_{1'} & \vec{e}_{2'} & \vec{e}_{3'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{2'} v^{3'} - \omega_{3'} v^{2'} \\ \omega_{3'} v^{1'} - \omega_{1'} v^{3'} \\ \omega_{1'} v^{2'} - \omega_{2'} v^{1'} \end{pmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{v}, \end{aligned} \quad (1.46)$$

ou seja, (1.43) simplifica-se para

$$\boxed{\frac{{}^A d\vec{v}}{dt} = \frac{{}^B d\vec{v}}{dt} + \vec{\omega}^{BA} \times \vec{v}}, \quad (1.47)$$

relacionando as derivadas de um vector medidas em dois referenciais através da velocidade angular de um referencial ( $B$ ) relativamente a outro ( $A$ ).

Como  $\vec{v}$  é arbitrário, pode-se escrever (1.47) na forma de operador

$$\boxed{\frac{{}^A d(\ )}{dt} = \frac{{}^B d(\ )}{dt} + \vec{\omega}^{BA} \times (\ )}. \quad (1.48)$$

A forma vectorial é invariante, válida para todos os referenciais admissíveis (basta concretizar). No entanto, é apropriado lembrar que só referenciais direitos, i. e. em que os três vectores da base ordenados obedecem à regra da mão direita, são admissíveis. Isto acontece porque os resultados de produtos externos são aquilo a que se costuma denominar de vectores axiais<sup>7</sup>. Na realidade são tensores de ordem um com sinal de modo que se se mudar de referencial de um esquerdo para um direito ou vice-versa, deveria surgir um sinal. Para evitar isso e tratar estes vectores como os outros, limita-se universalmente a utilização a referenciais direitos.

Em cálculos concretos, todos os termos têm que estar no mesmo referencial mas este é qualquer um que se escolha — mas as derivadas têm que ser calculadas no referencial certo, porque não são a mesma coisa num referencial ou noutro. Utilizando os vectores da base de  $B$  podemos confirmar que a velocidade angular que aparece na expressão é a de  $B$  relativamente a  $A$ ,

$$\frac{{}^A d\vec{e}_{i'}}{dt} = \underbrace{\frac{{}^B d\vec{e}_{i'}}{dt}}_{=0} + \vec{\omega}^{BA} \times \vec{e}_{i'}. \quad (1.49)$$

<sup>7</sup>Geometricamente os vectores axiais não são representados por segmentos orientados mas sim por segmentos que rodam em torno do seu eixo. Eles ainda são elementos de um espaço vectorial — vectores — mas as suas propriedades geométricas são diferentes, bem como o modo como podem ser somados geometricamente. Eles não são invariantes quando se passa de um referencial direito para um esquerdo ou vice-versa porque essa operação inclui uma inversão, i. e. uma transformação no seu espelho. Um segmento em rotação visto ao espelho roda em sentido contrário, daí o sinal que surge nessa circunstância.

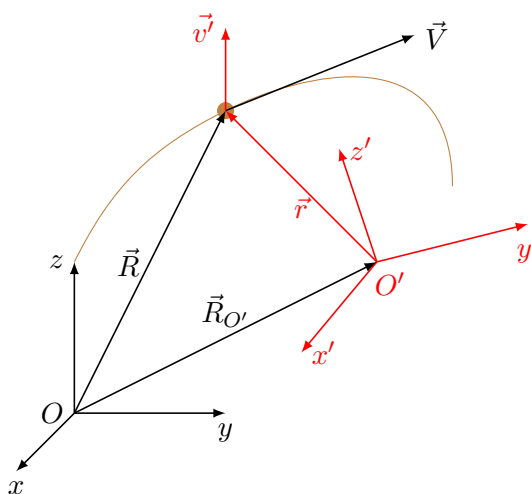


Figura 1.7: Velocidade medida em dois referenciais diferentes.

### 1.3.6 Velocidade e Aceleração Relativas

Sejam em geral as grandezas representadas por maiúsculas relativas ao referencial  $\{i\}$  e as minúsculas ou com plicas relativas a  $\{s\}$ . Considere-se o referencial  $\{s\}$  a rodar com velocidade angular  $\vec{\omega}^{si}$  relativamente ao referencial  $\{i\}$ . Observando a Figura 1.7, os vectores posição relacionam-se

$$\vec{R} = \vec{R}_{O'} + \vec{r}, \quad (1.50)$$

com  $\vec{r} \equiv \vec{r}'$  o vector posição relativo ao referencial  $\{s\}$ .

A velocidade no caso geral obtém-se derivando (1.50) e utilizando a transformação da derivada temporal

$$\frac{{}^i d}{dt} \vec{R} \equiv \vec{V} = \frac{{}^i d}{dt} \vec{R}_{O'} + \frac{{}^i d}{dt} \vec{r} = \vec{V}_{O'} + \frac{{}^s d}{dt} \vec{r} + \vec{\omega}^{si} \times \vec{r}, \quad (1.51)$$

ou seja,

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V}_{O'} + \vec{v}' + \vec{\omega}^{si} \times \vec{r}'}, \quad (1.52)$$

que relaciona as velocidades da partícula medidas em ambos os referenciais com a velocidade da origem (que serve de referência) e a velocidade angular de um referencial relativamente a outro, e onde os vectores podem ser escritos em qualquer dos referenciais.

Para a aceleração no caso geral o processo é similar. Utilizando (1.48) e (1.52),

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &\equiv \frac{{}^i d^2 \vec{R}}{dt^2} = \frac{{}^i d^2 \vec{R}_{O'}}{dt^2} + \frac{{}^i d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{a}_{O'} + \frac{{}^i d}{dt} \left( \frac{{}^s d \vec{r}}{dt} + \vec{\omega}^{si} \times \vec{r} \right) \\
 &= \vec{a}_{O'} + \frac{{}^i d}{dt} \left( \frac{{}^s d \vec{r}}{dt} \right) + \dot{\vec{\omega}}^{si} \times \vec{r} + \vec{\omega}^{si} \times \frac{{}^i d \vec{r}}{dt} \\
 &= \vec{a}_{O'} + \frac{{}^s d^2 \vec{r}}{dt^2} + \vec{\omega}^{si} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}}^{si} \times \vec{r} + \vec{\omega}^{si} \times \frac{{}^s d \vec{r}}{dt} + \vec{\omega}^{si} \times (\vec{\omega}^{si} \times \vec{r}) \\
 &= \vec{a}_{O'} + \vec{a}' + \vec{\omega}^{si} \times (\vec{\omega}^{si} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}}^{si} \times \vec{r} + 2\vec{\omega}^{si} \times \vec{v}', \quad (1.53)
 \end{aligned}$$

e simplificando, obtém-se finalmente a relação entre as acelerações de uma partícula medidas em referenciais diferentes:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega}^{si} \times (\vec{\omega}^{si} \times \vec{r}') + \dot{\vec{\omega}}^{si} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega}^{si} \times \vec{v}'} \quad (1.54)$$

### 1.3.7 Significado Físico dos Termos de Aceleração

Observando (1.54) do referencial  $\{s\}$

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_{O'} - \vec{\omega}^{si} \times (\vec{\omega}^{si} \times \vec{r}') - \dot{\vec{\omega}}^{si} \times \vec{r}' - 2\vec{\omega}^{si} \times \vec{v}', \quad (1.55)$$

observa-se que a aceleração *medida* em  $\{s\}$ ,  $\vec{a}'$ , é corrigida relativamente à aceleração medida em  $\{s\}$  (que se for um referencial de inércia terá uma relação directa com as forças aplicadas) por um conjunto de termos ditos acelerações fictícias<sup>8</sup> ou acelerações de inércia:

- $-\vec{a}_{O'}$  desconta a aceleração da origem do referencial  $\{s\}$ ;
- $-\dot{\vec{\omega}}^{si} \times \vec{r}'$  tem que ver com a compensação da *aceleração angular*  $\dot{\vec{\omega}}^{si}$  do referencial  $\{s\}$  medida no referencial  $\{i\}$ ;
- $-\vec{\omega}^{si} \times (\vec{\omega}^{si} \times \vec{r}')$  é a aceleração centrífuga, que existe devido à rotação do referencial relativamente ao outro;
- $-2\vec{\omega}^{si} \times \vec{v}'$  é a *aceleração de Coriolis*, que é devida a
  - Rotação do vector velocidade relativa quando o referencial roda;
  - Variação da velocidade tangencial quando por acção da velocidade relativa a distância à origem muda.

Os efeitos das acelerações inerciais podem ser muito visíveis, por exemplo em estações espaciais que rodem, ou no referencial Terra. Alguns exemplos são:

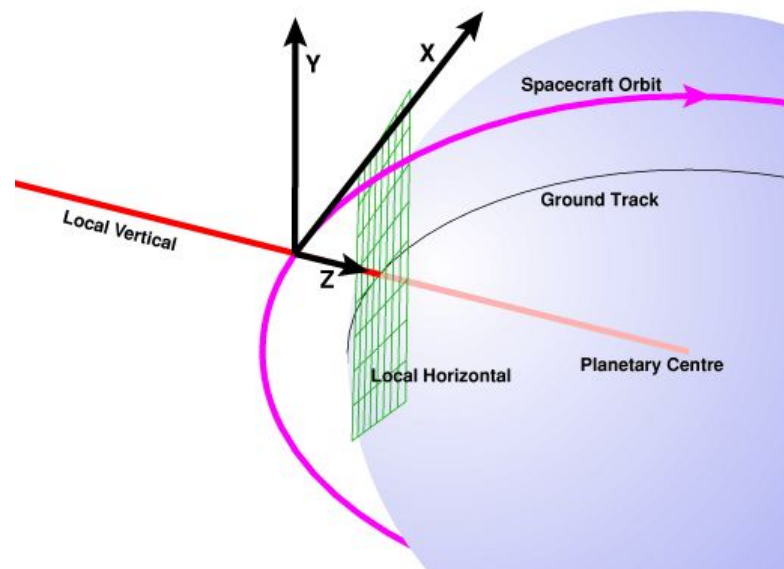
- Num veículo a curvar, uma força “fictícia” atira-nos para a janela lateral, quando na realidade é a janela lateral que nos está a obrigar a curvar com o veículo em vez de seguirmos em frente (aceleração centrífuga);

<sup>8</sup>Não são fictícias, existem mesmo, são um efeito da inércia.

- Num carrocel em andamento, se tentarmos ir de um cavaleiro para outro — não tente fazer isto! — seremos desviados para o lado (aceleração de coriolis); o mesmo acontecerá numa estação espacial em rotação;
- Tornados no hemisfério Norte rodam quase todos no sentido directo (devido à aceleração de Coriolis);
- A água no lavatório lá de casa não roda pelo gargalo abaixo devido à aceleração de Coriolis mas sim por irregularidades no lavatório ou velocidades iniciais mesmo que residuais; em tais condições não é possível observar o fenómeno em cuidados extremos na experiência;
- A sardinha é gorda no Verão em Portugal devido ao fenómeno de afloramento (*upwelling*) que acontece neste caso por causa da força de Coriolis.

### 1.3.8 Exemplo: referencial em rotação síncrona

Um exemplo de referencial em rotação (que de facto é não inercial) é o horizontal local vertical local (LVLH, na sigla em inglês utilizada comumente, correspondente a *local vertical local horizontal*), que é frequentemente utilizado em órbita centrados em satélites e que ajudam à navegação e à observação (cf. Figura 1.8). Por definição, o eixo  $z$  na



**Figura 1.8:** Referencial *local vertical local horizontal* (LVLH), vertical local horizontal local  
Fonte: NASA.

direcção do centro da Terra (Nadir), o eixo  $x$  no plano da órbita e sentido geral de avanço, e o eixo  $y$  perpendicular ao plano da órbita, formando um triedro direito. O ângulo de voo (também conhecido pela expressão inglesa *Flight Path Angle*) é o ângulo que a velocidade do satélite faz com o eixo  $x$ , que em órbitas circulares será nulo. Por

vezes, o eixo  $z$  é definido com sentido de zénite e não de nadir, afectando o sentido de  $y$  para o triedro se manter direito. Infelizmente é comum autores diferentes terem definições diferentes tornando necessário verificar sempre quais as definições usadas. O referencial tem velocidade angular correspondente ao período de revolução do satélite que será constante apenas no caso de um órbita circular.

## 1.4 Dinâmica de uma partícula

### 1.4.1 Leis de Newton do Movimento

A mecânica clássica é baseada nas três leis do movimento de Newton:

1. Lei da inércia, um corpo preserva o seu estado de movimento, esteja em repouso ou com movimento rectilíneo e uniforme
2.  $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a}$  quando  $m = C^{te}$
3. Lei da acção/reacção,  $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$ ,  $i, j = 1 \dots N$  ( $N$  partículas)

A Primeira Lei é uma consequência da segunda; Newton explicitou a primeira Lei provavelmente para marcar a diferença com a *Física Aristotélica*. As leis de Newton pressupõem a existência de um *Espaço Absoluto* e de um *Tempo Absoluto* sendo que a Segunda Lei é válida num *Referencial de Inércia*. Mas o que é um referencial de inércia? É um referencial em que a Segunda Lei é válida. Por outro lado, a massa  $m$  é a constante de proporcionalidade entre a força aplicada e a aceleração observada, mas se não soubermos qual a natureza a força teremos uma nova tautologia de definir massa pela força e força pela massa. Estas tautologias só podem ser resolvidas pela observação, a filosofia natural é, em última instância, uma ciência experimental.

A Segunda Lei de Newton sugere que os referenciais de inércia são fundamentais para o estudo da dinâmica, já que são os onde ela é válida. No entanto, é frequente haver a necessidade de utilizar referenciais não inerciais. Por exemplo, no estudo de muitos fenómenos o referencial Terra pode ser considerado aproximadamente inercial, mas na realidade a Terra roda (relativamente às estrelas i. e. a um referencial de inércia) e também para muitos fenómenos teremos que a considerar como um referencial não inercial. Nesse caso, as expressões (1.52) e (1.54), que relacionam as velocidades e acelerações entre dois referenciais arbitrários, deverão ser utilizadas para transformar a Segunda Lei para um referencial não inercial onde uma parte da “força de inércia” — o  $m\vec{a}$  — fica escondida nas forças de inércia, designadas muitas vezes como fictícias — a força centrífuga, de Coriolis, etc. (cf. (1.54)). A utilização de referenciais não inerciais torna-se necessário porque, mesmo que as equações do movimento fiquem com uma forma a priori mais complicada, essa complexidade é frequentemente compensada pela forma em que o problema se apresenta, do mesmo modo que se queremos calcular o volume de uma esfera, se torna mais simples utilizar coordenadas esféricas que, sendo mais complexas que as cartesianas, tornam o problema mais simples devido à geometria do problema.

É necessário identificar os referenciais de inércia que, em última instância (do ponto de vista da rotação) são definidos pelas direcções de estrelas distantes. Na prática, estamos limitados a utilizar referenciais aproximadamente de inércia — não é necessário resolver todos os problemas no referencial da Galáxia, com orientação definida por quasares distantes. Com a teoria da relatividade o referencial de inércia, num certo sentido, deixa de existir.

Em problemas mais realistas tudo se complica, teremos que introduzir outras (muitas) partículas, ou descrever sistemas como um contínuo. Teremos forças numerosas, nomeadamente de ligação ou de reacção (que dependem da acção, podendo ser difícil calculá-las). Poderá ser conveniente utilizar coordenadas generalizadas em vez das cartesianas, que sejam mais adequadas à geometria do problema e nos permita simplificá-lo. Isso requer a determinação do número de *graus de liberdade* do sistema, movimentos independentes possíveis, compatíveis com as ligações, de modo a determinar o número mínimo de equações a resolver para obter a solução.

### 1.4.2 Lei da Gravitação Universal

Também devemos a Newton a invenção da teoria que consegue descrever a gravidade numa boa aproximação. Nas suas interrogações sobre se os efeitos numa maçã seriam diferentes dos sentidos pela Lua, Newton concluiu que todos os corpos exercem uma *acção à distância*, instantânea, de atracção mútua; essa força de atracção é exercida na direcção da linha que une os corpos, proporcional às suas massas e ao *inverso do quadrado da distância*

$$F(r) = \frac{Gm_1m_2}{r^2}, \quad (1.56)$$

sendo que, pela lei de acção/reacção, essa atracção é mútua.

Note-se que a *massa gravítica* que figura na Lei da Gravitação Universal é de natureza diferente da *massa inercial*, constante de proporcionalidade da Segunda Lei de Newton do movimento. Uma é a constante de proporcionalidade da força da gravidade, a *carga gravítica*, enquanto que a outra é a razão entre a força total aplicada (de qualquer natureza) e a aceleração observada. Experiências foram sendo feitas ao longo dos séculos para determinar se as massas inercial e gravítica seriam mesmo iguais. É uma experiência cujo resultado será nulo se forem iguais e experiências negativas são sempre difíceis, ainda mais neste caso porque a força da gravidade é muito fraca, sendo que domina o Universo a grandes distâncias apenas porque, aparentemente não há massas negativas<sup>9</sup>. A diferença ficou sempre no interior da (relativamente grande) barra de erro — iguais portanto — mas só a teoria da Relatividade Geral forneceu uma explicação conceptual para a equivalência entre a massa gravítica e a massa inercial.

<sup>9</sup>A anti-matéria tem massa negativa mas não parece existir no Universo naturalmente.



### 1.4.3 Força, impulso e quantidade de movimento

É intuitivo e prescrito pela Segunda Lei de Newton  $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  que quanto mais massa, mais difícil é mudar o estado do movimento; quanto mais velocidade, idem. A *Quantidade de Movimento*, ou Momento Linear,  $\vec{p} = m\vec{v}$  é assim uma medida da força necessária para alterar o estado do movimento.

Por outro lado, o efeito de uma força será tanto maior quanto mais tempo esta actuar. É intuitivo que o *Impulso* total depende da força e de quanto tempo esta actua. Assim, o *Impulso* total  $\vec{I}$  aplicado numa partícula é definido como

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1. \quad (1.57)$$

Então, o vector impulso total

$$\boxed{\vec{I} = \Delta\vec{p}}, \quad (1.58)$$

iguala a variação da quantidade de movimento.

### 1.4.4 Trabalho e Energia

#### 1.4.4.1 Trabalho realizado e energia cinética

O trabalho realizado por uma força está relacionado com o seu deslocamento. Em cada instante, apenas a componente na direcção do deslocamento realiza trabalho

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (1.59)$$

onde  $d\vec{r}$  é o deslocamento infinitesimal da força  $\vec{F}$ . Se esta for a força total aplicada na partícula, então

$$\begin{aligned} W_{\text{tot}} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) dt \\ &= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta E_c, \end{aligned} \quad (1.60)$$

i. e. o trabalho realizado por todas as forças aplicadas na partícula

$$\boxed{W_{\text{tot}} = \Delta E_c}, \quad (1.61)$$

iguala a variação de energia cinética  $E_c$ .

#### 1.4.4.2 Forças conservativas e energia potencial

Frequentemente uma força só depende da posição  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$  e a quantidade  $\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$  é uma diferencial exacta

$$\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -dU(\vec{r}). \quad (1.62)$$

Uma força que verifique esta propriedade diz-se *conservativa* e pode ser descrita por uma função escalar  $U(x, y, z)$  que só depende da localização no espaço, a *energia potencial*. O trabalho realizado por esta força não depende da trajectória seguida e será zero se voltar ao ponto original

$$\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}. \quad (1.63)$$

Se a força é conservativa, então existe  $U(x, y, z)$  tal que

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU \Rightarrow \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -[U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)] = -\Delta U. \quad (1.64)$$

Se  $U$  for nulo em  $\vec{r} = \vec{r}_0$  então pode-se escrever

$$U = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (1.65)$$

mas  $\vec{r}_0$  é arbitrário. Ou seja,  $U$  é definido a menos de uma constante, o que é irrelevante porque só aparecem diferenças no cálculo do trabalho.

O sinal menos foi introduzido na definição de  $U$  para que quando  $W > 0$ ,  $U$  decresce, ou seja haverá menos capacidade de realizar trabalho.

O Teorema de Stokes e (1.63) implicam que

$$\boxed{\nabla \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U}, \quad (1.66)$$

ou seja, se o rotacional da força for nulo, a força é conservativa, caso em que poderá ser escrita como (menos) o gradiente de uma função escalar, a energia potencial. Assim, para verificar se a força é conservativa é suficiente calcular o rotacional e confirmar que é nulo.

É fácil verificar (1.66). Tem-se

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.67)$$

e

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (1.68)$$

logo

$$\boxed{\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right) = -\nabla U \cdot d\vec{r}}. \quad (1.69)$$

#### 1.4.4.3 Conservação de Energia

Se  $\vec{F}$  é uma força conservativa e é a *força total* então

$$W_{\text{tot}} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta E_c = -\Delta U \Rightarrow E_{c2} + U_2 = E_{c1} + U_1 \quad (1.70)$$

ou seja, há conservação de *energia mecânica total*

$$\boxed{E = E_c + U = \text{Cte}}. \quad (1.71)$$

Note-se que este resultado só é válido se a força conservativa for a única força aplicada (ou se a força resultante total for unicamente a soma de forças conservativas, caso em que as energias potenciais terão que ser somadas). As forças de atrito são um exemplo de forças *não conservativas* e portanto não existe conservação de energia quando existe atrito.

#### 1.4.4.4 Exemplo de força conservativa: força gravítica

A força gravítica  $\vec{F}_g$  aplicada numa partícula de massa  $m$  por uma partícula de massa  $M$  escreve-se, em coordenadas esféricas centradas em  $M$ ,

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r, \quad (1.72)$$

onde  $G$  é a constante de gravitação universal e  $r$  a distância entre as partículas. Vamos ver se a força da gravidade pode ser escrita como o gradiente de um potencial,

$$\vec{F} = -\nabla U. \quad (1.73)$$

A força, e portanto  $U$  só dependem de  $r$ , logo

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}; \quad (1.74)$$

a derivada passa a ser total, já que só há uma variável e a equação integra-se imediatamente, resultando em

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} + C. \quad (1.75)$$

A constante de integração  $C$  pode ser feita igual a zero de modo a que no infinito, quando a força é zero, o potencial se anule (ou seja não há influência).

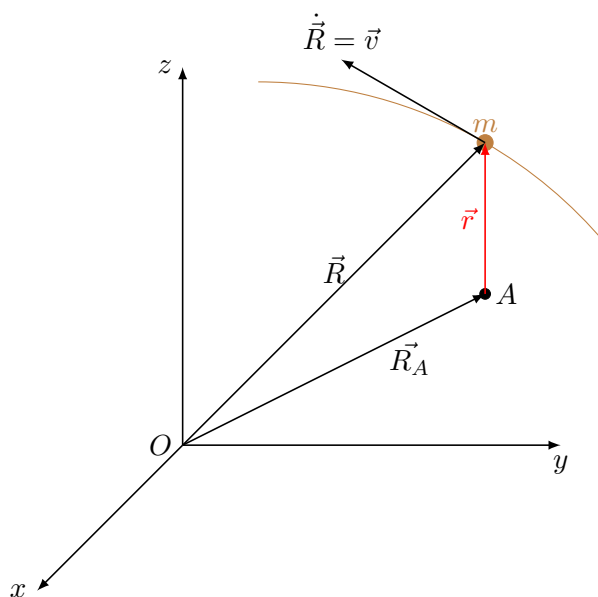
#### 1.4.5 Momento angular e momento de forças

O *Momento Angular* relativamente a um ponto é uma medida da rotação em torno desse ponto i. e. do movimento tangencial ao ponto. Considere o referencial da Figura 1.9 com origem  $O$  e o ponto  $A$ , algures, que pode deslocar-se relativamente ao referencial. O Momento Angular relativo a  $A$  é

$$\boxed{\vec{H}_A = \vec{r} \times m\dot{\vec{R}}}, \quad (1.76)$$

onde  $\dot{\vec{R}}$  é a velocidade *medida* no referencial indicado. Note-se que se  $A$  se deslocar,  $\vec{H}_A$  foi medido neste referencial e não no que acompanha  $A$ , já que a velocidade é a medida em  $A$ . Tem-se

$$\vec{R} = \vec{R}_A + \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{R}} = \dot{\vec{R}}_A + \dot{\vec{r}}, \quad \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} = 0. \quad (1.77)$$



**Figura 1.9:** Momento angular relativamente a um ponto  $A$ .

A derivada do momento angular é

$$\dot{\vec{H}}_A = \vec{r} \times m\ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{R}} = \vec{r} \times m\ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{R}}_A. \quad (1.78)$$

Se o referencial  $Oxyz$  for um *referencial de inércia*, o momento das forças  $\vec{F} = m\ddot{\vec{R}}$  que actuam em  $m$ , relativamente ao ponto  $A$  é, por definição,

$$\boxed{\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\ddot{\vec{R}}}. \quad (1.79)$$

Comparando (1.79) com (1.78) da derivada do momento angular, obtém-se

$$\vec{M}_A = \dot{\vec{H}}_A + \dot{\vec{R}}_A \times m\dot{\vec{r}}. \quad (1.80)$$

Esta expressão é mais complicada do que parece. A utilização da velocidade medida no referencial na definição de momento angular faz aparecer em (1.80) duas velocidades, a do ponto  $A$  relativamente ao referencial, e a da partícula relativamente a  $A$ . No entanto, isto só é verdade se se considerar referenciais que acompanham estes pontos que não rodam relativamente ao referencial mostrado, já que isso exigiria uma transformação das derivadas usando (1.48) que não foi realizada (cf. § 1.3.5).

Levando em conta a complicação debatida acima, o caso mais importante é quando o ponto  $A$  está fixo no referencial. Nesse caso,  $\dot{\vec{R}}_A = \ddot{\vec{R}}_A = 0$ ,  $\vec{R} = \vec{r}$  e tem-se

$$\text{A parado no referencial : } \boxed{\vec{M}_A = \dot{\vec{H}}_A}, \quad (1.81)$$

ou, se coincide com a própria origem 0 do referencial,

$$\boxed{\vec{M}_0 = \dot{\vec{H}}_0}. \quad (1.82)$$

Se o ponto  $A$  se move com velocidade constante (define um referencial de inércia) então  $\ddot{\vec{R}}_A = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = \ddot{\vec{r}}$ , e

$$\vec{M}_A = \vec{r} \times m\ddot{\vec{R}} = \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) - \underbrace{\dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}}}_{=0}, \quad (1.83)$$

que se reduz ao caso anterior no referencial inercial de  $A$ , que neste caso existe.

Existem outros casos mais complicados e. g. se  $\ddot{\vec{R}}$  e  $\vec{r}$  ou  $\ddot{\vec{R}}$  e  $\dot{\vec{r}}$  são paralelos, as equações (1.81) são válidas. No entanto, são menos relevantes nos casos que pretendemos estudar aqui. O mais importante é reconhecer que as expressões do momento angular e do momento de forças podem ter complexidades e que é necessário cuidado na definição e escolha dos pontos relativamente aos quais se calculam as expressões.

Tal como no caso da quantidade de movimento, o *Impulso Angular* iguala a variação de momento angular

$$\vec{I}_A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_A = \Delta \vec{H}_A. \quad (1.84)$$

Esta expressão pode ser relevante em choques considerados instantâneos, em que durante o choque as únicas forças não desprezáveis são as envolvidas no impacto (e portanto também os respectivos momentos), logo

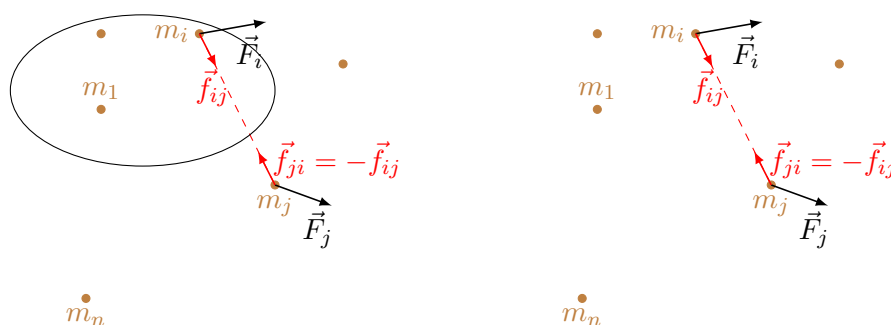
$$\Delta \vec{H}_{\text{ponto de impacto}} = 0 \Rightarrow \vec{H}_{\text{ponto de impacto}} = \text{Cte.} \quad (1.85)$$

## 1.5 Sistemas de Partículas

### 1.5.1 Forças internas e externas

Muitos dos conceitos da dinâmica de uma partícula são imediatamente generalizados para  $n$  partículas: (i) a energia cinética é a soma das energias cinéticas de cada partícula; (ii) a quantidade de movimento do sistema é a soma vectorial das de todas as partículas; (iii) as forças agora estão aplicadas em diversas partículas; (iv) se só há forças conservativas, a energia potencial total é a soma das energias potenciais devidas a cada força; (v) o momento angular total relativamente a um ponto é a soma dos momentos angulares de todas as partículas.

Num sistema de partículas vale a pena distinguir a origem das forças aplicadas no sistema. *Forças Externas* são forças cuja força de reacção (que pela Terceira Lei de Newton existe sempre) está aplicada *fora* do sistema (cf. Figura 1.10). Ao contrário, no caso de *Forças Internas* ambas as forças de acção/reacção estão aplicadas no sistema. A implicação mais importante é que a soma das *forças internas*  $\vec{f}_{ij}$  é nula pela *Lei da*



**Figura 1.10:** Sistema é um conceito abstracto arbitrário que pode ser definido como o utilizador desejar. As forças são internas ou externas dependendo da definição do sistema.

*Acção/Reacção*, pois cancelam-se aos pares

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \vec{f}_{ij} = 0. \quad (1.86)$$

Repare-se que o conceito de sistema está nos olhos de quem observa: sistema como realidade organizada e interagindo para fora e entre as partes é o que quisermos, ou seja, o que for conveniente. Tipicamente os sistemas são definidos de modo a minimizar as interações com o exterior. No entanto nem sempre é assim. Em muitas circunstâncias (e. g. corpos rígidos) é impossível conhecer as forças internas de um sistema. Se as queremos conhecer, temos que as transformar em forças externas, o que significa redefinir o sistema.

### 1.5.2 Centro de Massa e Momento Angular

Num sistema de partículas, cada partícula tem aplicadas uma força externa resultante  $\vec{F}_i$  e  $n - 1$  forças internas  $f_{ik}$ . Portanto tem-se

$$\vec{F}_i^{\text{tot}} = m_i \ddot{\vec{r}}_i, \quad (1.87)$$

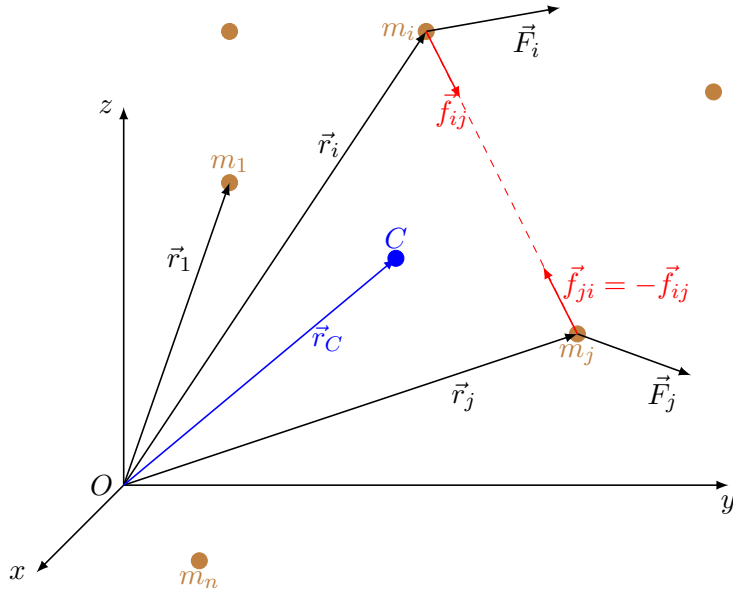
com

$$\vec{F}_i^{\text{tot}} = \vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \vec{f}_{ij} \quad (1.88)$$

Somando todas as forças externas como se fossem vectores livres, e sabendo que a soma de todas as internas se anulam,

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \stackrel{\text{def.}}{=} m \ddot{\vec{r}}_C \quad (1.89)$$

onde  $m$  é a massa total do sistema  $m = \sum m_i$  e  $\vec{r}_C$  o *centro de massa* do sistema, definido portanto por



**Figura 1.11:** Centro de massa de um sistema de partículas.

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i. \quad (1.90)$$

A equação da força fica então

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \ddot{\vec{r}}_C. \quad (1.91)$$

O centro de massa é a localização média do sistema, pesada pelas massas individuais. Observando (1.91) podemos concluir que o centro de massa se move como uma partícula com a massa total do sistema com todas as forças externas do sistema aplicadas nesta partícula.

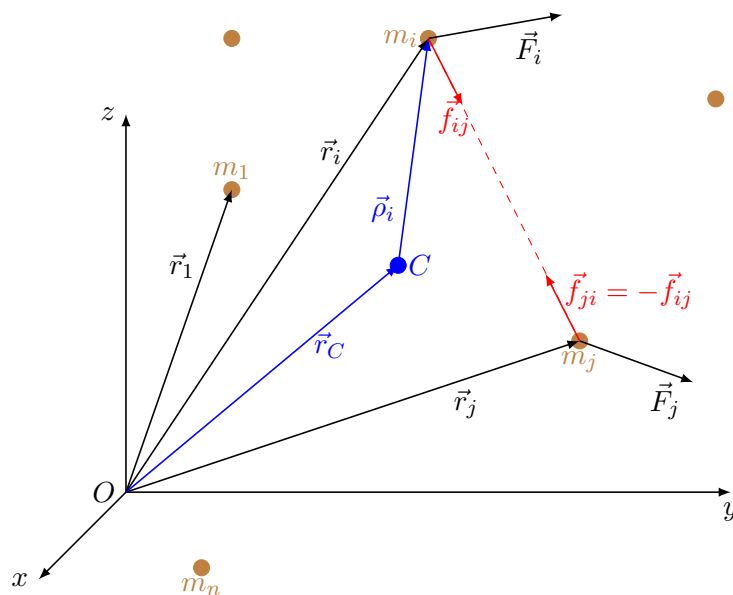
O momento angular total relativamente à origem é dado por

$$\vec{H}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i. \quad (1.92)$$

Utilizando o centro de massa como ponto intermédio, pode escrever-se a posição de cada partícula  $i$  como a sua posição  $\vec{\rho}_i$  relativamente ao centro de massa mais a posição do centro de massa relativamente à origem:

$$\vec{r}_i = \vec{\rho}_i + \vec{r}_C, \quad (1.93a)$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{\rho}}_i + \dot{\vec{r}}_C, \quad (1.93b)$$



**Figura 1.12:** Posição relativa da partícula  $i$  ao centro de massa  $\vec{\rho}_i$ .

e se calcularmos a sua derivada em ordem ao tempo obtemos a velocidades relativas ao centro de massa num referencial que o acompanha mas que não roda, já que só utilizámos a lei de transformação de velocidades de Galileu i. e. apenas  $\frac{d}{dt}$ .

Substituindo ambas as equações (1.93) em (1.92), utilizando a propriedade distributiva e reconhecendo que há termos que não dependem da soma e podem passar para fora desta, incluindo o próprio produto externo (uma consequência da propriedade distributiva), obtém-se

$$\vec{H}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i + \left( \sum_{i=1}^n m_i \vec{\rho}_i \right) \times \dot{\vec{r}}_C + \vec{r}_C \times \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{\rho}}_i + \vec{r}_C \times \left( \sum_{i=1}^n m_i \right) \dot{\vec{r}}_C, \quad (1.94)$$

onde também se passou  $m_i$  para o outro termo do produto externo quando conveniente, utilizando o facto de este ser uma operação multilinear. A soma das massas das partículas é a massa total do sistema  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  e por definição de centro de massa,

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{\rho}_i = 0 = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{\rho}}_i = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n m_i \vec{\rho}_i \right), \quad (1.95)$$

portanto a expressão do momento angular (1.92) simplifica-se para

$$\vec{H}_0 = \vec{r}_C \times m \dot{\vec{r}}_C + \sum_{i=1}^n \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i, \quad (1.96)$$



que pode ser interpretada como a soma do momento angular relativamente ao centro de massa (num referencial que o acompanha mas que não roda) mais o momento angular de uma partícula equivalente com a massa total do sistema localizada no centro de massa.

## 1.6 O problema dos $n$ corpos

Tendo revisto as equações fundamentais da dinâmica de partículas estamos agora em condições de estudar um dos problemas fundamentais da mecânica e que é muito relevante para a mecânica orbital. Considere-se  $n$  partículas no espaço isoladas, de modo que as únicas forças existentes são as forças entre elas. Não há portanto forças externas e pela lei de acção/reacção todas as forças presentes têm a sua reacção também presente. O objectivo é, dadas as condições iniciais, determinar as trajectórias de todas as partículas em função do tempo.

### 1.6.1 O problema dos $n$ corpos gravítico

Se as únicas forças presentes forem as devidas à gravidade que umas partículas aplicam nas outras, tem-se o problema de  $n$  corpos gravítico, que originou a formulação e que é o que vamos estudar. Muitas situações no Universo são, num certo grau de aproximação uma versão deste problema geral. Por exemplo, um satélite à volta da Terra pode, em muitas circunstâncias, ser considerado um problema de  $n$  corpos, com  $n = 2$ . Se o satélite se encontrar numa órbita alta, e for requerida uma precisão elevada, podemos ter que considerar a influência da Lua e do Sol, passando a ter 4 corpos envolvidos. Se pensarmos que os planetas estão muito longe uns dos outros, podemos considerar numa boa aproximação que o Sol e cada um dos planetas é um problema de 2 corpos. Por outro lado, a longo prazo as influências mútuas dos planetas acabam por ter alguma importância e nesse caso teremos que considerar um problema de  $n$  corpos Sol mais planetas. E assim por diante. A aproximação da realidade depende sempre do grau de aproximação desejado na solução e das circunstâncias específicas do problema. Haverá casos em que será sempre necessário levar em conta as interacções de por exemplo 3 corpos pois considerar 2 corpos não resultará nunca numa solução suficientemente boa.

Considere-se então  $n$  partículas, cada uma de massa  $m_i$  num referencial de inércia  $Oxyz$  (cf. Figura 1.13). O vector

$$\vec{r}_i - \vec{r}_j \quad (1.97)$$

é o vector posição da partícula  $i$  relativamente à partícula  $j$ , de módulo

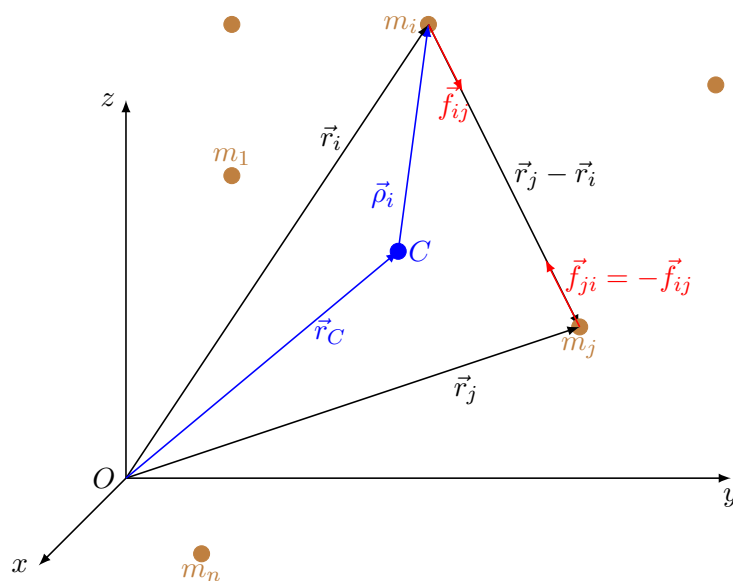
$$r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|. \quad (1.98)$$

O versor da direcção da posição relativa é

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j) / r_{ij}. \quad (1.99)$$

A força da gravidade aplicada na partícula  $i$  pela partícula  $j$  é então

$$\vec{f}_{ij} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}}; \quad (1.100)$$



**Figura 1.13:** Sistema de  $n$  corpos.

a gravidade é uma atracção mútua que respeita a lei de acção/reacção, logo a força da gravidade aplicada em  $j$  pela partícula  $i$  é

$$\vec{f}_{ji} = -\frac{Gm_2m_1}{r_{ji}^2} \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ji}} = \frac{Gm_1m_2}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}} = -\vec{f}_{ij}. \quad (1.101)$$

### 1.6.2 Movimento do centro de massa

A segunda lei de Newton  $\vec{F} = m\vec{a}$  aplicada à partícula  $i$  escreve-se

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}}, \quad (1.102)$$

onde se trocou a ordem dos vectores no versor para fazer desaparecer o sinal negativo. A soma não inclui o termo  $j = i$  porque a partícula não aplica força nela própria. Uma vez que há  $n$  partículas que se podem mover no espaço, o sistema tem  $3n$  graus de liberdade<sup>10</sup> e haverá  $3n$  equações para resolver.

Tal como em (1.89), adicionando termo a termo as equações do movimento (1.102)

<sup>10</sup>O número de graus de liberdade pode ser definido como o número de parâmetros independentes que definem a sua configuração, neste caso as posições (cada uma com três componentes) das partículas.

de todas as partículas, e uma vez que se está num referencial de inércia, obtém-se

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}} = 0, \quad (1.103)$$

que é igual a zero pela terceira lei de Newton. Por definição de centro de massa (1.90),  $\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \stackrel{\text{def.}}{=} m \ddot{\vec{r}}_C$ , logo de (1.103) resulta imediatamente que

$$\ddot{\vec{r}}_C = 0, \quad (1.104)$$

que é uma equação (vectorial, ou seja três equações escalares) diferencial de segunda ordem, homogénea de coeficientes constantes (e equação característica com duas raízes iguais nulas). Esta equação é trivialmente integrada duas vezes, determinando que o centro de massa do sistema de  $n$  partículas se desloca com velocidade constante num referencial de inércia

$$\boxed{\vec{r}_C = \vec{C}_1 t + \vec{C}_2 = \vec{v}_0 t + \vec{r}_{C0}}. \quad (1.105)$$

As forças internas, as únicas existentes, não interferem no movimento da média do sistema. Uma vez que o movimento do centro de massa (CM) é rectilíneo e uniforme neste referencial de inércia, pode sempre utilizar-se, sem perda de generalidade, o *Referencial do Centro de Massa*, o referencial onde o CM está parado, pois ele também será de inércia. Nesse caso ter-se-á  $C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow \vec{r}_C = 0$ , se o centro de massa (CM) for colocado na origem.

### 1.6.3 Momento Angular

A derivada do momento angular relativamente à origem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i \right) &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\dot{\vec{r}}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i}_{=0} + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2} \vec{r}_i \times \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}} = 0, \end{aligned} \quad (1.106)$$

é nula porque  $\vec{r}_i \times \vec{r}_i = 0$  e  $\vec{r}_j - \vec{r}_i = -(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$  anulando as forças duas a duas. Ou seja, o momento angular (relativamente a um ponto fixo pois a origem é arbitrária) do sistema de  $n$  corpos conserva-se

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \text{Cte}}. \quad (1.107)$$

### 1.6.4 Energia

Como a gravidade é uma força conservativa (cf. § 1.4.4.4) há conservação de energia mecânica. Fazendo o produto interno do vector velocidade com a força aplicada em cada partícula  $\vec{F}_i$  e somando, obtém-se

$$\sum_{i=1}^n \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^3} \dot{\vec{r}}_i \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i). \quad (1.108)$$

Do lado esquerdo de (1.108) resulta a variação da energia cinética total

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{dT}{dt}, \quad (1.109)$$

e do lado direito de (1.108) vê-se facilmente que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^3} \dot{\vec{r}}_i \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} \right) = \frac{d}{dt} (-U). \quad (1.110)$$

Da integração da equação (1.108), e usando (1.109) e (1.110), resulta que há *conservação de energia* do sistema de  $n$  corpos

$$\boxed{E = T + U = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}} = \text{Cte.} \quad (1.111)$$

### 1.6.5 Integrais do Movimento

O problema de  $n$  corpos tem  $3n$  graus de liberdade e portanto  $3n$  equações do movimento, uma equação por grau de liberdade ( $q_i = q_i(t)$ ), para resolver (ou  $n$  equações vectoriais com três componentes, uma para cada corpo). A integração directa das equações do movimento nem sempre é fácil ou possível. Problemas solúveis por *quadratura*<sup>11</sup>, i. e. os que podem ser completamente resolvidos em termos de funções elementares ou integrais indefinidos, são raros. As equações são de segunda ordem, logo há  $6n$  constantes de integração — tipicamente as posições e velocidades iniciais dos corpos ou outras equivalentes (e. g. posições em dois instantes diferentes de tempo).

Por vezes os sistemas exibem certas características que permitem obter muita informação sobre o seu comportamento sem obter uma solução completa das equações do movimento. Os denominados (*Primeiros*) *Integrais do Movimento* são integrais contendo derivadas das variáveis uma ordem inferior à que surge nas equações do movimento. Uma manipulação das equações do movimento, ou uma mudança adequada de variáveis, pode revelar os integrais do movimento de um sistema, se existirem. Eles não oferecem mais

<sup>11</sup>A palavra quadratura tem vários sentidos possíveis que são incompatíveis.

informação que as equações do movimento mas podem ser um caminho para obter a sua solução. Assim,

$$f(q_i, \dot{q}_i) = C \quad (1.112)$$

será um integral do movimento se, através da manipulação das equações do movimento, se obtiver

$$\frac{d}{dt}(f(q_i, \dot{q}_i)) = 0. \quad (1.113)$$

$C$  é a constante de integração determinada, por exemplo, pelas condições iniciais. A constante  $C$  representa uma grandeza que se *conserva* — o integral do movimento representa uma *lei de Conservação*. Se o número de integrais do movimento for igual ao número de condições iniciais, i. e. ao número de constantes de integração a determinar, o problema ficará completamente resolvido.

No caso do problema dos  $n$  corpos há *10 integrais do movimento*: a *Energia* (1.111), o *Momento Angular* (1.107) (três componentes, logo três equações) e as *posição e velocidade iniciais do CM* (1.105) (três mais três componentes, seis constantes de integração) são *Constantes do Movimento* obtidos de *Integrais do Movimento*. Para resolver o problema completamente é necessário  $6n$  constantes (equivalentes aos vectores posição e velocidade iniciais para cada corpo). O caso de um corpo é trivial porque ele não pode interagir com mais nenhum (embora o problema de um corpo e uma força externa especial possa ser similar, como veremos). No caso de 2 corpos já não há integrais do movimento suficientes para o resolver completamente mas, como veremos, ainda o conseguiremos resolver completamente. A partir de 3 corpos inclusive não há soluções por quadratura, apenas soluções aproximadas ou particulares são possíveis. O problema dos 3 corpos (gravítico) será introduzido posteriormente. Note-se que, quando se realizam aproximações nas equações, estas são alteradas, logo os integrais do movimento também são alterados. Um exemplo são algoritmos numéricos que aproximam as equações localmente e. g. por diferenças finitas, o que provoca frequentemente que a energia — um integral do movimento — deixe de ser conservada, ao contrário de nas equações originais. Pode no entanto usar-se uma classe de integradores numéricos, ditos *symplecticos*, que asseguram a conservação de energia no procedimento numérico. Eles são particularmente adequados quando se pretende integrar problemas de  $n$  corpos em intervalos de tempo longo (por exemplo para estudar a evolução do sistema solar) porque quanto mais tempo passar mais o problema da não conservação de energia nos integradores mais usuais se faz sentir.



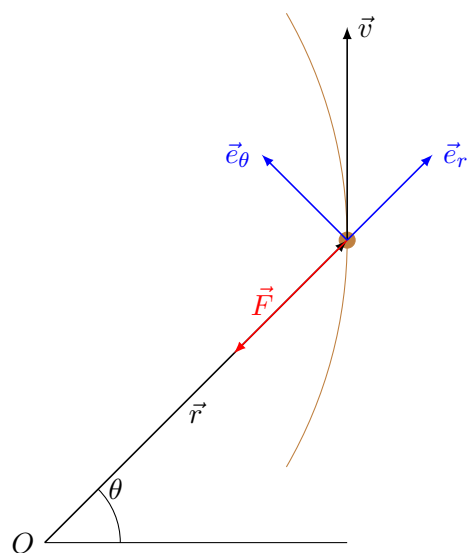
## Capítulo 2

# Órbitas Keplerianas

### 2.1 Força central

#### 2.1.1 Movimentos celestes e força central

No sistema solar há vários corpos celestes mas o problema de  $n$  corpos é demasiado complicado para ser o primeiro caso a estudar. Na realidade há muitas situações em que se observa que, muito aproximadamente, se tem um corpo (tipicamente muito mais massivo que o outro) imóvel no centro enquanto um outro revoluciona à sua volta. É por exemplo o caso dos planetas à volta do Sol, das Luas à volta dos planetas ou de um satélite à volta da Terra.



**Figura 2.1:** Força central  $\vec{F}$  com referencial polar local e velocidade  $\vec{v}$ . Os vectores força central  $\vec{F}$ , posição  $\vec{r}$  e velocidade  $\vec{v}$  definem um plano inicialmente e nunca vão conseguir sair dele.

Vamos começar por estudar o caso idealizado de um corpo no espaço sob acção de uma força, denominada *força central*, que está sempre direccionada para um *ponto fixo*  $O$  no referencial (de inércia), escolhido como origem do referencial (cf. Figura 2.1). Por enquanto não vamos especificar a forma específica da força, apenas as suas características mínimas. Uma força central pode sempre ser escrita na forma genérica

$$\boxed{\vec{F} = F \frac{\vec{r}}{r}}. \quad (2.1)$$

O movimento sob a acção de uma força central acontece num plano fixo. De facto, no instante inicial os vectores  $\vec{r}_0$  e  $\vec{v}_0$  determinam um plano inicial. Suponha-se que, sem perda de generalidade, é o plano  $xy$ . Ora a força é colinear com  $\vec{r}_0$  e também pertence ao plano,  $\vec{r}_0 \parallel \vec{F} = m\vec{a}$  (referencial de inércia). A componente  $a_z$  da aceleração será sempre nula e como a velocidade  $v_z$  também é nula a partícula nunca sairá do plano inicial pois a velocidade só variará neste.

### 2.1.2 Momento angular e velocidade areolar

Se calcularmos a derivada do momento angular (1.77),  $\vec{H}_0$ , relativamente a  $O$ ,

$$\frac{d\vec{H}_0}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{=0} + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0, \quad (2.2)$$

onde  $\vec{M}_0$  é o momento das forças. Mas, usando (2.1),

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times F \frac{\vec{r}}{r} = 0, \quad (2.3)$$

ou seja o momento angular relativamente à origem é sempre conservado no problema de força central,

$$\boxed{\vec{H}_0 = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{Cte}}. \quad (2.4)$$

O momento angular ser um vector constante implica que *o movimento ocorre num plano*;  $\vec{H}_0$  é normal ao plano do movimento.

Considere-se a área varrida por  $\vec{r}$  no intervalo de tempo  $\Delta t$  (cf Figura 2.2). No instante  $t + \Delta t$  o vector posição será  $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ ; a área varrida é aproximadamente um triângulo determinado por

$$\Delta A = \frac{1}{2} |\vec{r} \times (\vec{r} + \Delta\vec{r})| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \Delta\vec{r}|, \quad (2.5)$$

i. e. metade da área do paralelogramo determinado pelo produto externo, onde se usou o facto de o produto externo de dois vectores colineares ser zero. Dividindo (2.5) por  $\Delta t$  e calculando o limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$  obtém-se a variação da área com o tempo, a *velocidade areolar*,

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{|\vec{H}_0|}{2m}, \quad (2.6)$$



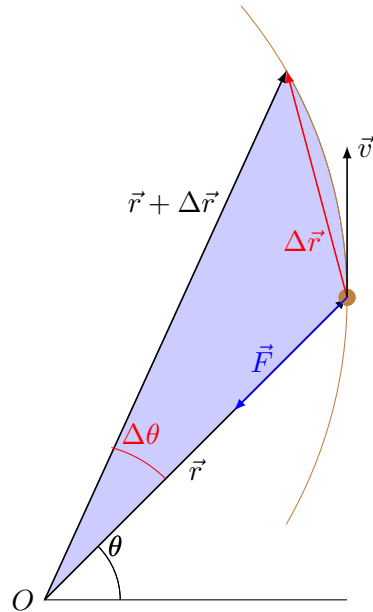


Figura 2.2: Velocidade areolar.

onde se utilizou a definição de momento angular (2.4). Ou seja a velocidade areolar conserva-se e não é mais que uma expressão da conservação do momento angular em relação à origem

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{H_0}{2m} = \text{Cte}}. \quad (2.7)$$

### 2.1.3 Segunda Lei de Kepler

A equação (2.7) afirma que a área varrida é proporcional ao tempo, ou seja, *áreas iguais varridas em tempos iguais*, que é a proposição da *2ª Lei de Kepler*. Esta é simplesmente uma consequência da conservação do momento angular relativamente à origem da força,  $\vec{H}_0 = \text{Cte}$ , na aproximação de o Sol estar parado e os planetas se deslocarem à sua volta.

É conveniente utilizar o momento angular em relação a 0 por unidade de massa

$$\boxed{\vec{h} \equiv \frac{\vec{H}_0}{m}}, \quad (2.8)$$

e escrevê-lo em coordenadas polares no plano do movimento. Calculando a velocidade areolar usando as expressões dos vectores posição,  $\vec{r} = r\vec{e}_r$ , e velocidade, (1.6), em

coordenadas polares, e o determinante simbólico para calcular o produto externo

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} |\vec{e}_z| = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} = \frac{h}{2}, \quad (2.9)$$

onde se utilizou também (2.8) para obter o resultado em função de  $h$ . Ou seja

$$\boxed{h = r^2\dot{\theta} = \text{Cte}} \quad (2.10)$$

#### 2.1.4 Equações do movimento em coordenadas polares

Como o movimento de uma partícula sujeita a uma força central acontece no plano, é suficiente estudar o problema nesse plano. Por outro lado, a força ser radial sugere que utilizar coordenadas polares será vantajoso. Utilizando as expressões da aceleração em coordenadas polares (1.9) e da força (2.1), as equações do movimento obtidas da segunda lei de Newton  $\vec{F} = m\vec{a}$  em coordenadas polares são:

$$a_r \equiv \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{F}{m} \equiv f, \quad (2.11a)$$

$$a_\theta \equiv r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \underbrace{(r^2\dot{\theta})}_{=h=\text{Cte}} = 0, \quad (2.11b)$$

onde se pode ver que a equação na componente transversal  $\theta$  apenas expressa a conservação de momento angular relativamente a 0,  $r^2\dot{\theta} = h = \text{Cte}$ . Este fato não é surpreendente já que os integrais do movimento resultam de maiores ou menores transformações das equações do movimento.

Substituindo  $\dot{\theta} = h/r^2$  de (2.11b) em (2.11a) resulta

$$\boxed{\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = f}, \quad (2.12)$$

ou seja, consegue-se eliminar a dependência na coordenada  $\theta$ . Uma vez calculado  $r(t)$ ,  $\theta(t)$  pode ser obtida pela expressão do momento angular (2.10).

A equação (2.12) é uma equação diferencial ordinária não linear, embora seja linear no termo da derivada e, se a força não depender explicitamente do tempo, será também autônoma i. e. a variável independente  $t$  não aparece explicitamente. Isto sugere que se possa eliminar a dependência do tempo. Sabendo  $r(t)$  e  $\theta(t)$ , será em princípio possível eliminar  $t$  e tentar obter e. g. a dependência  $r(\theta)$ , transformando as derivadas em  $t$  em derivadas em  $\theta$ . Assim, notando que qualquer grandeza dependente de  $t$  se pode escrever em função de  $r$ , ou de  $\theta$ , que por sua vez dependem de  $t$ , tem-se

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \dot{r} = \frac{d\dot{r}}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr} \dot{r} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} (\dot{r}^2). \quad (2.13)$$

Substituindo  $\ddot{r}$  em (2.12), a equação transforma-se para

$$\ddot{r} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} (\dot{r}^2) = \frac{h^2}{r^3} + f. \quad (2.14)$$

Admitindo que a força só depende de  $r$  (não depende de  $t$  explicitamente), que é o caso relevante da força da gravidade, e integrando

$$\boxed{\dot{r}^2 = -\frac{h^2}{r^2} + 2 \int f(r) dr + \text{Cte}.} \quad (2.15)$$

Pode-se utilizar a variável  $\theta$  em conjunto com  $\dot{\theta} = h/r^2$  para obter

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \left( \frac{h}{r^2} \right). \quad (2.16)$$

Combinando (2.15) e (2.16), o tempo será eliminado e é possível obter a trajectória por integração de

$$\boxed{\left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = -r^2 + 2 \frac{r^4}{h^2} \int f(r) dr + \frac{r^4}{h^2} \times \text{Cte}.} \quad (2.17)$$

Por outro lado, das suas duas componentes, pode-se obter imediatamente a velocidade utilizando (2.15) e a expressão do momento angular (2.10)

$$\boxed{v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 = 2 \int f(r) dr + \text{Cte}.} \quad (2.18)$$

### 2.1.5 Força central conservativa e conservação de energia

Uma força central que dependa apenas de  $r$  é conservativa. Seja uma força central apenas dependente de  $r$ ,  $\vec{F} = F(r) \vec{e}_r$  ( $F_\theta = F_z = 0$ ). Então, o rotacional em coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix} = 0, \quad (2.19)$$

o que implica que a força  $\vec{F}$  se pode escrever à custa de uma função escalar  $U$ ,

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r. \quad (2.20)$$

Como  $U = U(r)$ , então  $\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{dU}{dr}$ ; utilizando a expressão da velocidade (2.18) e integrando, obtém-se

$$v^2 = -\frac{2}{m} \int \frac{dU}{dr} dr + \text{Cte} = -\frac{2U}{m} + \text{Cte}; \quad (2.21)$$

pois a primitiva da derivada é simplesmente a função, a menos de uma constante; re-arranjando a expressão obtém-se

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + U = \text{Cte} \equiv E,} \quad (2.22)$$

onde  $E$  é a energia mecânica total.

### 2.1.6 Potencial efectivo

De (2.22) observa-se que para partículas à mesma distância e mesma energia, a velocidade é a mesma independentemente da trajectória. Por definição,  $v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$ , e combinando com a equação da energia (2.22) e do momento angular (2.10), obtém-se

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mh^2}{2r^2} + U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}.} \quad (2.23)$$

O potencial efectivo  $V_{\text{eff}} = U + \frac{mh^2}{2r^2}$  pode ser pensado como o potencial no referencial que roda, de tal modo que a partícula está sempre na mesma direcção; de (2.23)

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}})} \quad \Rightarrow \quad V_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{mh^2}{2r^2} \leq E, \quad (2.24)$$

ou seja, valores máximo e mínimo de  $r$ , se existirem, são obtidos no caso  $V_{\text{eff}} = E$  i. e. quando  $\dot{r} = 0$  — pontos de viragem das distâncias apsidais das órbitas. Se  $\dot{r} = 0$  em todos os instantes, a órbita só pode ser circular ( $r = \text{Cte}$ ).

### 2.1.7 Solução formal geral do Problema de Força Central

**Integração em função do Tempo.** De (2.24) tem-se

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - U - \frac{mh^2}{2r^2} \right)}, \quad (2.25)$$

e integrando

$$\boxed{t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(r)) - \frac{h^2}{r^2}}},} \quad (2.26)$$

onde se está a supor que o potencial só depende de  $r$ . Esta é a solução formal geral (real se se conseguir resolver o integral) na forma  $t = t(r)$ . Uma inversão (se for possível) pode dar a solução explícita  $r = r(t)$ . O sinal positivo foi tomado em (2.25) sem perda de generalidade, já que as equações são simétricas no tempo.

**Trajectória.** Substituindo a equação da energia na equação da trajectória (2.17) ou muito simplesmente fazendo  $\frac{dr}{d\theta} = \dot{r}/\dot{\theta}$  usando (2.25) e  $\dot{\theta} = h/r^2$  obtém-se

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2}{h} \sqrt{\frac{2}{m}(E - U) - \frac{h^2}{r^2}}, \quad (2.27)$$

e integrando,

$$\theta - \theta_0 = \int_{r_0}^r \frac{h \, dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{m}(E - U) - \frac{h^2}{r^2}}}, \quad (2.28)$$

que nos poderá dar  $\theta(r)$ . Note-se que  $\dot{\theta} = h/r^2$  implica que  $\dot{\theta}$  nunca muda de sinal i. e.  $\theta$  aumenta monotonamente com  $t$ . A forma do integral sugere que se faça a mudança de variável  $u = 1/r$ .

**Exemplo: caso de força proporcional a uma Potência de  $r$ .** No caso de a força ser da forma geral

$$f = Ar^n, \quad (2.29)$$

com  $A$  constante, a mudança de variável  $u = 1/r$  transforma a energia potencial para a forma

$$U(r) = -\frac{Au^{-(n+1)}}{(n+1)}, \quad (2.30)$$

de onde resulta que (2.27) se escreve na forma

$$\theta - \theta_0 = \int_{u_0}^u \frac{-du}{\sqrt{a + bu^2 + cu^{-(n+1)}}}, \quad (2.31a)$$

com

$$a = \frac{2E}{mh^2}, \quad b = -1, \quad c = \frac{2A}{mh^2(n+1)}. \quad (2.31b)$$

Nos casos de  $n = 1, -2, -3$  (os casos fáceis), o integral pode ser calculado à custa de funções trigonométricas. Note-se que o caso  $n = 1$  é o da lei de Hooke, de onde resulta o caso fácil do oscilador harmónico, e  $n = -2$  o da força da gravidade, que é o que nos interessa mais. Nos casos  $n = 5, 3, 0, -4, -5, -7$ , o integral pode ser calculado em termos de *funções elípticas*, funções relativamente complicadas.

### 2.1.8 Força central gravítica

Seja a força central a força gravítica

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r \quad (2.32)$$

a força por unidade de massa é então

$$\boxed{\frac{F}{m} = f = -\frac{\mu}{r^2}, \quad \mu \equiv GM} \quad (2.33)$$

onde se introduz a utilização do *parâmetro gravitacional*  $\mu$ .

Na realidade, a massa dos corpos centrais nunca aparece separada da constante universal da gravitação  $G$  e o que se consegue inferir das observações, com precisão elevada, é o valor de  $\mu$ . Para saber a massa dos astros é necessário conhecer o valor de  $G$ , que pode ser determinado através de experiências. Infelizmente a gravidade é uma força muito fraca e é difícil realizar experiências precisas. A constante universal da gravitação é das constantes fundamentais menos bem determinada, com um incerteza padrão relativa da ordem de  $10^{-5}$ . Além disso, há medições com incertezas que não se sobrepõem. O valor de  $G$  tem um papel importante em teorias da gravitação, cosmologia, física de partículas e modelos geofísicos, e não só interesse metrológico, mas do ponto de vista da mecânica orbital, é suficiente saber o valor de  $\mu$ .

### 2.1.9 Potencial gravítico e energia

O potencial é a energia potencial por unidade de carga. No caso da força gravítica a carga é a massa e pode ser escrito usando  $f$

$$U(r) = \int -f dr = \int_r^\infty \frac{-\mu}{\rho^2} d\rho = -\frac{\mu}{r}, \quad (2.34)$$

onde  $\rho$  é a variável muda de integração e se escolheu para referência o potencial ser nulo no infinito de modo a o potencial se anular quando a força é nula, i. e. quando não há interação e a partícula passa a estar livre.

A energia cinética  $T$  por unidade de massa é simplesmente  $T/m = \frac{1}{2}v^2$ , no que resulta, usando (2.34), que a energia por unidade de massa  $\mathcal{E}$  se escreve

$$\mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}. \quad (2.35)$$

### 2.1.10 Solução para força central gravítica

Reconhecendo, como fizemos antes, que a dependência no tempo de  $r, \theta$  e suas derivadas pode ser expressa através de variáveis intermédias que dependam do tempo, tipicamente  $r(t)$  ou  $\theta(t)$ , podemos utilizar o teorema da derivada da função composta para nos ajudar a mudar de variáveis no problema.

Com a mudança de variável  $u = 1/r$ , e a conservação do momento angular  $\dot{\theta} = h/r^2$  de (2.10), podemos escrever

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{h}{r^2} = -h \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) = -h \frac{du}{d\theta} \quad (2.36)$$

ou seja

$$\dot{r} = -h \frac{du}{d\theta}. \quad (2.37)$$

Similarmente, usando (2.37),

$$\ddot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left( -h \frac{du}{d\theta} \right) = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \quad (2.38)$$

ou seja,

$$\boxed{\ddot{r} = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}} \quad (2.39)$$

Podemos utilizar (2.39) na equação do movimento (2.12) para obter

$$-h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - h^2 u^3 = -\mu u^2, \quad (2.40)$$

que, uma vez dividido por  $-h^2 u^2$ , resulta finalmente (para  $u \neq 0$ ) em

$$\boxed{\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}}, \quad (2.41)$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem, linear, não homogénea, de coeficientes constantes e variável dependente  $u$  e variável independente  $\theta$ .

A solução geral de (2.41) é a solução geral da equação homogénea  $u_h$  somada a uma solução particular da de (2.41),  $u_p$ ,

$$u = u_h + u_p. \quad (2.42)$$

No caso presente, é trivial verificar que a constante

$$\boxed{u_p = \frac{\mu}{h^2}} \quad (2.43)$$

verifica (2.41), sendo portanto uma sua solução particular. Para determinar a solução da homogénea  $u_h$  pode-se ensaiar como solução a função  $u_h = Ce^{\lambda\theta}$ . Substituindo esta função na versão homogénea de (2.41) obtém-se a *equação característica*

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i, \quad (2.44)$$

determinando os expoentes, que neste caso são imaginários puros, determinando as duas funções linearmente independentes. A solução geral da equação homogénea é então

$$u_h = Ae^{i\theta} + Be^{-i\theta} = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta, \quad (2.45)$$

com  $C_1 = A + B, C_2 = i(A - B)$ , conjuntos equivalentes de constantes de integração a serem determinadas pelas condições iniciais. É sempre possível fazer a transformação das constantes  $C_1, C_2$  para  $C, \beta_0$ :

$$C_1 = C \cos \beta_0, \quad C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad (2.46a)$$

$$C_2 = C \sin \beta_0, \quad \beta_0 = \arctan \frac{C_2}{C_1}, \quad (2.46b)$$

já que é sempre possível resolver (2.46) para obter as novas constantes. Substituindo  $C_1, C_2$  em (2.45) por  $C, \beta_0$  usando (2.46), obtém-se a solução geral da equação homogénea

$$u_h = C(\cos \theta \cos \beta_0 + \sin \theta \sin \beta_0) = C \cos(\theta - \beta_0), \quad (2.47)$$

onde se utilizou a bem conhecida igualdade trigonométrica  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ .

A solução da equação do movimento que resulta, pelas variáveis utilizadas, na equação da trajectória, é

$$u = \frac{1}{r} = u_h + u_p = C \cos(\theta - \beta_0) + \frac{\mu}{h^2}, \quad (2.48)$$

onde  $C, \beta_0$  são constantes de integração a determinar.

### 2.1.11 Determinação da constante de integração $C$

A energia por unidade de massa  $\mathcal{E} \equiv E/m$  escreve-se, lembrando que  $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + h^2/r^2$  e (2.37) e usando a equação da trajectória (2.48)

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{h^2}{2} \left[ \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] - \mu u \\ &= \frac{h^2}{2} \left[ C^2 \sin^2 \theta + \frac{\mu^2}{h^4} + C^2 \cos^2 \theta + \frac{2\mu C}{h^2} \cos \theta \right] - \frac{\mu^2}{h^2} - \mu C \cos \theta \\ &\quad \frac{h^2}{2} \left[ C^2 - \left( \frac{\mu}{h^2} \right)^2 \right] + \underbrace{\frac{h^2 2\mu C}{2h^2} \cos \theta - \mu C \cos \theta}_{=0} \\ &= \frac{h^2}{2} \left[ C^2 - \left( \frac{\mu}{h^2} \right)^2 \right], \quad (2.49) \end{aligned}$$

ou seja, a constante  $C$  está relacionada com a energia e o momento angular.

Definindo uma nova constante de integração à custa de  $C$  como sendo

$$e = \frac{Ch^2}{\mu}, \quad (2.50)$$

pode-se escrever

$$C^2 = \left( \frac{\mu}{h^2} \right)^2 e^2, \quad (2.51)$$

e de (2.49) e (2.51) conclui-se que

$$\boxed{e = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}h^2}{\mu^2}}}. \quad (2.52)$$

A nova constante  $e$ , determinada pelas constantes de integração da equação da trajectória, tem uma relação directa com a energia e o momento angular em relação a 0 (por unidade de massa), que são constantes do movimento.



### 2.1.12 Solução das Órbitas Keplerianas

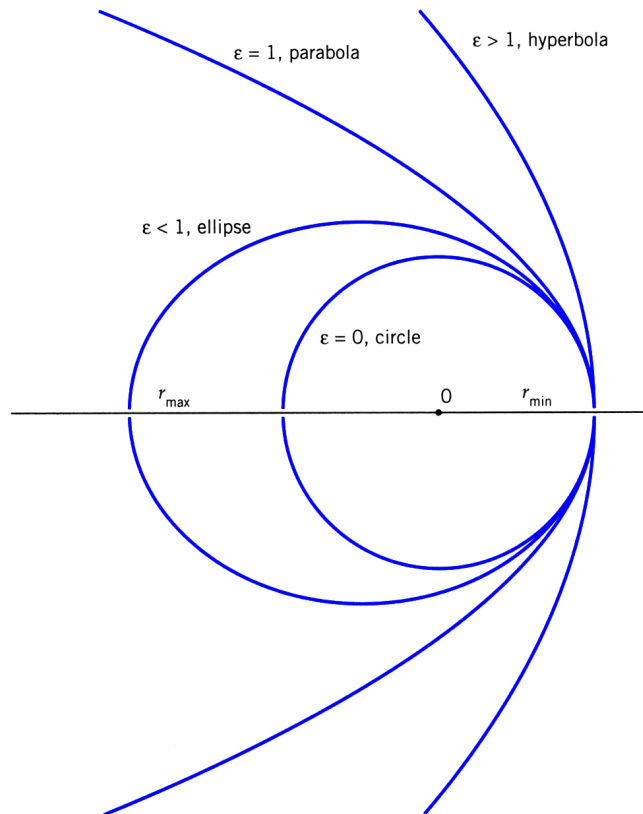
Sem nenhuma perda de generalidade, a equação do movimento (2.48) pode ser reescrita em função da nova constante  $e$  definida por (2.50) como

$$u = 1/r = \frac{1 + Ch^2/\mu \cos(\theta - \beta_0)}{h^2/\mu} = \frac{1 + e \cos(\theta - \beta_0)}{h^2/\mu}, \quad (2.53)$$

ou

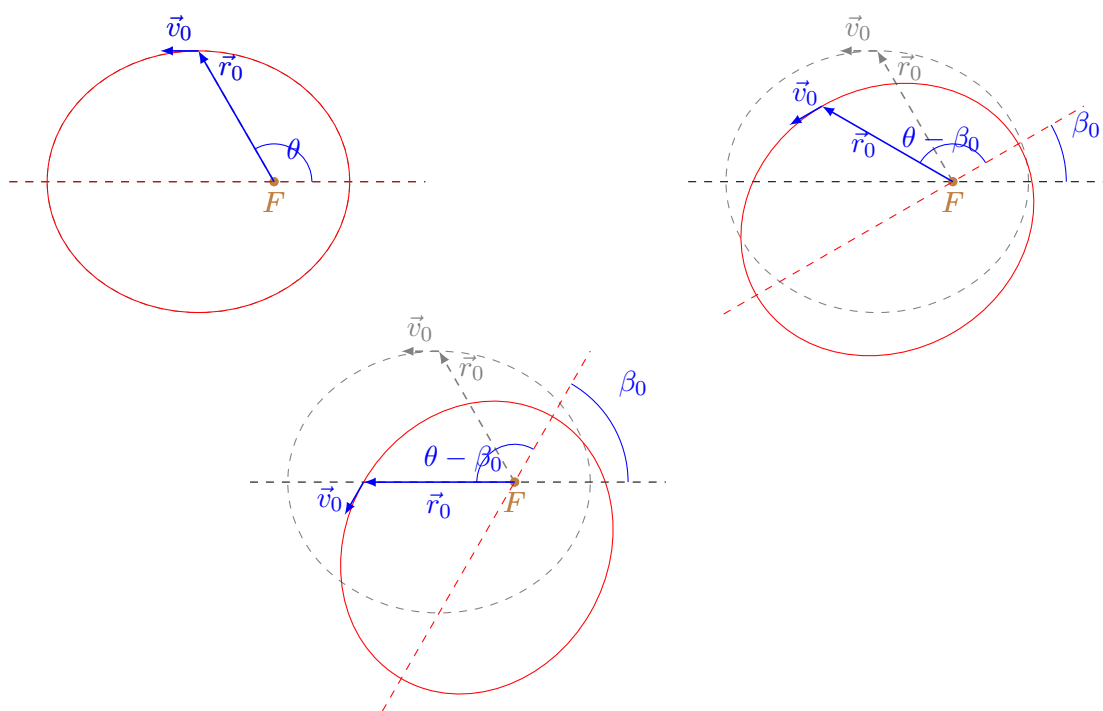
$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos(\theta - \beta_0)}, \quad (2.54)$$

reconhecendo-se que a equação da trajectória representa uma *cónica*, com um dos seus focos localizado na origem, sendo  $e$  identificado com *excentricidade*, parâmetro das curvas cónicas com significado geométrico (cf. Figura 2.3).



**Figura 2.3:** Efeito da excentricidade  $e$  na forma da cónica. Fonte: Chow.

Pode agora também compreender-se o efeito de  $\beta_0$  (Figura 2.4). A constante de integração  $\beta_0$  apenas altera a orientação da trajectória no plano do movimento, rodando-a no sentido directo quando o seu valor aumenta.



**Figura 2.4:** Efeito do  $\beta_0$  na orientação da órbita. Quanto maior  $\beta_0 > 0$ , mais a órbita roda no sentido directo.

Note-se que embora já se tenha obtido a trajectória, ela é apenas parte da solução. Ainda não sabemos onde se encontra a partícula na trajectória em cada instante i. e.  $r(t)$  ou  $\theta(t)$  (será fácil obter o outro, sabendo qualquer um deles). Esse problema será tratado mais tarde.

## 2.2 O problema dos 2 corpos

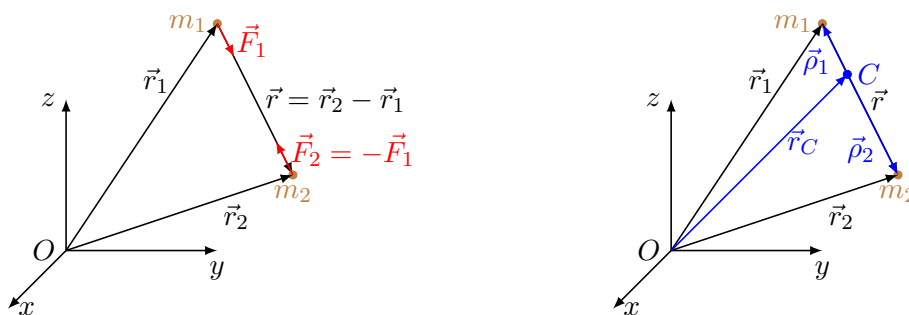
### 2.2.1 Introdução

Antes de avançar para a resolução completa do problema de força central, podemos tratar do problema dos 2 corpos já que, como veremos, ambos estão intimamente ligados.

Considere-se então um sistema de  $n$  corpos com  $n = 2$ , de massas  $m_1$  e  $m_2$  isolados no espaço, sujeitos apenas à força de atracção gravítica mútua (cf. Figura 2.5). Seguindo a notação da § 1.6, seja  $\vec{r}_i$  a posição do corpo  $i$  num referencial de inércia,  $\vec{F}_i$  a força que actua no corpo  $i$  e

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad (2.55)$$

o vector relativo de  $m_1$  para  $m_2$  i. e. a posição de  $m_2$  relativamente a  $m_1$ . As equações



**Figura 2.5:** (a) Dois corpos num referencial atraídos mutuamente por uma força, por exemplo a gravidade; (b) As posições dos corpos podem ser descritas à custa do centro de gravidade e das posições relativas a este.

do movimento são:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1, \quad (2.56a)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2, \quad (2.56b)$$

onde, pela 3ª Lei de Newton,

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1. \quad (2.57)$$

Pela definição (1.90) o centro de massa é, neste caso,

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m}}, \quad m \equiv m_1 + m_2, \quad (2.58)$$

onde  $m$  é a massa total do sistema. Os integrais do movimento válidos para o problema de  $n$  corpos serão válidos neste caso particular de  $n = 2$ , como vamos verificar.

O movimento do centro de massa é um integral do movimento. Seguindo o procedimento da § 1.6.2, somando as equações do movimento

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 = m \ddot{\vec{r}}_C, \quad (2.59)$$

pois  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ . Tem-se então  $\ddot{\vec{r}}_C = 0$ , que se integra imediatamente para

$$\boxed{\vec{r}_C = \vec{r}_{C0} + \vec{v}_{C0}t}, \quad (2.60)$$

que, como era esperado, tem movimento retilíneo e uniforme, o que significa que está parado na origem de um determinado referencial de inércia. Se usarmos esse referencial, a posição  $\vec{r}_C$  do centro de massa será nula e desaparecerá das equações, bastando recuperar (2.60) para localizar o sistema.

### 2.2.2 Mudança de Coordenadas

Como vimos na § 2.2.1 é conveniente utilizar a posição do centro de massa. Observando (2.55) e (2.58), concluímos que há uma relação biunívoca entre as posições  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  das

partículas no referencial de inércia utilizado e as posições do centro de massa  $\vec{r}_C$  e posição relativa das partículas  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , o que significa que os primeiros podem ser eliminados e substituídos pelos segundos. Utilizando (2.55) para eliminar  $\vec{r}_2$  de (2.58), consegue-se escrever  $\vec{r}_1$  em função de  $\vec{r}_C, \vec{r}$ ,

$$m\vec{r}_C = m_1\vec{r}_1 + m_2(\vec{r} + \vec{r}_1) \Leftrightarrow m\vec{r}_1 = m\vec{r}_C - m_2\vec{r}, \quad (2.61)$$

e idem para o caso de  $\vec{r}_2$ . Tem-se então que:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_C - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \quad (2.62a)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_C + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}, \quad (2.62b)$$

com  $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$ , por definição de  $\vec{\rho}_i$ , i. e.

$$\vec{\rho}_i \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_C, \quad i = 1, 2, \quad (2.63)$$

é o vector posição de cada corpo relativamente ao centro de massa  $C$ . As expressões (2.62) e (2.63) mostram que os  $\vec{\rho}_i$  são uma percentagem constante do vector relativo  $\vec{r}$ . Também ajudam a perceber que o centro de massa  $C$  está sempre na linha que une os dois corpos i. e. sobre  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . É trivial verificar que  $\vec{r} = \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1$ .

A mudança de coordenadas de  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  para  $(\vec{r}_C, \vec{r})$  permite resolver imediatamente metade do problema, a localização ao longo do tempo do centro de massa é determinada por (2.60) no referencial escolhido. Falta a evolução relativa ao centro de massa, ou seja, no referencial de inércia com origem em  $C$ , determinada por  $\vec{r}$  ou pelos  $\vec{\rho}_i$ .

### 2.2.3 Redução ao problema de força central

Nas novas coordenadas  $(\vec{r}_C, \vec{r})$ , as equações do movimento escrevem-se como:

$$\vec{F}_1 = m_1\ddot{\vec{r}}_1 = m_1 \underbrace{\ddot{\vec{r}}_C}_{=0} - m_1 \frac{m_2}{m} \ddot{\vec{r}} = -\frac{m_1 m_2}{m} \ddot{\vec{r}}, \quad (2.64a)$$

$$\vec{F}_2 = m_2\ddot{\vec{r}}_2 = m_2 \underbrace{\ddot{\vec{r}}_C}_{=0} + m_2 \frac{m_1}{m} \ddot{\vec{r}} = \frac{m_2 m_1}{m} \ddot{\vec{r}}, \quad (2.64b)$$

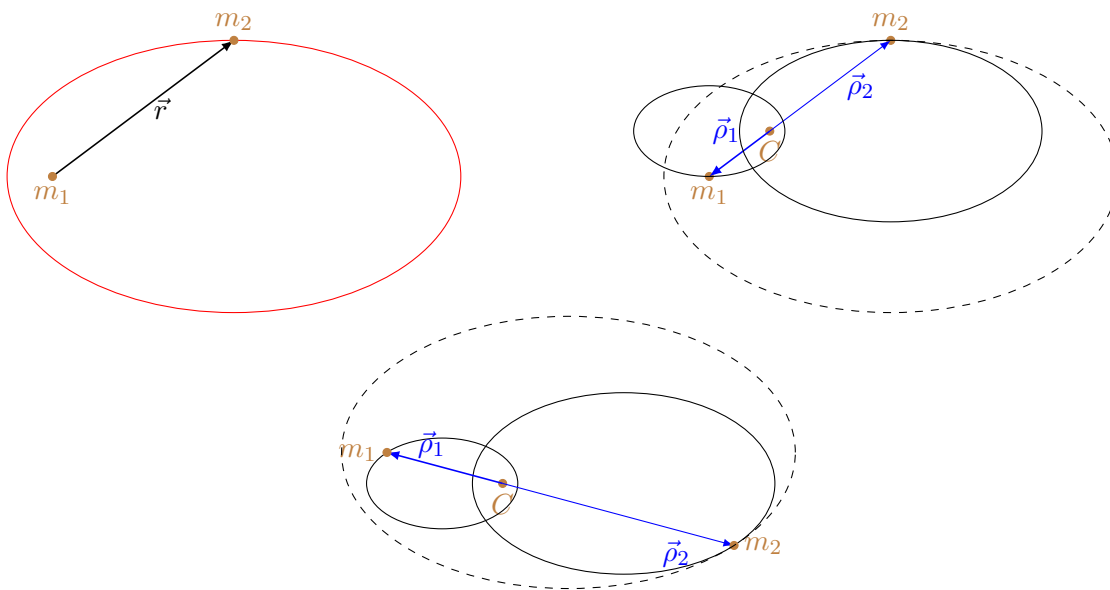
e é imediato verificar que, como  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$  (Lei da acção/reacção), as equações (2.64) resultam exactamente na mesma equação, o que não deve estranhar porque uma vez que informação já foi extraída sobre a evolução do centro de massa, não poderíamos ter o mesmo número de equações independentes. Substituindo a força da gravidade

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = -\frac{Gm_1 m_2}{r^3} \vec{r}, \quad (2.65)$$

em (2.64) e reorganizando os termos resulta em

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} = -\frac{Gm}{r^2} \vec{e}_r}, \quad (2.66)$$

que é similar à de força central. A solução é uma cónica, como no caso de força central, com (cf. Figura 2.6):



**Figura 2.6:** (a) A massa  $m_2$  descreve uma elipse quando observada de  $m_1$ , estando esta num dos focos; (b) do ponto de vista do referencial do centro de massa ambas descrevem elipses proporcionais à original; (c) as partículas movem-se sempre com o centro de massa entre elas e a uma distância proporcional; a elipse relativa move-se como um todo, sem rodar, de modo a que o seu foco acompanhe  $m_1$  e  $m_2$  esteja sempre sobre ela.

- A massa da partícula em força central passa a ser a soma das massas dos dois corpos  $m = m_1 + m_2$ .
- O vector posição  $\vec{r}$  é a posição relativa de  $m_2$  no referencial que acompanha  $m_1$  mas que não roda (porque as derivadas temporais não foram transformadas).
- A cónica solução da equação é a descrita por  $m_2$  relativamente a  $m_1$ .

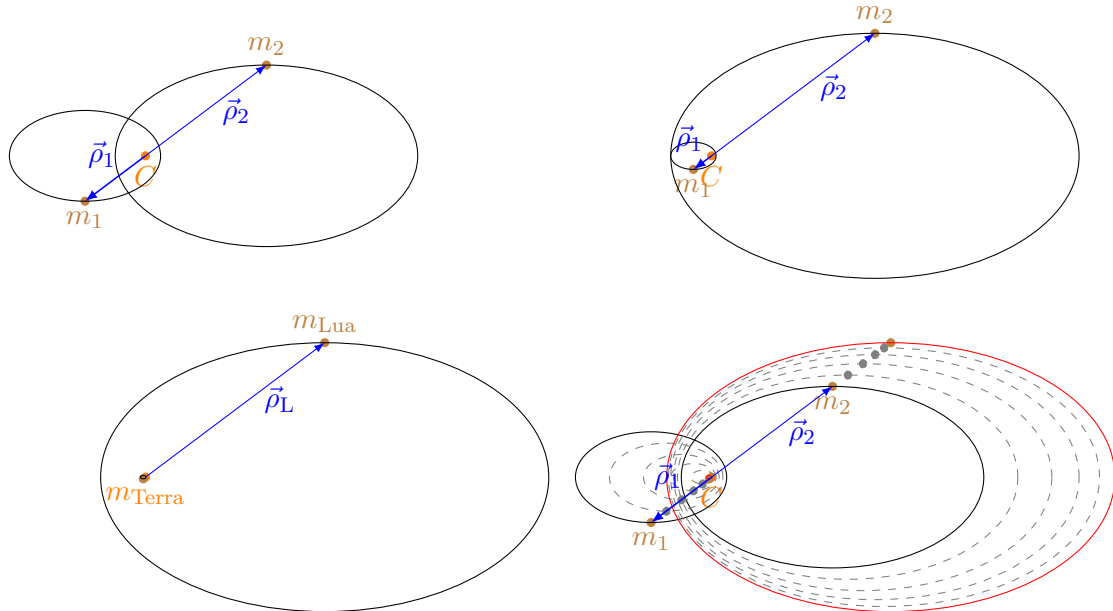
#### 2.2.4 Trajectórias no referencial do centro de massa $C$

Após se verificar que a solução do problema de dois corpos é similar ao de força central, há que sublinhar algumas características e diferenças. A partícula  $m_2$  descreve uma cónica relativamente a  $m_1$  mas também vice-versa. A posição de cada partícula  $i$  no referencial de  $C$  é dada por  $\vec{\rho}_i$ , que são, cada um deles, uma percentagem constante do comprimento de  $\vec{r}$ . Isto significa que a trajectória de cada partícula no referencial de  $C$  é também uma cónica similar i. e. com as mesmas propriedades mas dimensões diferentes. As partículas descrevem cónicas com a mesma excentricidade, estando uma rodada  $\pi$  relativamente à outra<sup>1</sup>, sendo  $C$  o foco de ambas.

Quanto maior a razão das massas  $m_1/m_2$  menor será a cónica descrita por  $m_1$  e

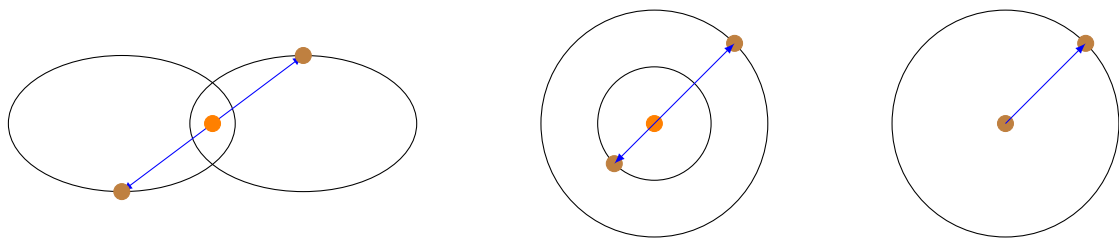
<sup>1</sup>Tinha que ser assim, já que estando  $C$  parado no foco, quando uma se aproxima, a outra também tem que se aproximar, e vice-versa.

maior a descrita por  $m_2$ ; no limite  $m_1 \rightarrow \infty$  esta estará parada no foco  $C$  e ter-se-á o caso limite de força central (cf. Figura 2.7).



**Figura 2.7:** Órbitas do problema dos dois corpos para várias razões de massas: (a)  $m_1/m_2 = 2$ ; (b)  $m_1/m_2 = 9$ ; (c)  $m_1/m_2 = 80$  (caso Terra-Lua) e (d) visualização simultânea de  $m_1/m_2 = 2-80$  passando por  $m_1/m_2 = 3, 5, 9, 19$ .

No caso de massas iguais, as órbitas de ambas serão iguais (apenas rodadas  $\pi$ ). Se uma órbita for circular, a outra também será e as partículas estarão sempre opostas relativamente ao ponto central  $C$ . Se  $m_1 \rightarrow \infty$  teremos novamente força central com o raio da órbita de  $m_2$  igual a  $r$  (cf. Figura 2.8).



**Figura 2.8:** Casos especiais ou limite: (a) Se as massas são iguais, as órbitas são iguais (uma rodada  $\pi$  relativamente à outra); (b) se uma órbita é circular, a outra também (as órbitas são sempre semelhantes); (c) quanto maior a diferença das massas, maior a diferença do tamanho das órbitas; no caso de  $m_1 \gg m_2$  temos o limite de força central originada por  $m_1$ .

## 2.3 Órbitas Keplerianas

### 2.3.1 Geometria das Secções Cónicas

Antes de prosseguir vale a pena rever a geometria das secções cónicas e suas propriedades. As curvas cónicas surgem da intersecção de um plano com um cone (de duas folhas e secção circular). Dependendo da inclinação do plano, a intersecção resultará numa elipse (ou circunferência), numa parábola, ou numa hipérbole. A inclinação do plano relativamente ao eixo do cone determina o tipo de cónica que se obtém (cf. Figura 2.9). A

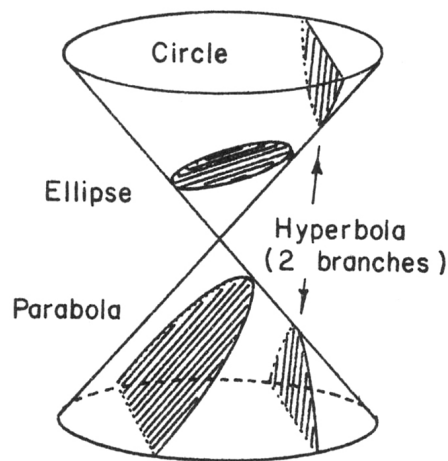


Figura 2.9: Geometria das secções cónicas [6].

circunferência é um caso especial da elipse que se obtém quando o plano é perpendicular ao eixo do cone. A parábola obtém-se quando o plano tem a mesma inclinação da geratriz do cone. As elipses e as hipérboles têm dois eixos de simetria, as parábolas apenas um, e as circunferências um número infinito.

É comum as cónicas serem descritas num referencial dos eixos de simetria  $XY$  com origem na intersecção 0. Nesse referencial, as equações que descrevem as cónicas são:

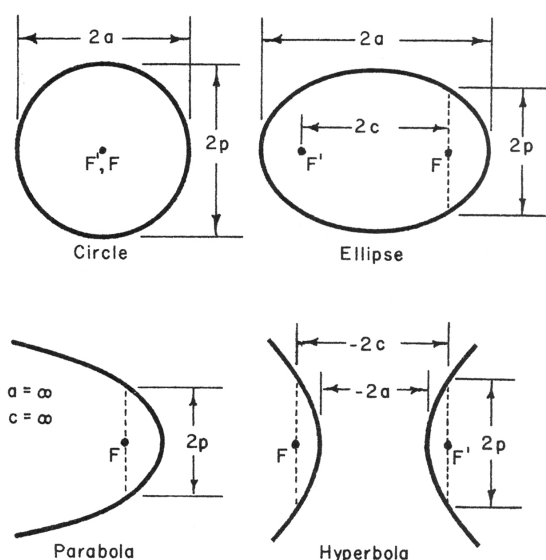
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{elipses}), \quad (2.67a)$$

$$X \pm Y^2 = 0 \quad (\text{parábolas}), \quad (2.67b)$$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{hipérboles}), \quad (2.67c)$$

onde a circunferência se obtém das elipses quando  $a = b = r$  e as parábolas foram escritas com eixo de simetria em  $X$  para manter consistência.

Como vamos ver, a referência conveniente em mecânica orbital é um dos focos, relativamente ao qual se definem muitas características. Utilizando a Figura 2.10 como referência, podemos ver a localização dos focos  $F, F'$ , que permitem definir a distância  $p$  à curva na vertical da figura. No referencial  $OXY$  os pontos da elipse [hipérbole]



**Figura 2.10:** Cónicas no plano [6].

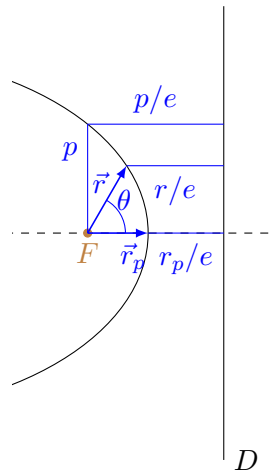
na vertical dos focos têm coordenadas  $(\pm c, \pm p)$ . Note-se que nas hipérbolas a ordem dos focos está trocada i. e.  $F$  está à esquerda: os parâmetros  $a, c$  são aqui considerados negativos por conveniência que se tornará óbvia mais à frente. O parâmetro  $a$  está relacionado com a distância máxima (nas elipses; nas hipérbolas será a mínima) entre pontos da curva e designa-se *semi-eixo maior*, já que vale metade do maior eixo na elipse. O parâmetro  $c$  mede a distância entre focos, logo  $c < a$  (e esta relação mantém-se verdadeira em hipérbolas porque nesse caso são ambos negativos).

Podemos tentar perceber intuitivamente porque os parâmetros podem ser definidos negativos e porque razão os focos estão trocados nas hipérbolas. Se começarmos com uma elipse, afastemos o foco  $F'$  de  $F$  ou seja, desloquemos  $F'$  para a esquerda. O semi-eixo maior  $a$  e a distância entre focos  $c$  vão aumentar. Se  $F'$  se afastar para infinito, a elipse degenera numa parábola com  $a, c = \infty$ . Tentando ir para além de infinito ou virando o espaço do avesso  $f'$  dá a volta voltando para uma distância finita mas agora vindo da direita, e os parâmetros  $a, c$  são agora negativos.

### 2.3.2 Cónicas construídas utilizando a directriz

As curvas cónicas podem ser definidas a partir da relação entre um ponto — o foco  $F$  — e uma recta denominada directriz  $D$  (cf. Figura 2.11). A cónica é definida como a curva com pontos tais que a razão entre a distância ao foco  $F$  e a distância à directriz  $D$  é constante. A constante é a excentricidade  $e$ . O valor de  $e$  determina o tipo de cónica: elipses se  $e < 1$  (circunferências no caso limite de  $e = 0$ ), parábolas se  $e = 1$  (caso intermédio), ou hipérbolas se  $e > 1$ . O parâmetro  $p$  é a distância ao foco do ponto da curva que está na direcção perpendicular à directriz, relativamente ao foco, e é denominado *semi-latus rectum*.





**Figura 2.11:** Elipse gerada utilizando uma recta directriz  $D$ . Os pontos da elipse são todos os que se encontram a cada distância  $r$  do foco  $F$  e distância  $r/e$  da directriz  $D$ .

Utilizando coordenadas polares  $(r, \theta)$  com origem no foco:

$$x = r \cos \theta, \quad (2.68a)$$

$$y = r \sin \theta, \quad (2.68b)$$

e a definição da cónica utilizando um ponto genérico e o semi-latus rectus (correspondente a  $\theta = \pi/2$ , i. e. ao ângulo recto relativamente a  $D$ , cf. Figura 2.11), podemos escrever, usando (2.68a),

$$p/e = x + r/e, \quad (2.69)$$

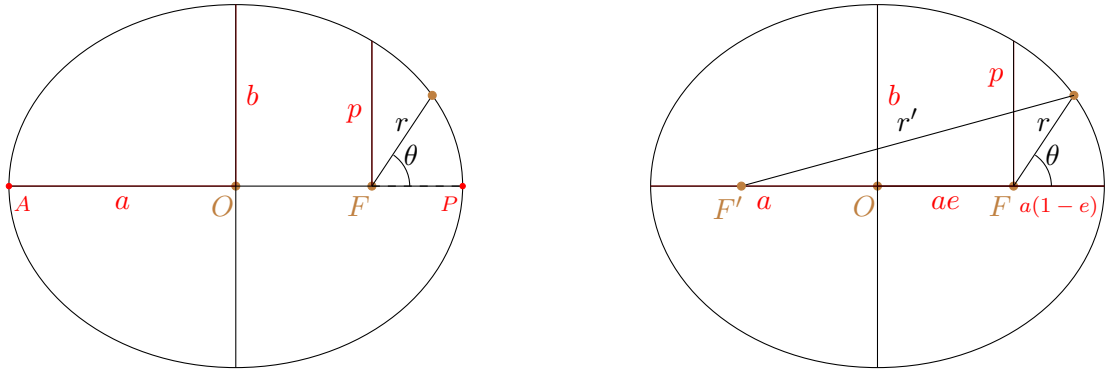
logo

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}}, \quad (2.70)$$

que é a equação geral das cónicas na mesma forma da equação da trajectória obtida em § 2.1.12 (com  $\beta_0 = 0$ , sem perda de generalidade), em função do semi-latus rectum  $p$  e da excentricidade  $e$ .

### 2.3.3 Elipses

Vamos agora passar revista a algumas das características das elipses (Figura 2.12). As elipses têm dois eixos de simetria, os eixos maior e menor. Os comprimentos dos *semi-eixos* (metade do eixo) maior e menor da elipse são, respectivamente,  $a$  e  $b$ . Mas como o astro central ou centro de massa está localizado num dos focos, a simetria do eixo menor é irrelevante em mecânica orbital i. e. é destruída já que os focos têm estatutos diferentes. O *semi-latus rectum*  $p$ , já referido, pode ser definido como a distância à curva na perpendicular do eixo maior ( $\theta = \pm 90^\circ$ ).



**Figura 2.12:** Designações e valores de alguns componentes geométricos da elipse.

Uma propriedade muito conhecida das elipses é que, para qualquer ponto  $P$  da curva, a soma das distâncias desse ponto a cada foco é constante, sempre igual ao eixo maior  $\bar{F}P + F'P = 2a$ . Isto permite desenhar elipses facilmente usando pontos fixos nos focos e uma linha flexível de comprimento  $2a$  ligada a esses pontos na extremidade.

A *linha das ápsides*<sup>2</sup>, definida pelo vector de Laplace-Runge-Lenz (cf. § 2.7), coincide com o eixo maior no caso das elipses mas é indefinida no caso de órbitas circulares porque nesse caso a excentricidade é nula. O nome tem origem no facto de os pontos da cónica mais próximo e mais afastado do foco do astro se localizarem no eixo maior. Por isso são designados, respectivamente, *Periápside* e *Apoápside*<sup>3</sup>. Nomes alternativos equivalentes também utilizados para o caso genérico são, respectivamente *pericentro* e *apocentro*. Nos casos de alguns astros específicos estes pontos tomam designações relacionadas: *perigeu* e *apogeu*<sup>4</sup> para o caso do astro central ser a Terra (*Geo*), *periélio* e *afélio*<sup>5</sup> no caso do Sol (*Hélios*). São ainda utilizados outros nomes específicos ou para classes em geral óbvios no contexto<sup>6</sup>.

É fácil mostrar que as ápsides são os pontos da elipse sobre o eixo maior e quanto vale a respectiva distância ao foco. Utilizado a equação da órbita (2.69),  $r$  é mínimo quando  $\theta = 0$  e máximo quando  $\theta = \pi$ , logo:

$$r_p = \frac{p}{1 + e}, \quad (2.71a)$$

$$r_a = \frac{p}{1 - e}, \quad (2.71b)$$

<sup>2</sup>Ápside (também está dicionarizado *apside*) tem origem no grego e significa extremo. Em Inglês, *apse line*, ou *line of apsides*.

<sup>3</sup>Periápside e apoápside designam-se *periapsis* e *apoapsis* em Inglês

<sup>4</sup>*Perigee* e *apogee*, em Inglês.

<sup>5</sup>*Perihelion* e *aphelion*, em Inglês, caso em que a origem da palavra é mais evidente.

<sup>6</sup>Por exemplo, em Inglês são utilizados *perilune* e *apolune*, quando o astro central é a Lua, *periastron* e *apastron* para estrela, etc. Muitos destes termos não estão dicionarizados em Português.

e como o eixo maior tem comprimento  $2a$ , tem-se

$$2a = r_a + r_p = \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} = \frac{2p}{1-e^2}, \quad (2.72)$$

ou seja

$$\boxed{p = a(1 - e^2)}. \quad (2.73)$$

De (2.71) e (2.73) obtém-se

$$\boxed{r_p = a(1 - e)}, \quad (2.74a)$$

$$\boxed{r_a = a(1 + e)}, \quad (2.74b)$$

de onde se pode concluir que a distância média ao foco é o semi-eixo maior  $a$ <sup>7</sup>. Por outro lado, a distância do centro da elipse  $O$  ao foco  $F$  adicionada à distância do foco à periápside é  $a$ ,  $\overline{OF} + r_p = a$ , logo

$$\boxed{\overline{OF} = ae}. \quad (2.75)$$

É também possível demonstrar que o semi-eixo menor da elipse é dado por

$$\boxed{b = a\sqrt{1 - e^2}}. \quad (2.76)$$

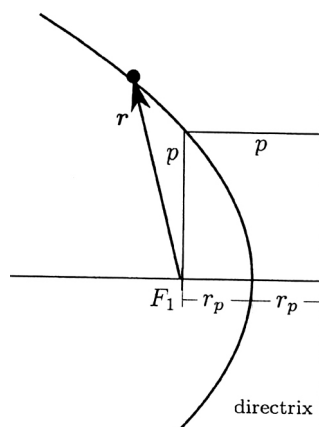
### 2.3.4 Parábolas

O caso das parábolas, correspondente à excentricidade ser exactamente igual à unidade  $e = 1$ , é um caso singular, útil para problemas de treino mas irrelevantes na prática. Efectivamente, na prática é virtualmente impossível uma órbita que mantenha exactamente o valor  $e = 1$  porque há sempre outras forças, por muito pequenas que sejam, que alterarão o valor da excentricidade, transformando a órbita numa elipse  $e \lesssim 1$  ou numa hipérbole  $e \gtrsim 1$ , que têm propriedades claramente diferentes da parábola. Esta é portanto instável. A situação é ainda pior, no caso de determinação de órbitas, os parâmetros têm sempre um erro de observação. Se a barra de erro da excentricidade inclui o valor  $e = 1$ , fica-se sem saber que tipo de órbita se tem, e portanto se é um movimento periódico ou não. Esta situação é comum na determinação de objectos do sistema solar em que as observações podem ser difíceis e por conseguinte pouco precisas. Só com uma melhoria das observações se consegue fazer diminuir a sua incerteza, e eventualmente conseguir determinar o tipo de órbita.

A parábola é uma curva aberta que se estende até infinito, o que significa que não tem apoápside, apenas periápside. A razão das distâncias de um ponto da curva ao foco e à directriz é neste caso  $e = 1$  e podemos usar a periápside como referência (cf. Figura 2.13), ou seja,

$$r_p = \frac{p}{2}, \quad (2.77)$$

<sup>7</sup>Apenas no sentido de ser a distância do meio do intervalo de todas as distâncias possíveis, i. e.



**Figura 2.13:** Parábola [50].

e a equação da trajectória escreve-se, neste caso,

$$r = \frac{2r_p}{1 + \cos \theta}. \quad (2.78)$$

### 2.3.5 Hipérbole

O caso das órbitas hiperbólicas  $e > 1$  partilha muitas das características das elipses, com as devidas diferenças. Muitas vezes, quando as suas propriedades são discutidas, ambos os ramos que se obtêm da intersecção com o cone de folha dupla são desenhados, como na Figura 2.14, mas obviamente a trajectória corresponde apenas à curva do foco relevante, neste caso a curva da esquerda de modo a estar directamente de acordo com a equação da trajectória (2.70) (para utilizar a outra seria necessário fazer  $\beta_0 = \pi$ ).

Há um conjunto de resultados relevantes, similares ao caso de elipses, desde que se considere  $a < 0$ . Por exemplo, tem-se

$$p = a(1 - e^2) = (-a)(e^2 - 1) = |a|(e^2 - 1), \quad (2.79)$$

sendo que os autores que consideram o parâmetro  $a > 0$  escreverão  $p = a(e^2 - 1)$ , ou seja a fórmula diferirá do caso das elipses por um sinal. A convenção  $a < 0$  para hipérboles adoptada aqui unifica um conjunto de equações, como (2.79) ou, por exemplo,

$$r_p = a(1 - e). \quad (2.80)$$

Outras terão sempre diferenças, como

$$b = a\sqrt{e^2 - 1}. \quad (2.81)$$

---

distância média geométrica. O corpo passa mais tempo mais longe que mais perto, se pesarmos a distância com o tempo a média será superior.

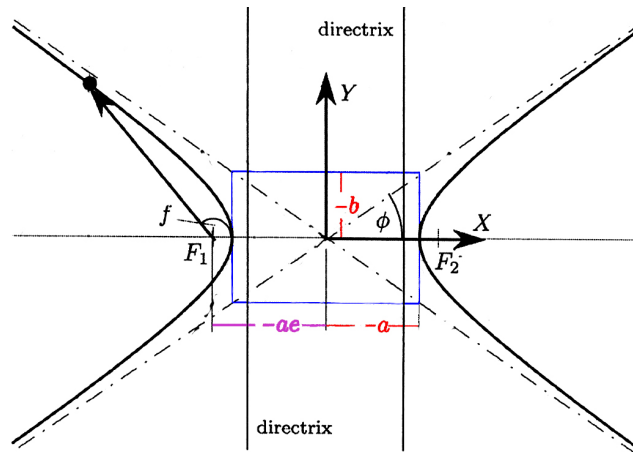


Figura 2.14: Hipérbole [50].

Em geral, quando se considera  $a > 0$  para hipérboles, os factores  $(1 - e)$  e  $(1 - e^2)$  surgem alterados para  $(e - 1)$  e  $(e^2 - 1)$ . A utilização de  $a < 0$  unifica quase todos os casos, com muito poucas excepções, como (2.81).

Uma característica importante das hipérboles é a existência de assíntotas, ou seja, a órbita não só é aberta como nem todos os ângulos  $\theta$  são possíveis. De (2.70) é fácil verificar que  $r \rightarrow \infty$  quando  $e \cos \theta \rightarrow -1$ , ou seja,

$$\theta_{\infty} = \arccos \left( -\frac{1}{e} \right), \quad (2.82)$$

que tem duas soluções, correspondendo às duas assíntotas que saem da origem para o lado esquerdo da Figura 2.14. No limite, o vector posição será paralelo à assíntota, logo o ângulo  $\phi$  da assíntota (na parte superior esquerda da figura, para fixar ideias) com (a parte negativa do) eixo  $x$  será  $\phi = \pi - \theta_{\infty} < \pi/2$  porque o argumento do arccos é sempre negativo.

### 2.3.6 Órbitas de astros

Revistas as propriedades geométricas das cónicas estamos em condições de recuperar as soluções dos problemas de dois corpos ou de força central, relacionando as constantes do movimento dependentes de condições iniciais com os parâmetros geométricos.

#### 2.3.6.1 Excentricidade e energia

A equação (2.52), repetida aqui,

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}h^2}{\mu^2}},$$

mostra que a energia específica o tipo de órbita, pois determina a excentricidade, ou vice-versa:

- Órbitas elípticas:  $e < 1 \Rightarrow \mathcal{E} < 0$  ( $2\mathcal{E} = -(\mu/h)^2$  se a órbita for circular  $e = 0$ ).
- Órbitas parabólicas:  $e = 1 \Rightarrow \mathcal{E} = 0$ .
- Órbitas hiperbólicas:  $e > 1 \Rightarrow \mathcal{E} > 0$ .

Da equação da energia (2.35)

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \frac{v_\infty^2}{2}, \quad (2.83)$$

de onde se conclui que:

- $\mathcal{E} > 0$ , a partícula escapa para infinito e chega lá com velocidade.
- $\mathcal{E} = 0$ , a partícula chega a infinito com velocidade nula.
- $\mathcal{E} < 0$ , a partícula não pode escapar da atracção da massa central.

### 2.3.6.2 Semi-eixo maior e energia

Comparando a solução da trajectória (2.54), obtida nos problemas de força central ou dois corpos, com a equação das cónicas (2.70) que surge da geometria, e lembrando (2.73), obtém-se uma relação entre o semi-latus rectum, ou  $(a, e)$ , e o momento angular e parâmetro gravitacional

$$p = a(1 - e^2) = \frac{h^2}{\mu}. \quad (2.84)$$

Combinando  $a(1 - e^2) = h^2/\mu$  de (2.84) com a expressão da excentricidade (2.52) em função da energia e momento angular, e eliminando o momento angular,

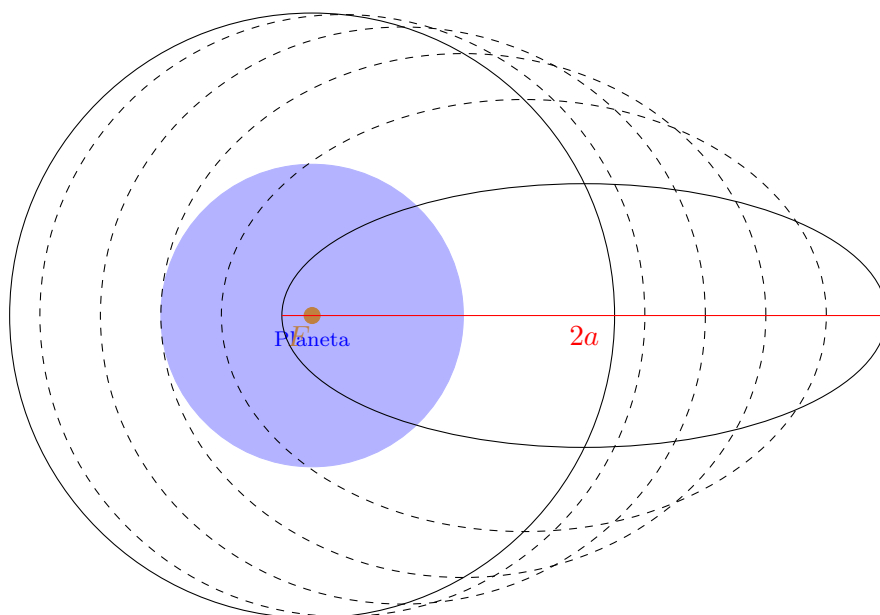
$$e = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}h^2}{\mu^2}} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\mu^2}{2h^2}(e^2 - 1) = \frac{\mu(e^2 - 1)}{2a(1 - e^2)}, \quad (2.85)$$

obtém-se

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu}{2a} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}, \quad (2.86)$$

válida para todos os tipos de órbitas, e onde se usou (2.35) para realçar a relação com  $v$  e  $r$ . Em órbita parabólicas,  $a = \infty \Rightarrow \mathcal{E} = 0$ , e em órbitas hiperbólicas  $a < 0 \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{\mu}{2a} = \frac{\mu}{2|a|}$ .

A expressão (2.86) mostra que a energia apenas depende do semi-eixo maior da órbita, independentemente da excentricidade, aumentando sempre, embora de modo não-linear com este, independentemente do tipo de cónica. Usando o caso de força central e uma órbita elíptica para ilustração (cf. Figura 2.15), há sempre uma massa no foco, cuja



**Figura 2.15:** Órbitas elípticas de igual energia ( $e$  e semi-eixo maior) e excentricidade  $e = 0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ , respectivamente da mais redonda para a mais oblonga. À medida que a excentricidade aumenta consegue-se ir mais alto com a mesma energia mas vai-se também mais baixo. Se a periápside se encontra abaixo do raio do planeta o voo é necessariamente limitado (esse caso designa-se por voo sub-orbital).

localização relativamente à trajectória depende de  $e$ . Podemos observar utilizando (2.86) que para energia constante o semi-eixo maior (num certo sentido, as dimensões da órbita) é também constante. No entanto, de (2.74) podemos observar que a periápside estará cada vez mais baixa e a apoápside cada vez mais alta. Pode então atingir-se altitudes mais elevadas com a mesma energia (com um limite em teoria de  $2a$ ) mas à custa de baixar o ponto mais baixo da órbita, que eventualmente atingirá a superfície do astro central, ou a atmosfera, se esta existir. Órbitas que intersectam o astro central podem ser usadas para visitar o espaço utilizando pouca energia (o denominada *voo sub-orbital*), mas não conseguirão entrar em órbita, voltando imediatamente para a superfície.

Outra consequência interessante é que as trajectórias de energia mais baixa que conseguem orbitar um corpo central são órbitas circulares. Efectivamente, imaginemos que há uma altitude mínima abaixo da qual não se conseguirá orbitar o astro devido à atmosfera ser demasiado densa, ou devido à superfície em corpos sem atmosfera. Por (2.74a), a altitude mínima para um mesmo  $a$  será máxima para  $e = 0$ . Deve também reparar-se que, se se pretende injectar um satélite em órbita circular baixa, e uma vez que há sempre erros, devemos assegurar uma precisão elevada na excentricidade, já que um pequeno desvio pode fazer descer o satélite a uma altitude demasiado baixa onde cairá. Por exemplo, para uma órbita baixa de altitude 250 km, se  $e \gtrsim 0.015$ , ou até menor, a órbita deverá cair muito rapidamente.

A igualdade (2.84) pode ser substituída na equação da órbita (2.70) para a escrever

utilizando  $(a, e)$ , que é uma forma frequente

$$\boxed{r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}} \quad (2.87)$$

### 2.3.6.3 Equação *vis-viva*

Igualando as expressões da energia (2.35) e (2.86) tem-se

$$-\frac{\mu}{2a} = \mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}, \quad (2.88)$$

e resolvendo em ordem à velocidade  $v$  obtém-se

$$\boxed{v = \sqrt{2\mu \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)}} \quad (2.89)$$

conhecida como a equação *vis-viva* (da força viva), termo da História da Mecânica quando o conceito de energia estava a ser desenvolvido. Esta equação é fundamental para estudar as *manobras orbitais*, como veremos no Capítulo 4. Analisando (2.89) é imediato ver que em cada órbita de semi-eixo  $a$  em torno de um astro de parâmetro  $\mu$ , a velocidade depende apenas da distância ao astro central (foco), e será tanto maior quanto menor essa distância, e vice-versa. Também é imediato ver (ou da equação da energia) que a *velocidade de escape*, a velocidade mínima a uma certa distância que permite chegar a infinito, i. e. escapar, só depende da altitude e não da direcção da velocidade. A energia mínima que permite atingir infinito é  $\mathcal{E} = 0 \Leftrightarrow a = \infty$ , logo

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}. \quad (2.90)$$

### 2.3.7 Leis de Kepler revisitadas

Podemos recuperar as leis de Kepler como consequência das leis de Newton no problema de força central ou dos dois corpos:

#### Leis de Kepler

- 1<sup>a</sup> *Todos os planetas descrevem órbitas elípticas com o Sol num dos focos.* — é uma consequência da geometria das cónicas, solução do problema (2.54), no caso  $e < 1$ , pág. 45.
- 2<sup>a</sup> *A linha que une o Sol aos planetas varre áreas iguais em tempos iguais.* — expressa a conservação do momento angular  $h = \text{Cte.}$ , como vimos na pág. 37.
- 3<sup>a</sup> *O quadrado do período orbital de um planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da sua órbita.*, ou seja  $T^2 \propto a^3$ , demonstrado a seguir.



**Demonstração da 3ª Lei de Kepler** Da 2ª Lei de Kepler, (2.9),

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{h}{2} = \text{Cte.}, \quad (2.91)$$

ou seja, podemos separar variáveis e integrar

$$\int dA = \frac{1}{2}h \int dt = \frac{1}{2}h(t - t_0), \quad (2.92)$$

onde no lado esquerdo o resultado da integração é imediato pois a função é constante. Se  $t - t_0 = T$ , com  $T$  o período orbital, então a área total inscrita na órbita  $\int dA = A_e$  é a área de elipse, logo

$$A_e = \pi ab = \frac{1}{2}hT \Rightarrow T = \frac{2\pi ab}{h}. \quad (2.93)$$

Lembrando (2.76),  $b = a\sqrt{1 - e^2}$ , e (2.84),  $p = \frac{h^2}{\mu} = a(1 - e^2)$ , e substituindo em (2.93) e simplificando, obtém-se

$$\boxed{T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}}, \quad (2.94)$$

ou seja  $T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu}a^3 = \text{Cte} a^3$  (resultado de Kepler, já que a notação moderna de expoentes racionais só apareceu posteriormente com Newton). Usando dois corpos, podemos eliminar a constante de proporcionalidade para escrever

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{a_1^3}. \quad (2.95)$$

O período orbital  $T$  só depende do semi-eixo maior, ou seja, da energia. Quanto maior a energia, maior a distância média e maior o período, i. e. planetas mais longínquos demoram mais tempo a revolucionar o astro central. Na realidade, embora não seja óbvio de (2.94) pois o espaço percorrido também é maior, planetas mais longínquos deslocam-se também mais lentamente.

## 2.4 A Equação de Kepler

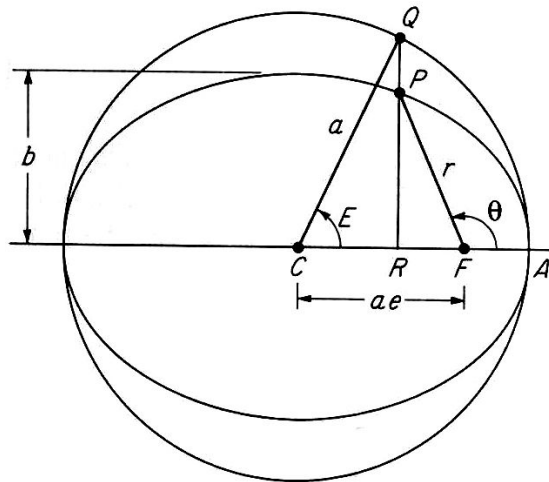
Após estudar as órbitas e as suas propriedades estamos finalmente em condições de prosseguir com a resolução completa do problema das órbitas Keplerianas, determinando a localização do corpo na órbita em função do tempo. Isso faz-se resolvendo a famosa equação de Kepler.

### 2.4.1 Anomalias verdadeira, excêntrica e média

Antes de resolver o problema é necessário introduzir algumas variáveis auxiliares como é o caso das *anomalias*, originalmente referente ao movimento aparente não uniforme

(i. e. anômalo) dos planetas. Ou seja, os planetas não eram encontrados no céu no local esperado, fazendo um ângulo relativamente ao observador entre o local esperado e o local encontrado no céu. Modernamente, anomalia significa simplesmente ângulo.

Preparando-nos para obter a posição em função do tempo, seja a circunferência auxiliar de raio  $a$  que inscreve uma órbita elíptica com o mesmo centro desta, de modo que toca na periápside e na apoápside (cf. Figura 2.16).



**Figura 2.16:** Anomalias verdadeira  $\theta$  e excêntrica  $E$ , indicadas com a ajuda da órbita e da circunferência auxiliar de raio  $a$  [7].

A *Anomalia Verdadeira* é o ângulo contado a partir da periápside. Na posição mostrada coincidirá com a coordenada polar  $\theta$ . Em geral será  $\theta - \beta_0$  (cf. (2.54) e Figura 2.4)

A *Anomalia Excêntrica*  $E$  é o ângulo central da circunferência auxiliar de raio  $a$  contado a partir da periápside, relacionado com a posição do satélite i. e. do ponto correspondente ao da órbita de anomalia verdadeira na linha perpendicular à linha das ápsides (cf. Figura 2.16).

A partir do período orbital (2.94) pode-se definir uma *velocidade de revolução média*  $n$  do satélite

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \quad (2.96)$$

para definir que a *Anomalia Média*  $M$  é o ângulo médio medido a partir da última passagem na periápside

$$\text{Def. } M : \quad M = n(t - T_0) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - T_0), \quad (2.97)$$

onde  $T_0$  é o instante em que o corpo passa na periápside, ou *tempo de passagem na periápside*. A anomalia média é proporcional ao tempo. Note-se que numa órbita circular as três anomalias coincidem já que nesse caso o foco coincide com o centro da circunferência e a área varrida passa a ser proporcional ao ângulo avançado.

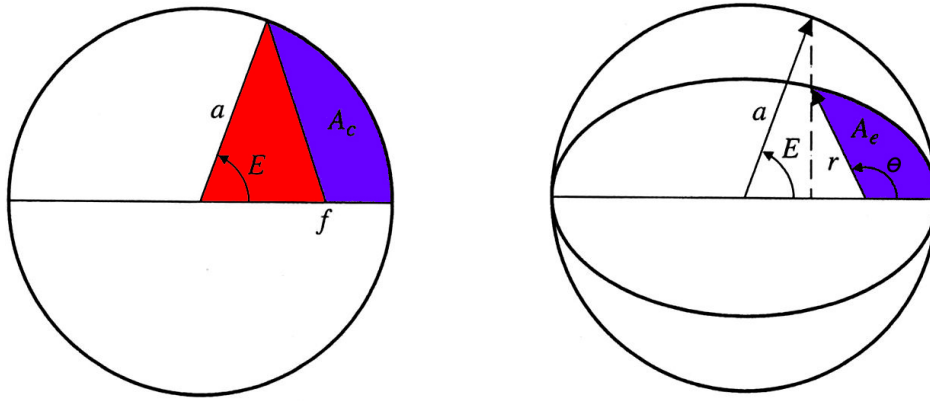
### 2.4.2 A equação de Kepler

É possível definir uma transformação afim do espaço — uma contracção linear do espaço i. e. proporcional à coordenada cartesiana — na direcção perpendicular à linha das ápsides. Essa mudança de escala transforma o círculo auxiliar de raio  $a$  na elipse que representa a trajectória se a contracção da coordenada  $y$  for  $b/a$  em que  $(a, b)$  são os semi-eixos maior e menor da elipse (cf. Figura 2.16). Como a mudança de escala se dá apenas numa dimensão, tanto os comprimentos como as áreas correspondentes serão escalados em  $b/a$ .

Observando a Figura 2.16, vemos que  $\overline{RQ}$  escala para  $\overline{RP}$  com

$$\overline{RP} = \frac{b}{a} \overline{RQ}, \quad (2.98)$$

e a área  $FAQ$  transforma-se na área  $FAP$ , que é  $b/a$  mais pequena que a primeira. Antes



**Figura 2.17:** Transformação afim do círculo na elipse. As distâncias em  $y$  são escaladas e as áreas escaladas nessa direcção [6].

da transformação (Figura 2.17, à esquerda), a área  $A_c$  é determinada à custa da área do sector circular  $\frac{E}{2\pi} \pi a^2$ , subtraída a área do triângulo definido pelo centro, foco e ponto no círculo:

$$\frac{Ea^2}{2} = A_c + \frac{1}{2}(ae)(a \sin E), \quad (2.99)$$

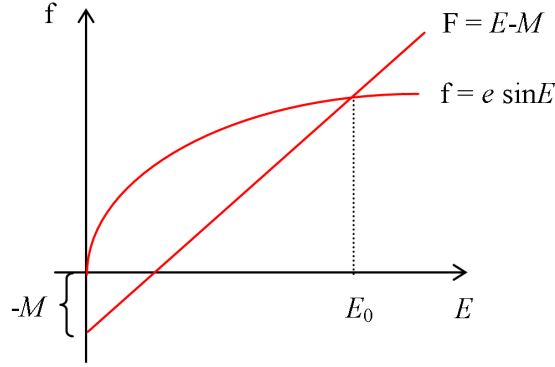
ou seja

$$A_c = \frac{a^2}{2}(E - e \sin E). \quad (2.100)$$

Após a transformação afim (Figura 2.17, à direita) a área  $A_c$  é transformada em  $A_e$

$$A_e = \frac{b}{a} A_c = \frac{ab}{2}(E - e \sin E). \quad (2.101)$$

A velocidade areolar (2.91) dá-nos a área descrita num certo tempo. Se o tempo for



**Figura 2.18:** representação gráfica do método numérico para obter a solução da equação de Kepler [7].

o período  $T$ , a área descrita é a da elipse,  $\pi ab$ , logo

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A_{\text{elipse}}}{T} = \frac{ab}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \text{Cte.} \quad (2.102)$$

Integrando entre o tempo de passagem na periápside  $T_0$  e  $t$ , e utilizando (2.101),

$$\int_{T_0}^t dA = A_e = \frac{ab}{2}(E - e \sin E) = \frac{ab}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \int_{T_0}^t dt' = \frac{ab}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - T_0). \quad (2.103)$$

Finalmente, substituindo a definição (2.97) de  $M$  em (2.103) e simplificando, obtém-se

$$\boxed{\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - T_0) \equiv M = E - e \sin E,} \quad (2.104)$$

que é denominada *Equação de Kepler*.

A equação de Kepler é transcendente e não oferece dificuldades quando se conhecem as anomalias e se pretende saber o tempo mas na direcção contrária só pode ser resolvida numericamente. Não é difícil com os métodos modernos resolver a equação de Kepler (por exemplo com o método de Newton, cf. Figura 2.18) mas é necessário algum cuidado com os valores iniciais da iteração e a resolução pode convergir devagar em algumas zonas do domínio, nomeadamente quando  $e \lesssim 1$  e  $M \gtrsim 0$ . Por outro lado, é frequentemente necessário resolver esta equação a bordo de satélites com poder de cálculo muito limitado e continuam a ser publicados artigos científicos sobre esta equação, por exemplo a propor algoritmos mais eficientes para as mais diversas situações.

Mas nossa tarefa ainda não está terminada. Falta ainda relacionar as anomalias verdadeira e excêntrica já que a segunda é apenas um parâmetro intermédio. Observando a Figura 2.16 e usando (2.75), pode-se concluir facilmente que:

$$a \cos E + r \cos(\pi - \theta) = ae \quad \Leftrightarrow \quad a \cos E - r \cos \theta = ae. \quad (2.105)$$

Por outro lado, a transformação afim implica que

$$r \sin \theta = \overline{RP} = \frac{b}{a} \overline{RQ} = \frac{b}{a} a \sin E. \quad (2.106)$$

Utilizando a equação da órbita (2.87), pode-se reescrever (2.105) e (2.106) como

$$\cos E = \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \quad \Leftrightarrow \quad \cos \theta = -\frac{e - \cos E}{1 - e \cos E}, \quad (2.107)$$

$$\sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \quad \Leftrightarrow \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}, \quad (2.108)$$

ou seja, é sempre possível obter a anomalia excêntrica da anomalia verdadeira e vice-versa. Note-se que ambas as equações podem ser necessárias para resolver a questão de qual o quadrante do ângulo a obter.

Utilizando a identidade trigonométrica  $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$  e substituindo as equações (2.107), obtém-se finalmente para elipses

$$\boxed{\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\theta}{2}} \quad (2.109)$$

que determina os valores sem confusão possível de quadrante.

### 2.4.3 Órbitas parabólicas e hiperbólicas

O caso parabólico é singular e pouco interessante na prática, como já foi afirmado. O caso hiperbólico é similar ao elíptico com algumas diferenças. Por isso não se inclui aqui as deduções para o caso de órbitas parabólicas e hiperbólicas, apenas os resultados finais.

Para trajectórias *parabólicas* a relação entre a anomalia verdadeira e o tempo é

$$\boxed{2\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t - T_0) = \tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\theta}{2}}, \quad (2.110)$$

que é, mais uma vez, uma equação transcendente.

Para trajectórias hiperbólicas, tem-se

$$\boxed{\sqrt{\frac{\mu}{-a^3}}(t - T_0) = e \sinh F - F}, \quad \cos \theta = \frac{e - \cosh F}{e \cosh F - 1}. \quad (2.111)$$

O movimento parabólico é singular mas as equações das trajectórias elípticas e hiperbólicas podem ser unificadas fazendo  $E = iF$ .

O problema fica finalmente totalmente resolvido para todos os tipos de órbitas: conseguindo obter, mesmo que apenas numericamente,  $\theta(t)$ , pode-se usar a equação da trajectória para obter  $r(t)$ .

#### 2.4.4 Dedução directa da relação entre a anomalia verdadeira e o tempo

Nas secções anteriores obtivemos passo a passo a relação entre a anomalia verdadeira e o tempo. Esse é o modo mais informativo, já que o processo é dividido em partes, isolando e simplificando o passo realmente difícil que é resolver a equação de Kepler quando se pretende saber a anomalia excêntrica, dado o tempo. Mas nem sempre esse processo é necessário. Por vezes vale a pena ser mais expedito e obter directamente a expressão completa entre  $t$  e  $\theta$ .

O primeiro passo não é muito diferente. Da 2ª Lei de Kepler, (2.9), pode obter-se  $\dot{\theta}$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{ab}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{h}{2} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} \Rightarrow \dot{\theta} = \boxed{\frac{d\theta}{dt} = \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}} \quad (2.112)$$

e usando a equação da órbita, (2.87),

$$\frac{d\theta}{(1+e \cos \theta)^2} = (1-e^2)^{-3/2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} dt. \quad (2.113)$$

Integrando a partir da periápside, obtém-se

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e \cos \theta)^2} = \frac{\sqrt{\mu/a^3}}{\sqrt{(1-e^2)^3}} \int_{T_0}^t dt = \frac{\sqrt{\mu/a^3}}{\sqrt{(1-e^2)^3}} (t - T_0), \quad (2.114)$$

onde, mais uma vez, o lado direito é o integral de uma constante que se resolve imediatamente. O problema passa a ser calcular o integral do lado esquerdo de (2.114),

$$\boxed{\int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e \cos \theta)^2}}, \quad (2.115)$$

o qual não é, de todo, óbvio como se resolve. Felizmente este integral é um caso particular do integral, que pode ser encontrado em tabelas,

$$\int \frac{d\theta}{(1+e \cos \theta)^n}, \quad (2.116)$$

com  $n = 2$ , de onde resulta

$$\int \frac{d\theta}{(1+e \cos \theta)^2} = \frac{-e \sin \theta}{(1-e^2)(1+e \cos \theta)} + \frac{1}{1-e^2} \int \frac{d\theta}{1+e \cos \theta}, \quad (2.117)$$

que é fácil verificar por derivação, embora trabalhoso, que é o resultado correcto. Finalmente, o integral resultante pode ser resolvido transformando a função integranda em fracções racionais usando a mudança de variável usual  $\tan \frac{\theta}{2} = x \Rightarrow \cos \theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}$  com  $\frac{d\theta}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$ , pode obter-se o resultado.

A mudança de variável para fracções racionais também funciona no integral original; simplificando, obtém-se

$$\int \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{2}{(1 - e)^2} \int \left[ \frac{1 - c}{(x^2 + c)^2} + \frac{1}{x^2 + c} \right] dx, \quad c = \frac{1+e}{1-e}. \quad (2.118)$$

O resultado é diferente para  $e < 1$  e para  $e > 1$  pois, dependendo se as raízes são reais ou complexas, as integrações resultam em log ou arctan:

$$\int \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2}$$

$$e < 1: = \frac{1}{1 - e^2} \left[ \frac{-e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} + \frac{2}{\sqrt{1 - e^2}} \arctan \left( \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 + e} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right], \quad (2.119a)$$

$$e > 1: = \frac{1}{e^2 - 1} \left[ \frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} \log \left( \frac{\sqrt{e + 1} + \sqrt{e - 1} \tan \frac{\theta}{2}}{\sqrt{e + 1} - \sqrt{e - 1} \tan \frac{\theta}{2}} \right) \right]. \quad (2.119b)$$

Finalmente, usando (2.114) o tempo em função da anomalia verdadeira para órbitas elípticas e hiperbólicas escreve-se, respectivamente:

$$e < 1: \quad t_e = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \left[ 2 \arctan \left( \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e \sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \right], \quad (2.120a)$$

$$e > 1: \quad t_h = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \left[ \frac{e \sqrt{e^2 - 1} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} - \log \left( \frac{\sqrt{e + 1} + \sqrt{e - 1} \tan \frac{\theta}{2}}{\sqrt{e + 1} - \sqrt{e - 1} \tan \frac{\theta}{2}} \right) \right]. \quad (2.120b)$$

As equações podem ser adimensionalizadas usando a substituição, diferente para órbitas elípticas ou hiperbólicas:

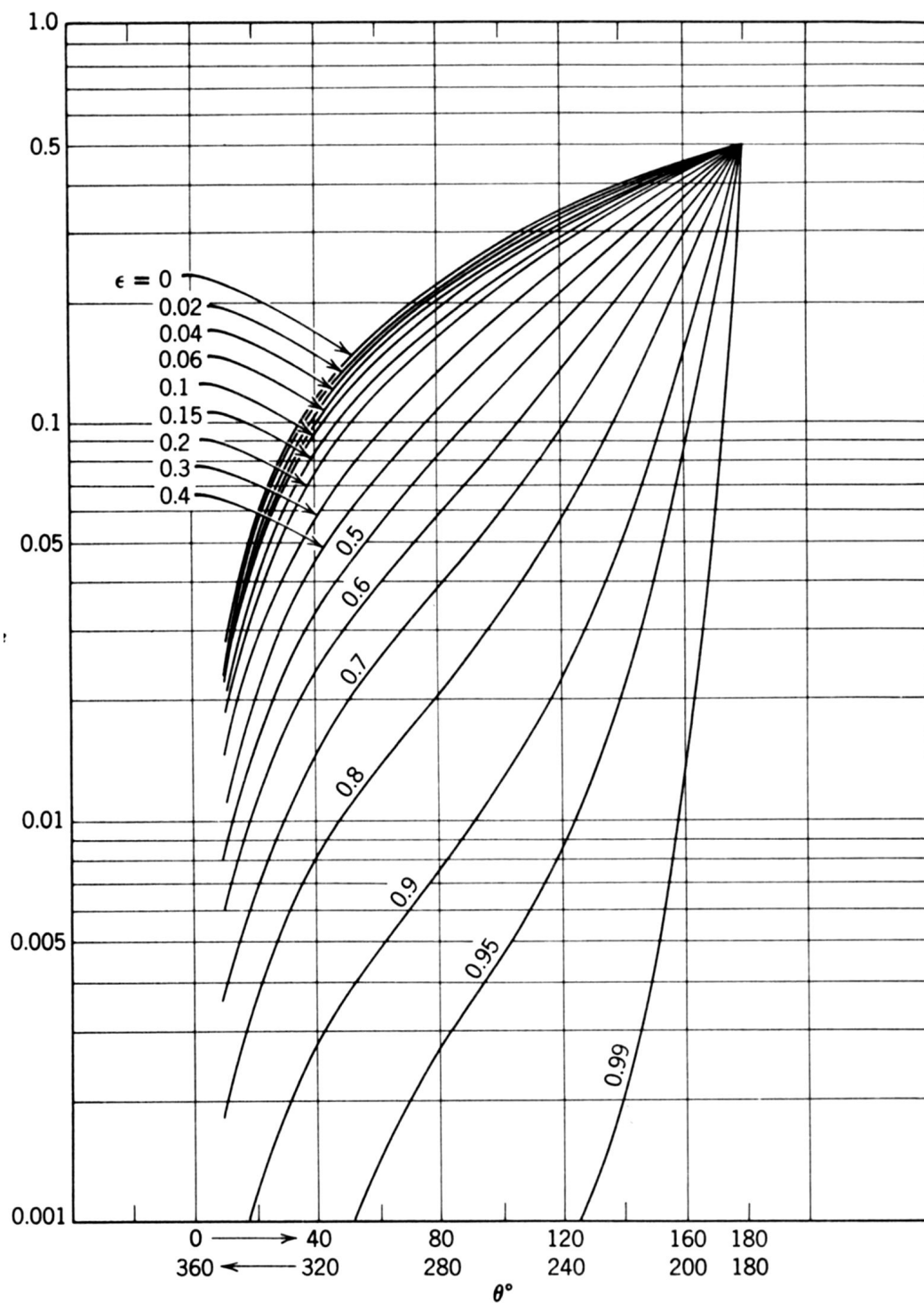
$$\tau_e = t_e \frac{\sqrt{\mu}}{2\pi a^{3/2}}, \quad (2.121a)$$

$$\tau_h = t_h \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}. \quad (2.121b)$$

As equações adimensionalizadas são adequadas para uma representação gráfica que permite obter por inspecção a solução das equações de Kepler, na Figura 2.19 para órbitas elípticas e na Figura 2.20 para órbitas hiperbólicas, uma técnica ultrapassada mas que permite ter uma ideia do que acontece quando a excentricidade muda.

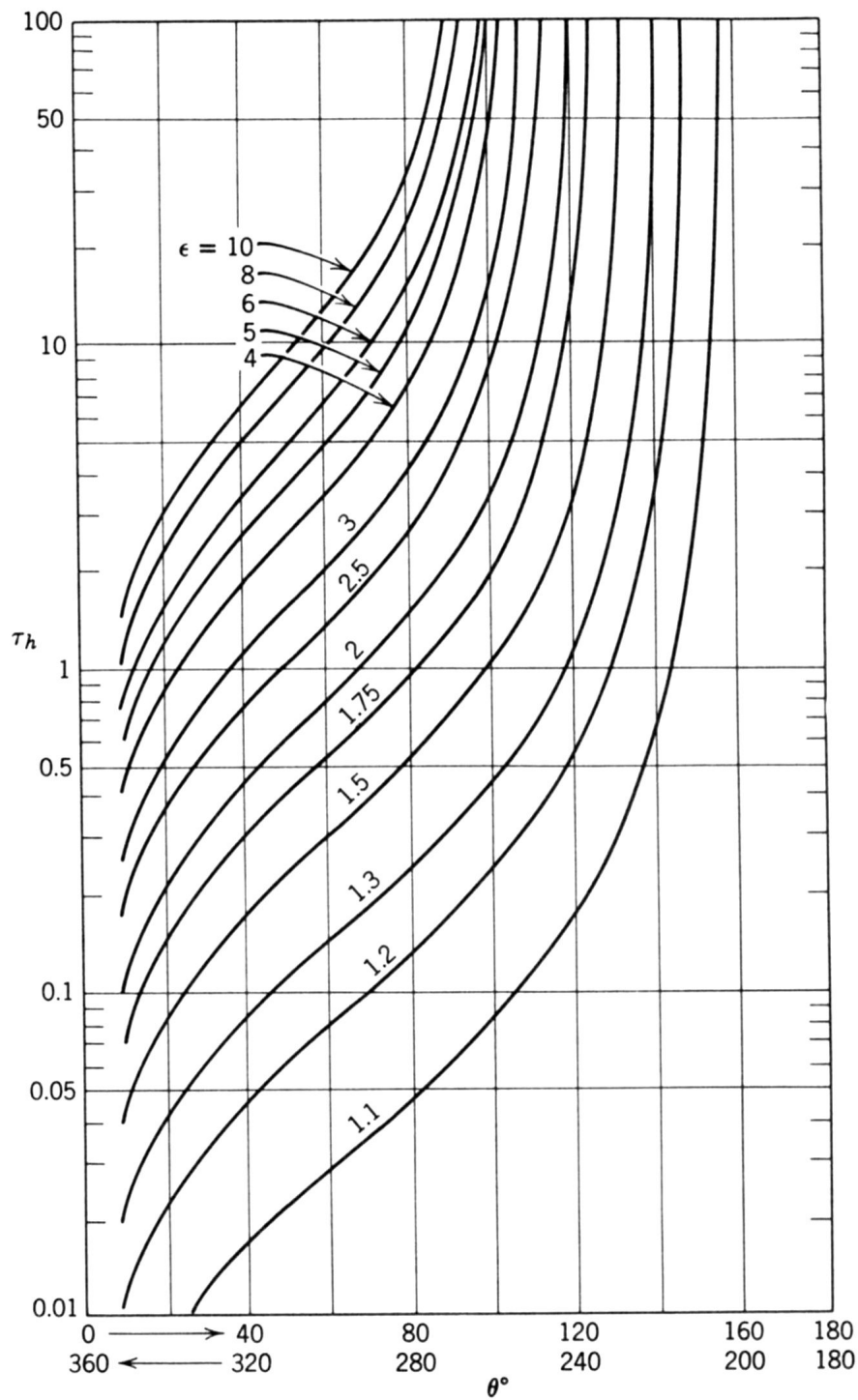
No caso das órbitas elípticas (cf. Figura 2.19), uma vez que a solução é simétrica para as duas metades da órbita (devido à simetria relativamente à linha das ápsides) basta uma representação até  $\theta = \pi$ , sendo o restante *lido ao contrário* para ser descontado de um período orbital.

No caso de órbitas hiperbólicas (cf. Figura 2.20), o movimento não é periódico mas a linha das ápsides ainda é de simetria e a solução é igual para as duas metades simétricas da órbita dividida pela periápside.



**Figura 2.19:** Soluções da equação de Kepler para várias valores da excentricidade no caso de órbitas elípticas [58].





**Figura 2.20:** Soluções da equação de Kepler para vários valores da excentricidade no caso de órbitas hiperbólicas [58].

## 2.5 Órbita estabelecida a partir de condições iniciais

### 2.5.1 Condições iniciais

Uma vez conhecida a solução do problema de dois corpos é necessário aplicá-lo a casos concretos. Pode-se conhecer as condições iniciais, ou medir essas mesmas condições num certo instante, e querer fazer a previsão da localização do objecto no futuro i. e. saber a sua órbita e posição em função do tempo.

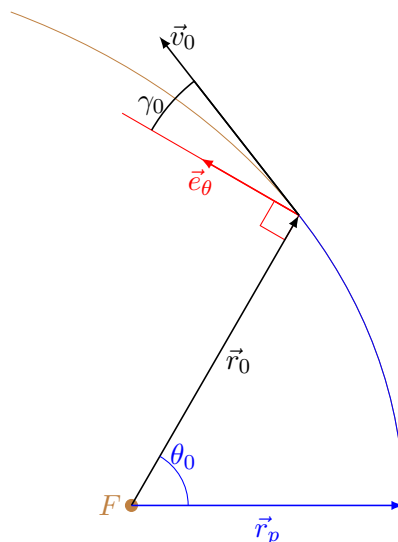
Se se conhecer os vectores posição e velocidade num certo instante de uma órbita Kepleriana, definido a partir daí como instante inicial, fica-se a saber imediatamente o plano da órbita pois  $\vec{h} = \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 = \text{Cte}$  (cf. § 2.1.2). Pode-se então começar por resolver o problema no plano do movimento, que é o que vamos fazer nesta secção.

Em coordenadas polares no plano, as condições iniciais  $\vec{r}_0, \vec{v}_0$  têm componentes

$$\vec{r}_0 = r_0 \vec{e}_r, \quad (2.122a)$$

$$\vec{v}_0 = v_0(\sin \gamma_0 \vec{e}_r + \cos \gamma_0 \vec{e}_\theta), \quad (2.122b)$$

em que  $\gamma_0$  é o denominado *ângulo de voo*<sup>8</sup>, que é o ângulo que o vector velocidade faz com a direcção transversal  $\vec{e}_\theta$ . Tem-se então três condições iniciais escalares ( $r_0, v_0, \gamma_0$ ) (cf. Figura 2.21).



**Figura 2.21:** Órbita estabelecida a partir de condições iniciais  $r_0, v_0, \gamma_0$  em que  $\gamma_0$  é o ângulo de voo.

Uma cónica fica completamente definida com dois parâmetros, e. g.  $(a, e)$ , mas a posição inicial pode estar localizada em qualquer ponto da órbita. Isto significa que é

<sup>8</sup>É frequentemente utilizada a designação em Inglês, *flight path angle*.

necessário saber a localização inicial relativamente à órbita, por exemplo determinando a anomalia verdadeira inicial  $\theta_0$  que determina a orientação da órbita no plano do movimento, não conhecida a priori. Por conseguinte, para determinar a órbita no plano é necessário determinar três parâmetros  $(a, e, \theta_0)$ .

### 2.5.1.1 Momento angular e velocidade radial

O valor algébrico do momento angular  $\vec{h}$  pode ser determinado em qualquer instante utilizando o ângulo de voo  $\gamma$ . No instante inicial  $t_0$ , tem-se

$$h = r v \sin(\hat{r}, \hat{v}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = r_0 v_0 \cos \gamma_0}, \quad (2.123)$$

pois  $\gamma$  não é o ângulo entre  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  mas sim o ângulo complementar. Note-se que  $-90^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$  pois se fosse maior a órbita seria descrita ao contrário.

A componente radial da velocidade  $\dot{r}$  pode ser obtida diferenciando a equação da órbita (2.70)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \theta}{p} \right) \quad \Rightarrow \quad -\frac{\dot{r}}{r^2} = -\frac{e \sin \theta}{p} \dot{\theta}, \quad (2.124)$$

eliminando  $\dot{\theta}$  usando a conservação de momento angular  $r^2 \dot{\theta} = h$ . Simplificando com  $p = h^2/\mu$  pode-se resolver em ordem a  $\dot{r}$  e obter

$$\boxed{\dot{r} = \frac{\mu}{h} e \sin \theta}, \quad (2.125)$$

que mostra explicitamente que  $\dot{r}$  será nulo quando  $\theta = 0, \pi$ , ou seja na periápside ou na apoápside, o que não é estranho pois são os pontos mais próximo e afastado da origem, respectivamente. A velocidade é perpendicular ao vector posição nesses pontos e portanto

$$\boxed{h = r v \cos \gamma = r_p v_p = r_a v_a}. \quad (2.126)$$

No instante inicial tem-se

$$\dot{r}_0 = [\dot{r}]_{\theta=\theta_0} = (\vec{v}_0)_r = v_0 \sin \gamma_0, \quad (2.127a)$$

$$\dot{\theta}_0 = [\dot{\theta}]_{\theta=\theta_0} \quad \Rightarrow \quad r_0 \dot{\theta}_0 = (\vec{v}_0)_\theta = v_0 \cos \gamma_0, \quad (2.127b)$$

e utilizando (2.127a) e (2.125) para  $\dot{r}$  no ponto inicial

$$\dot{r}_0 = \frac{\mu}{h} e \sin \theta_0 = v_0 \sin \gamma_0, \quad (2.128)$$

que por via de (2.126) se pode simplificar para

$$e \sin \theta_0 = \frac{r_0 v_0^2}{\mu} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0. \quad (2.129)$$

### 2.5.2 Anomalia verdadeira inicial $\theta_0$

Invertendo a equação da órbita  $\frac{1}{r_0} = \frac{\mu}{h^2}(1 + e \cos \theta_0)$  e utilizando o momento angular (2.126) novamente, obtém-se

$$e \cos \theta_0 = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{r_0} - 1 = \frac{r_0^2 v_0^2 \cos^2 \gamma_0}{\mu r_0} - 1 = \frac{r_0 v_0^2}{\mu} \cos^2 \gamma_0 - 1, \quad (2.130)$$

ou seja

$$e \cos \theta_0 = \frac{r_0 v_0^2}{\mu} \cos^2 \gamma_0 - 1. \quad (2.131)$$

Dividindo termo a termo (2.129) e (2.131),

$$\tan \theta_0 = \frac{\left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu}\right) \sin \gamma_0 \cos \gamma_0}{\left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu}\right) \cos^2 \gamma_0 - 1}, \quad (2.132)$$

que nos dá a anomalia verdadeira inicial em função das condições iniciais. A anomalia verdadeira inicial não depende de  $(r_0, v_0)$  individualmente um do outro, mas sim apenas do factor adimensional

$$\frac{r_0 v_0^2}{\mu}. \quad (2.133)$$

Note-se que como a anomalia verdadeira inicial pode ser de qualquer um dos quatro quadrantes,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , a (2.132) calcula duas soluções fisicamente possíveis. Esta indeterminação pode ser resolvida observando que

$$\theta \in [0, \pi] : \quad v_r = \dot{r} = \frac{\mu e}{h} \sin \theta \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \geq 0, \quad (2.134)$$

ou seja, quando  $\gamma > 0$  a anomalia verdadeira estará localizada nos primeiro ou segundo quadrantes e quando  $\gamma < 0$  nos terceiro ou quarto quadrantes. Mas as duas soluções possíveis de (2.132) são sempre ou do primeiro e terceiro quadrantes, ou do segundo e quarto quadrantes, o que significa que o sinal de  $\gamma$  desfaz a indeterminação das soluções de  $\theta$ , e vice-versa.

### 2.5.3 Excentricidade

Quadrando (2.129) e (2.131), somando, e reorganizando os termos

$$\begin{aligned}
(e \sin \theta_0)^2 + (e \cos \theta_0)^2 &= e^2(\sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0) = e^2 \\
&= \left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu}\right)^2 \sin^2 \gamma_0 \cos^2 \gamma_0 + \left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu}\right)^2 \cos^4 \gamma_0 - 2 \left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu}\right) \cos^2 \gamma_0 + 1 \\
&= \left[ \left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu}\right)^2 \cos^2 \gamma_0 \right] \underbrace{(\cos^2 \gamma_0 + \sin^2 \gamma_0)}_{=1} \\
&\quad - 2 \left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu}\right) \cos^2 \gamma_0 + \sin^2 \gamma_0 + \cos^2 \gamma_0 \\
&= \left[ \left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu}\right)^2 - 2 \left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu}\right) + 1 \right] \cos^2 \gamma_0 + \sin^2 \gamma_0, \quad (2.135)
\end{aligned}$$

ou seja

$$\boxed{e^2 = \left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu} - 1\right)^2 \cos^2 \gamma_0 + \sin^2 \gamma_0}, \quad (2.136)$$

que é a excentricidade em função das condições iniciais e onde, mais uma vez  $(r_0, v_0)$  aparecem apenas no factor (2.133).

### 2.5.4 Semi-eixo maior

Multiplicando a equação da energia (para hipérbolos,  $a < 0$ ) por  $(2r_0/\mu)$ ,

$$-\frac{\mu}{2a} \frac{2r_0}{\mu} = \frac{v_0^2}{2} \frac{2r_0}{\mu} - \frac{\mu}{r_0} \frac{2r_0}{\mu}, \quad (2.137)$$

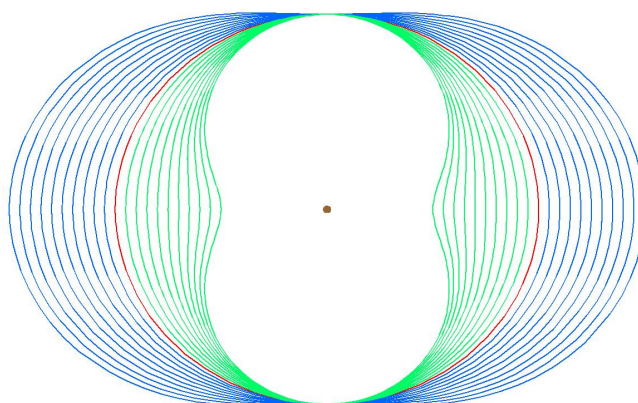
obtem-se imediatamente o semi-eixo maior em função das condições iniciais

$$\boxed{\frac{a}{r_0} = \frac{1}{2 - \frac{r_0 v_0^2}{\mu}}}, \quad (2.138)$$

onde novamente surge o factor (2.133). Neste caso teria que aparecer uma normalização  $r_0$  devido às dimensões físicas de  $a$ .

### 2.5.5 Tipo de órbita e $\frac{r_0 v_0^2}{\mu}$

Vale a pena fazer algumas considerações sobre as expressões obtidas para calcular  $(a, e, \theta_0)$ . As equações são válidas para qualquer instante, já que  $t_0$  é arbitrário. Por outro lado, (2.136) mostra que, se  $\gamma_0 \neq 0$ , é impossível ter  $e = 0$  ou seja, é impossível que a órbita seja circular. Ao contrário, se  $\gamma_0 = 0$  a posição inicial  $r_0$  só pode ser a periápside ou a apoápside, ou então a órbita é circular.



**Figura 2.22:** Gráfico polar de  $e(\gamma_0)$  para diversos valores de  $\frac{r_0 v_0^2}{\mu}$  demonstrando que as órbitas são elípticas, parabólicas ou hiperbólicas consoante  $\frac{r_0 v_0^2}{\mu} < 2$  (curvas no interior da circunferência),  $\frac{r_0 v_0^2}{\mu} = 2$  (circunferência) ou  $\frac{r_0 v_0^2}{\mu} > 2$  (curvas no exterior da circunferência), não dependendo do valor de  $\gamma$ .

De (2.136) tem-se que as órbitas serão elípticas, parabólicas ou hiperbólicas consoante  $\frac{r_0 v_0^2}{\mu} < 2$ ,  $\frac{r_0 v_0^2}{\mu} = 2$  ou  $\frac{r_0 v_0^2}{\mu} > 2$ . Este resultado não depende do valor de  $\gamma_0$ , como pode ser observado no gráfico polar de  $e(\gamma)$  na Figura 2.22.

Na Figura 2.23 podemos observar como varia o valor da excentricidade com  $r_0 v_0^2/\mu$  e confirmar os resultados do gráfico polar. Uma característica mostrada nesta figura é a possibilidade de se ter excentricidades negativas até  $e = -1$ . Isso é um artifício, mas que pode ser útil, como veremos na próxima secção.

### 2.5.6 Caso de satélite lançado com $\gamma_0 = 0$

Um caso particular de condições iniciais é o do satélite lançado com ângulo de voo inicial nulo. Como referido anteriormente, se  $\gamma_0 = 0$  então o ponto inicial só pode ser a periápside ou a apoápside, ou a órbita é circular. De (2.136) com  $\gamma_0 = 0$ , tem-se que

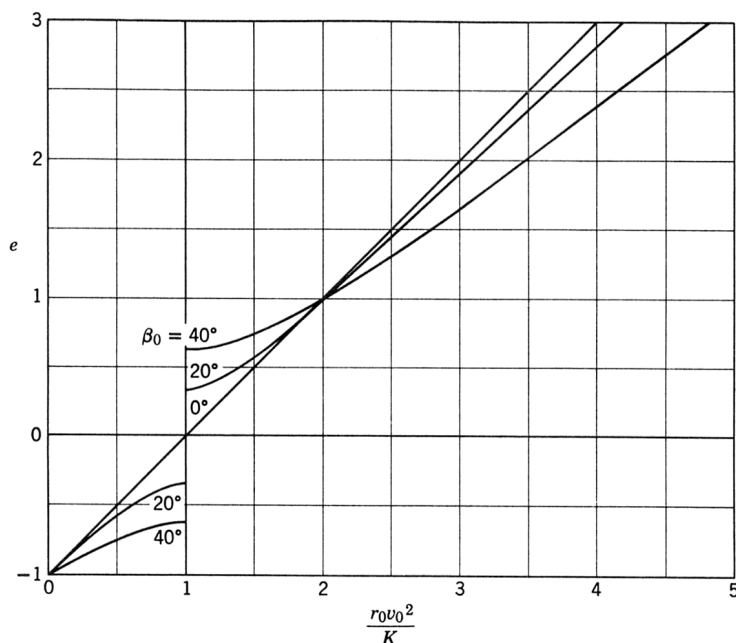
$$e = \pm \left( \frac{r_0 v_0^2}{\mu} - 1 \right), \quad (2.139)$$

onde se está a incluir a possibilidade de  $e < 0$ . Se a órbita for circular,  $e = 0$ , tem-se

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}, \quad (2.140)$$

que é o resultado conhecido que se pode obter directamente do equilíbrio de forças. A velocidade é obtida quando a órbita é parabólica,  $e = 1$ , ou seja

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}. \quad (2.141)$$



**Figura 2.23:** A relação entre o tipo de órbita e parâmetro  $\frac{r_0 v_0^2}{\mu}$  pode ser observada nesta figura. Nota: nesta figura  $K \equiv \mu, \beta_0 \equiv \gamma_0$ . O caso  $e < 0$  corresponde a órbitas rodadas  $\pi$  (ver [58]).

A possibilidade de  $e < 0$  tem que ver com a orientação da órbita. Consideremos todas as órbitas a partir de um ponto inicial com  $\gamma_0 = 0$ . Todas as órbitas têm periápside e esse ponto pode ser o inicial em todos os tipos de órbitas, incluindo as circulares. Mas fica de fora um caso, que é o de o ponto ser a apoápside de uma órbita elíptica. Supondo que alinhemos as órbitas de modo a que  $\beta_0 = 0$ , e supondo que se tem uma excentricidade negativa  $e' = -e < 0$  pode-se reescrever a equação da órbita (2.87) como

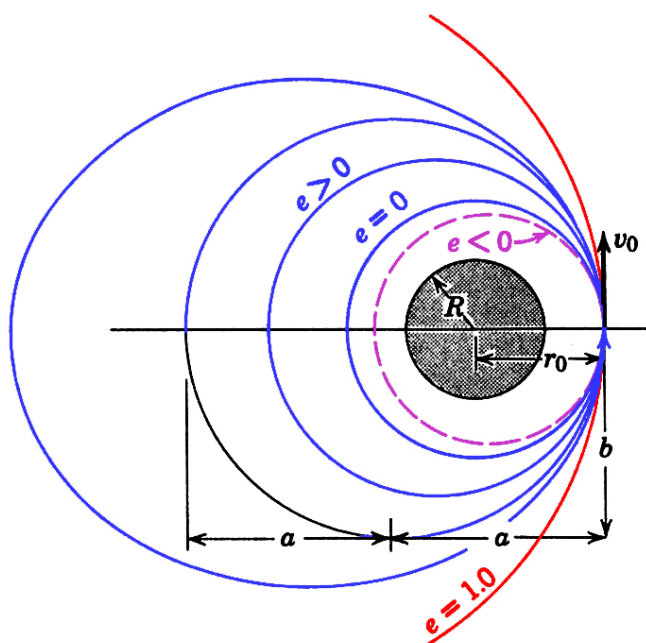
$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e' \cos \theta} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + (-e) \cos \theta} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \pi)}, \quad (2.142)$$

mostrando que uma órbita com  $e < 0$  e periápside em  $\theta = 0$  é equivalente a uma órbita com  $e > 0$  e periápside em  $\theta = \pi$  ou apoápside em  $\theta = 0$ .

Todas as órbitas a começar num ponto com  $\gamma_0 = 0$  estão representadas na Figura 2.24, incluindo a possibilidade de o ponto inicial ser a apoápside.

## 2.6 Estabilidade das órbitas circulares

Vimos na § 2.3.4 que as órbitas parabólicas são instáveis, pois qualquer perturbação que afecte o valor da excentricidade transforma a órbita parabólica em elíptica ou hiperbólica. A mesma pergunta se pode fazer no caso das órbitas circulares: se uma pequena perturbação alterar as condições da órbita, será que o resultado ainda é algo semelhante



**Figura 2.24:** Caso de satélite lançado com  $\gamma_0 = 0$ . Se velocidade não é suficientemente elevada, o ponto  $r_0$  é a apoápside e não a periápside, que pode ser pensado como tendo  $e < 0$  [58].

a uma órbita circular? Esta questão serve de pretexto para introduzir a análise de estabilidade.

Há muitos tipos conceitos de estabilidade. O mais simples é o de estabilidade linear. Se um sistema está num certo tipo de equilíbrio, supõe-se que uma pequena perturbação o afastou ligeiramente desse equilíbrio. Supondo que a solução nas condições perturbadas pode ser escrita como uma série de Taylor expandida a partir do ponto de equilíbrio original, se a perturbação é pequena a série poderá ser aproximada pelos primeiros termos, já que os termos de ordem superior serão muito menores e portanto desprezáveis. Se se trunchar a série na ordem um, as equações que regem a perturbação serão lineares, ou poderão ser linearizadas e será fácil analisar a estabilidade. É o que vamos ilustrar a seguir.

### 2.6.1 Perturbação de uma órbita circular

Consideremos o caso mais geral de forças centrais *atrativas*, já que órbitas circulares são sempre possíveis neste caso, com a força centrífuga  $mv^2/r$  a equilibrar a força central aplicada. Lembrando a componente radial das equações do movimento em coordenadas polares (2.11a), para uma órbita circular de raio  $r_0$ , tem-se

$$-r_0\dot{\theta}^2 = f(r_0), \quad (2.143)$$

onde  $r_0 = \text{Cte}$ . Consideremos, por simplicidade, apenas uma instabilidade radial  $r_1$  induzida ao sistema, que o afastou do equilíbrio (dinâmico) da órbita circular. Esta



instabilidade pode depender do tempo pois o sistema saiu do equilíbrio e a evolução da posição radial é desconhecida, ou seja

$$r_1 : \quad r(t) = r_0 + r_1(t). \quad (2.144)$$

O sistema deve obedecer às equações do movimento e (2.11), que se podem combinar em (2.12), i. e.

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = f(r). \quad (2.145)$$

Como considerámos que  $r_1$  é uma pequena perturbação,  $r_1/r_0 \ll 1$ , portanto

$$x \equiv \frac{r_1}{r_0} \ll 1 : \quad r = r_0 \left( 1 + \frac{r_1}{r_0} \right) = r_0(1 + x) \simeq r_0, \quad (2.146)$$

e como  $r_0$  não depende do tempo,

$$r_0 = \text{Cte} : \quad \ddot{r} = \ddot{r}_1. \quad (2.147)$$

Lembrando o desenvolvimento em série da binomial, que

$$\frac{1}{(1 \pm x)^\alpha} = 1 \mp \alpha x + \alpha(\alpha + 1) \frac{x^2}{2!} \mp \dots, \quad (2.148)$$

o desenvolvimento em série do termo  $h^2/r^3$  vem

$$\frac{h^2}{r^3} = \frac{h^2}{r_0^3(1 + r_1/r_0)^3} = \frac{h^2}{r_0^3} \left( 1 - 3\frac{r_1}{r_0} + 6\frac{r_1^2}{r_0^2} - \dots \right). \quad (2.149)$$

Por outro lado, a série de Taylor de uma função geral  $f(r)$  em torno de  $r_0$  é ( $r_1 = r - r_0$ )

$$f(r) = f(r_0) + r_1 f'(r_0) + \frac{r_1^2}{2} f''(r_0) + \dots \quad (2.150)$$

Estamos agora em condições de obter a solução aproximada para pequenas perturbações radiais.

## 2.6.2 Solução aproximada e análise de estabilidade

Substituindo na equação da órbita (2.145) e mantendo só termos até primeira ordem, e utilizando (2.143),

$$\begin{aligned} \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = f(r) &\Leftrightarrow \ddot{r}_1 - \frac{h^2}{r_0^3} \left( 1 - 3\frac{r_1}{r_0} \right) = f(r_0) + r_1 f'(r_0) \\ &\Leftrightarrow \ddot{r}_1 + f(r_0) \left( 1 - 3\frac{r_1}{r_0} \right) = f(r_0) + r_1 f'(r_0), \end{aligned} \quad (2.151)$$

que simplificada resulta finalmente na equação que rege a perturbação

$$\boxed{\ddot{r}_1 - \left[ \frac{3}{r_0} f(r_0) + f'(r_0) \right] r_1 = 0,} \quad (2.152)$$

que é uma equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes, correspondente ao oscilador harmónico. As suas duas soluções gerais obtêm-se resolvendo a equação característica e são:

$$C_i \exp(\lambda_i t), \quad \lambda_i = \pm \sqrt{\frac{3}{r_0} f(r_0) + f'(r_0)}, \quad i = 1, 2, \quad (2.153)$$

cuja forma concreta depende da forma dos valores próprios  $\lambda_i$ . Se as exponenciais forem reais, haverá sempre uma que aumenta indefinidamente com o tempo e  $r_1$  não se manterá pequeno. Isto significa que para haver estabilidade é necessário que

$$\boxed{\frac{3}{r_0} f(r_0) + f'(r_0) < 0,} \quad (2.154)$$

caso em que as soluções serão senos e co-senos<sup>9</sup>, ou seja o movimento mantém-se próximo do ponto de equilíbrio.

### 2.6.3 Órbitas circulares com força da gravidade

No caso de uma força central atractiva genérica que seja uma potência da distância

$$f(r) = -\frac{\mu}{r^n}, \quad (2.155)$$

tem-se

$$\frac{3}{r_0} f(r_0) + f'(r_0) = -\frac{3\mu}{r_0^{n+1}} + \frac{n\mu}{r_0^{n+1}} = \frac{(n-3)\mu}{r_0^{n+1}}, \quad (2.156)$$

que só será estável para  $n < 3$ , o que inclui o caso da força da gravidade  $n = 2$ ,  $f(r) = -\frac{\mu}{r^2}$ ,

$$n = 2 : \quad \frac{3}{r_0} f(r_0) + f'(r_0) = -\frac{\mu}{r_0^3} < 0, \quad \Rightarrow \quad \text{Órbita estável} \quad (2.157)$$

ou seja, as órbitas circulares devidas à força da gravidade são sempre estáveis. Fica como exercício mostrar que, se a perturbação inicial for  $r_1(0)$ , a velocidade de revolução é

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r_0^2} \left( 1 - \frac{2r_1(0)}{r_0} \cos \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}} t \right). \quad (2.158)$$

<sup>9</sup>O caso da raiz nula também é instável pois nesse caso há duas raízes iguais e a solução será da forma  $r_1 = A + Bt$ , que também cresce indefinidamente.

## 2.7 O vector de Laplace-Runge-Lenz

### 2.7.1 Integral do Movimento

No caso das órbitas Keplerianas existe um outro integral do movimento que, apesar de ser dependente dos já falados, é útil em muitas circunstâncias. Esse integral do movimento é o *vector de Laplace-Runge-Lenz*, também conhecido por *vector excentricidade* ou *vector de Laplace* e é útil porque o seu conhecimento permite estudar as propriedades de simetria e ajuda a descrever a órbita no espaço de modo simples. A equação das órbitas pode até ser obtida por um método algébrico utilizando apenas técnicas de análise vectorial envolvendo este vector.

Para obter o vector de Laplace-Runge-Lenz, comecemos por reparar que o vector momento angular  $\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$  é perpendicular tanto à posição  $\vec{r}$  como à velocidade  $\dot{\vec{r}}$ , o que implica que  $\dot{\vec{r}} \times \vec{h}$  pertence ao plano da órbita. Como a derivada do momento angular é nula,  $\dot{\vec{h}} = 0$ , em órbitas Keplerianas, então a derivada de  $\vec{v} \times \vec{h}$  é

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \times \vec{h}) = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \ddot{\vec{r}} \times \vec{h} + \dot{\vec{r}} \times \underbrace{\dot{\vec{h}}}_{=0}. \quad (2.159)$$

Utilizando a definição de  $\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{v}$  e a equação do movimento  $\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}$  obtém-se

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \times \vec{h}) = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}); \quad (2.160)$$

notando que  $\dot{\vec{r}} \equiv \vec{v}$ , utilizando a conhecida igualdade vectorial

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}, \quad (2.161)$$

e reparando que  $\dot{\vec{r}} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \vec{v} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \vec{v} \cdot \vec{e}_r = v_r = \dot{r}$ , e que não se deve confundir  $\dot{r} \neq |\dot{\vec{r}}| \equiv |\vec{v}|$ , o lado direito de (2.160) simplifica-se para

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{r^3} [\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})] &= -\frac{\mu}{r^3} [(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r})\dot{\vec{r}}] \\ &= \frac{\mu}{r^3} [r^2 \dot{\vec{r}} - (\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{r}] = \frac{\mu}{r^2} [r \dot{\vec{r}} - (\vec{e}_r \cdot \vec{v})\vec{r}] \\ &= \frac{\mu}{r} \dot{\vec{r}} - \frac{\mu}{r^2} \underbrace{v_r}_{=\dot{r}} \vec{r} = \mu \left( \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\dot{r}\vec{r}}{r^2} \right) = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right), \end{aligned} \quad (2.162)$$

de onde resulta um integral do movimento

$$\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}} \times \vec{h} - \mu \frac{\vec{r}}{r} \right) = 0, \quad (2.163)$$

ou seja

$$\mu \vec{A} \equiv \left( \dot{\vec{r}} \times \vec{h} - \mu \frac{\vec{r}}{r} \right) = \vec{C} = \text{Cte.}, \quad (2.164)$$

onde se denominou-se  $\vec{C} \equiv \mu\vec{A}$  para facilitar a posterior interpretação. O vector que por agora designamos por  $\vec{A}$  é, por definição, o vector de Laplace-Runge-Lenz

$$\vec{A} = \frac{1}{\mu} \left( \dot{\vec{r}} \times \vec{h} - \mu \frac{\vec{r}}{r} \right), \quad (2.165)$$

uma constante do movimento (embora não seja independente de outras já conhecidas, ou seja, não acrescenta informação nova). Note-se que  $\vec{A}$  pertence ao plano do movimento pois  $\dot{\vec{r}} \times \vec{h} \perp \vec{h}$  (normal ao plano) e  $\vec{r}$  pertence ao plano.

### 2.7.1.1 Vector Excentricidade

Para conhecer  $\vec{A}$  bastará saber quanto vale o seu módulo e a direcção (constante num referencial de inércia) para onde aponta.

Para determinar o módulo do vector de Laplace-Runge-Lenz, podemos calcular a sua norma  $A^2$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = \frac{(\vec{v} \times \vec{h})^2}{\mu^2} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r^2} - 2 \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{v} \times \vec{h}}{\mu} = \frac{(\vec{v} \times \vec{h})^2}{\mu^2} + 1 - \frac{2}{\mu r} (\vec{r} \cdot \vec{v} \times \vec{h}); \quad (2.166)$$

a expressão (2.166) simplifica-se lembrando do cálculo vectorial que

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2, \quad (2.167a)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}. \quad (2.167b)$$

Substituindo (2.167) em (2.166),

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{\mu^2} \left( v^2 h^2 - \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{h})^2}_{=0 \text{ } (\vec{v} \perp \vec{h})} \right) + 1 - \frac{2}{\mu r} \underbrace{(\vec{r} \times \vec{v} \cdot \vec{h})}_{h^2} = \frac{h^2 v^2}{\mu^2} + 1 - \frac{2h^2}{\mu r} \\ &= \frac{2h^2}{\mu^2} \left( \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) + 1 = \frac{2h^2 \mathcal{E}}{\mu^2} + 1 \Rightarrow A = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}h^2}{\mu^2}} = e, \quad (2.168) \end{aligned}$$

ou seja, o módulo do vector de Laplace-Runge-Lenz, utilizando (2.52), coincide com a excentricidade, daí a designação de *vector excentricidade*  $\vec{e} \equiv \vec{A}$ .

Um modo alternativo de determinar  $|\vec{A}|$  é utilizar a equação da órbita (2.54), a conservação de momento angular (2.10), e ainda (2.125), para determinar directamente

o resultado:

$$\begin{aligned}
 A^2 &= \frac{2h^2}{\mu^2} \left( \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) + 1 = \frac{2h^2}{\mu^2} \left( \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) + 1 \\
 &= \frac{h^2\mu^2e^2}{\mu^2h^2} \sin^2\theta + \frac{h^2r^2h^2}{\mu^2r^4} - \frac{2h^2(1+e\cos\theta)}{\mu h^2/\mu} + 1 \\
 &= e^2 \sin^2\theta + \frac{h^4(1+e\cos\theta)^2}{\mu^2 h^4/\mu^2} - 2 - 2e\cos\theta + 1 \\
 &= e^2 \sin^2\theta + 1 + e^2 \cos^2\theta + 2e\cos\theta - 1 - 2e\cos\theta \\
 &= e^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 0 + 0 = e^2. \quad (2.169)
 \end{aligned}$$

Para determinar a direcção do vector excentricidade, pode-se calcular o produto interno com  $\vec{r}$  que, por definição, é

$$\vec{r} \cdot \vec{e} = r e \cos \alpha, \quad (2.170)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo entre os dois vectores  $\vec{r}$  e  $\vec{e}$ . Por outro lado,

$$\vec{r} \cdot \vec{e} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v} \times \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} = \frac{\overbrace{\vec{r} \times \vec{v}}^{\vec{h}} \cdot \vec{h}}{\mu} - \frac{r^2}{r} = \frac{h^2}{\mu} - r, \quad (2.171)$$

e, igualando (2.170) a (2.171),

$$r e \cos \alpha = \frac{h^2}{\mu} - r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos \alpha}, \quad (2.172)$$

mas a última equação é a equação da órbita com  $\alpha$  no lugar da anomalia verdadeira, logo a única possibilidade é

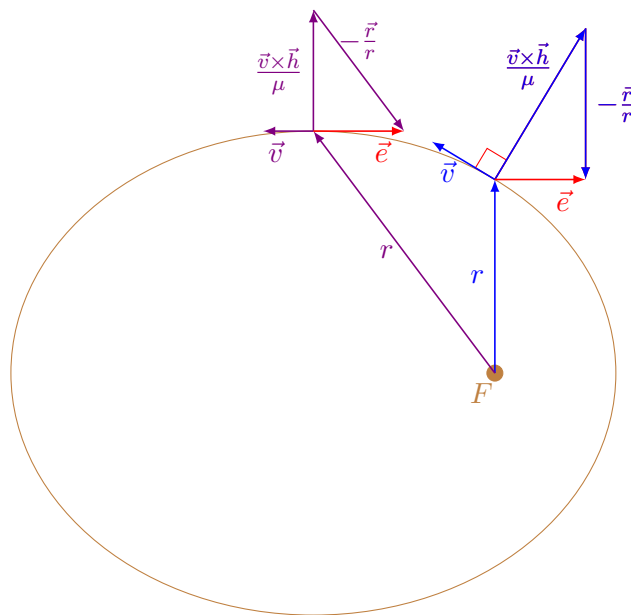
$$\boxed{\alpha = \theta}. \quad (2.173)$$

Se  $\alpha = \theta$ , então podemos concluir que o vector excentricidade

$$\boxed{\vec{e} = \frac{\vec{v} \times \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r}}, \quad (2.174)$$

tem a mesma direcção da linha das ápsides e sentido da periápside (cf. Figura 2.25).

O vector de Laplace-Runge-Lenz é bastante útil já que fornece automaticamente a direcção da linha das ápsides no espaço, e portanto uma parte da orientação do espaço. Além disso, quando as órbitas Keplerianas são perturbadas, a variação do vector de Laplace-Runge-Lenz pode ser utilizada para determinar a precessão da linha das ápsides da órbita. O vector de Laplace-Runge-Lenz pode ser utilizado em cálculos mais sofisticados e estudo das propriedades de simetria das órbitas.



**Figura 2.25:** Ilustração do vector de Laplace-Runge-Lenz. Em qualquer posição  $\vec{r}$  as duas partes que constituem o vector somam-se de tal modo que o resultado é sempre o mesmo: o vector tem direcção da linha das ápsides e sentido da periápside.

## Capítulo 3

# Órbitas no Espaço e no Tempo

### 3.1 Elementos Clássicos de Órbita

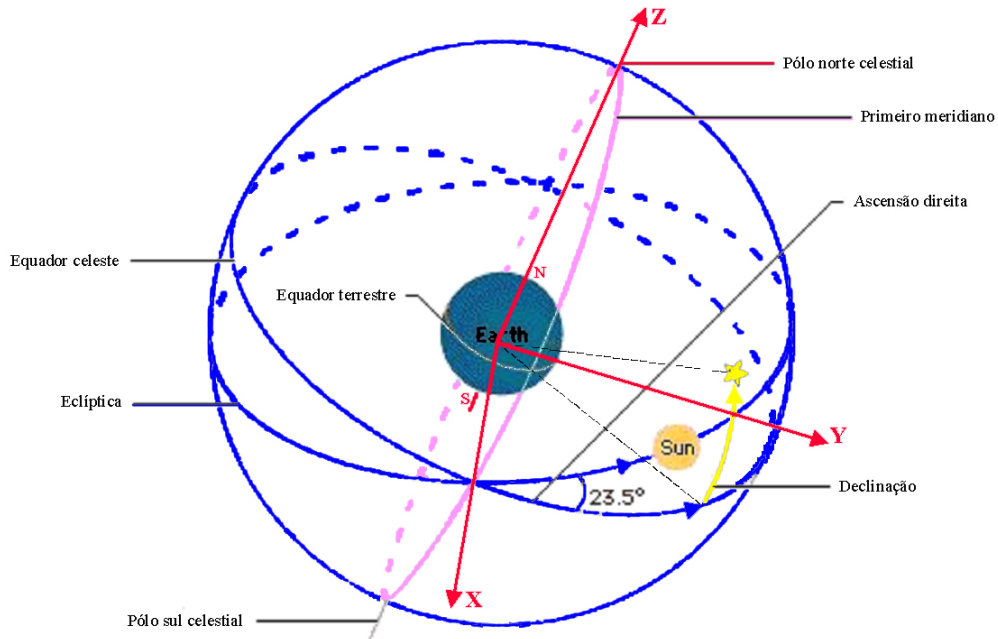
#### 3.1.1 Introdução

No Capítulo 2 as órbitas foram especificadas no plano mas vivemos num espaço tridimensional. Será necessário identificar o plano orbital relativamente a um referencial de inércia conhecido. No domínio das órbitas Keplerianas, basta conhecermos a posição  $\vec{r}_0$  e a velocidade  $\vec{v}_0$  da partícula num certo instante de tempo para podermos determinar a órbita no espaço completamente. No espaço tridimensional,  $\{\vec{r}_0, \vec{v}_0\}$  requerem a especificação de seis parâmetros para resolver o problema, as três componentes de cada um dos vectores. Para especificar os vectores é necessário um referencial, e o mais conveniente é ser um referencial de inércia centrado no corpo central.

Para um observador, por exemplo na Terra, não é muito conveniente especificar  $\{\vec{r}_0, \vec{v}_0\}$  pois estes vectores não tornam óbvia a órbita do satélite no espaço. Os *Elementos Clássicos de Órbita* são um conjunto de 6 parâmetros capazes de especificar completamente qualquer órbita, ou seja, são equivalentes a ter as posição e velocidade iniciais, mas são muito mais intuitivos, tornando a identificação de órbitas muito mais fácil.

#### 3.1.2 Referencial de inércia

Vamos centrar a discussão nas imediações da Terra. Antes de tudo o resto, é necessário especificar um referencial de inércia. O centro do referencial tem que acompanhar a Terra mas isso não é um grande problema. Como já vimos, qualquer satélite em revolução à volta da Terra sente uma aceleração aplicada pelo Sol praticamente igual à sentida pela Terra, já que está numa posição muito próxima do centro da Terra, quando comparado com a distância ao Sol. Se o satélite revoluciona a Terra, significa que a acompanha no seu movimento à volta do Sol. Ou seja, do ponto de vista da translação relativamente à Terra, podemos simplesmente descontar a aceleração aplicada pelo Sol nos dois corpos, desde que a diferença entre a aceleração aplicada pelo Sol no satélite e a aplicada pelo Sol na Terra seja desprezável. Se se quiser levar em conta essa diferença, ela pode entrar



**Figura 3.1:** Referencial de inércia [6].

como uma perturbação de terceiro corpo, mantendo-se o movimento da Terra à volta do Sol<sup>1</sup>. Nestas condições, um referencial que acompanhe a Terra na sua órbita pode ser considerado aproximadamente de inércia, do ponto de vista da translação. Este referencial é denominado Referencial de inércia centrado na Terra, utilizando-se a sigla ECI da designação em língua inglesa (*Earth Centered Inertial frame*).

Falta a questão de determinar se o referencial não roda e como determinar as direcções dos eixos coordenados. Já a questão de o que é um referencial de inércia se torna tautológica se não conhecemos as forças aplicadas nas partículas. Considera-se que o Universo não roda, de modo que as direcções fixas do referencial podem ser determinadas pela observação de estrelas distantes. Um método utilizado historicamente é o de utilizar a eclíptica e o equador celeste para determinar os eixos coordenados (cf. Figura 3.1). Assim, o eixo  $z$  define-se na direcção do eixo de rotação própria da Terra, sentido Sul-Norte. O eixo  $x$  aponta para o equinócio *Vernal*, ou da Primavera (hemisfério Norte), i. e. para a intersecção da eclíptica com o equador, no nodo em que o Sol passa do hemisfério Sul para o hemisfério Norte. O eixo  $y$  é escolhido de modo a que o referencial seja *direito*, como todos têm que ser, estando portanto também no plano do equador. O eixo  $x$  apontaria para a constelação de Aries no tempo da Babilónia e é também designado por *primeiro ponto de Aries*.

<sup>1</sup>Esta questão já foi debatida a propósito de um problema com  $n$  corpos.



### 3.1.3 Epoch

O referencial ECI não rodaria se o eixo de rotação da Terra tivesse uma direcção fixa no espaço, mas isso só acontece aproximadamente. Na realidade o eixo de rotação da Terra precessa devido aos efeitos da gravidade da Lua (mais importante) e do Sol na Terra por esta não ser uma esfera perfeita. É a bem conhecida *precessão dos equinócios*. O período é de cerca de 26 000 anos, o que faz rodar o eixo  $x$  no plano do equador a uma taxa de  $0.8'$ /ano, e é muito diferente do efeito de precessão que a Terra teria se pudesse ser considerada um corpo livre. Esse efeito existe mas é muito menor e tem um período também muito menor, da ordem das centenas de dias. O referencial ECI é então apenas *aproximadamente de inércia* pois roda lentamente (para além da questão da aceleração da origem, já discutida).

Como o referencial roda, mesmo que lentamente, é necessário saber exactamente que referencial se utilizou em cada medida. Pode-se especificar a data época ou *epoch* em que as medições são feitas, definidas pela intersecção das linhas do equador e eclíptica na altura da medição. É o referencial instantâneo dessa data. Alternativamente, pode-se usar um referencial definido numa certa altura e mudar de vez em quando para não acumular erros (se a precisão requerida o permitir). O referencial J2000 é o utilizado nesta altura, nos casos em que uma precisão muito elevada não é requerida. Ele foi definido com o alinhamento do Equinócio Vernal de 1 de Janeiro de 2000, às 12:00 TMG. Antes do J2000 era utilizado o referencial B1950, baseado no ano Besseliiano. Em 2025 será feita a mudança para o referencial J2050 i. e. estes referenciais são supostos serem ajustados de 50 em 50 anos para compensar a precessão dos equinócios e evitar ter que ajustar no Epoch.

### 3.1.4 Elementos Clássicos de Órbita

Os seis elementos alternativos à posição e velocidade iniciais, os *elementos clássicos de órbita* (ECO), especificam o movimento dos corpos através da determinação da órbita e sua orientação no espaço.

Eles dividem-se naturalmente em dois subconjuntos, os que se especificam a orientação da órbita no espaço,  $\{i, \Omega, \varpi\}$  (cf. Figura 3.2):

- A *Inclinação*  $i$  da órbita, relativamente ao eixo polar, ângulo entre a normal à órbita e o eixo polar (normal ao equador).
- A *Ascensão Recta do Nodo Ascendente*  $\Omega$ , o ângulo entre o eixo  $x$  e a intersecção da órbita com o equador, do lado em que o satélite passa do hemisfério Sul para o hemisfério Norte.
- O *Argumento do Perigeu*  $\varpi^2$ , o ângulo contado a partir do nodo ascendente, no plano da órbita, até atingir o perigeu.

---

<sup>2</sup>Esta letra grega é uma variante do  $\pi$ , sendo portanto um  $\pi$  (perigeu) e é a letra classicamente adoptada. Não confundir com a letra  $\omega$ , embora esta seja adoptada para o mesmo fim por alguns autores.

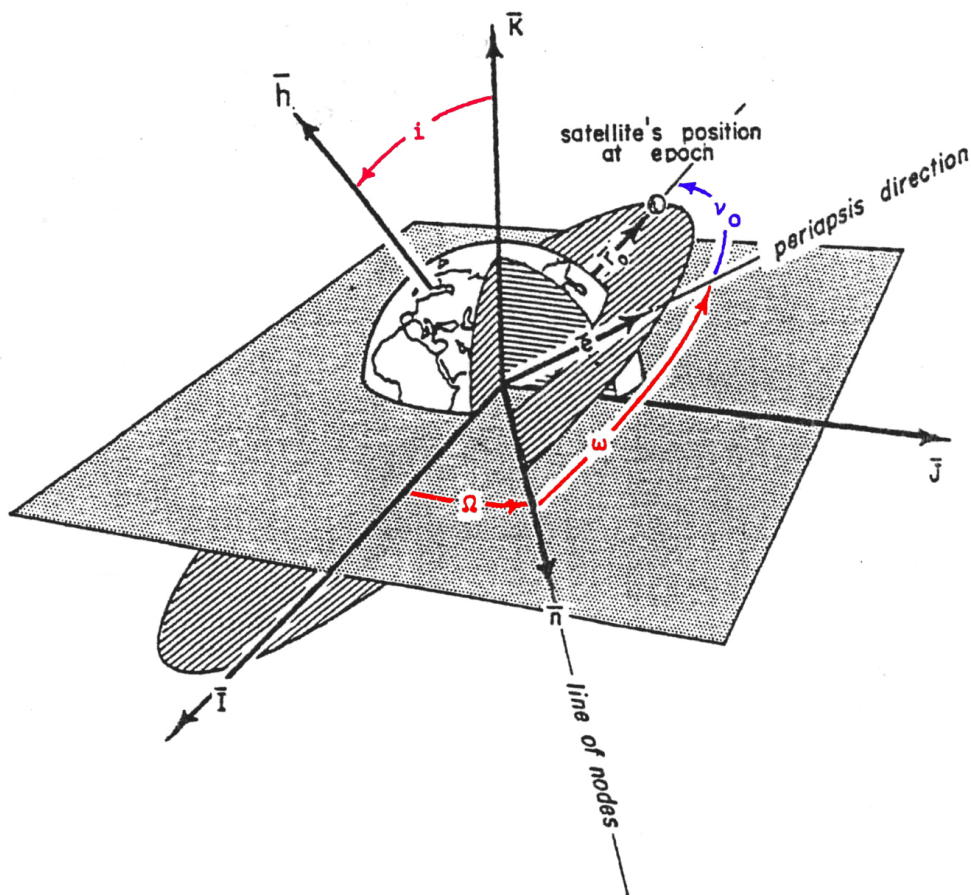


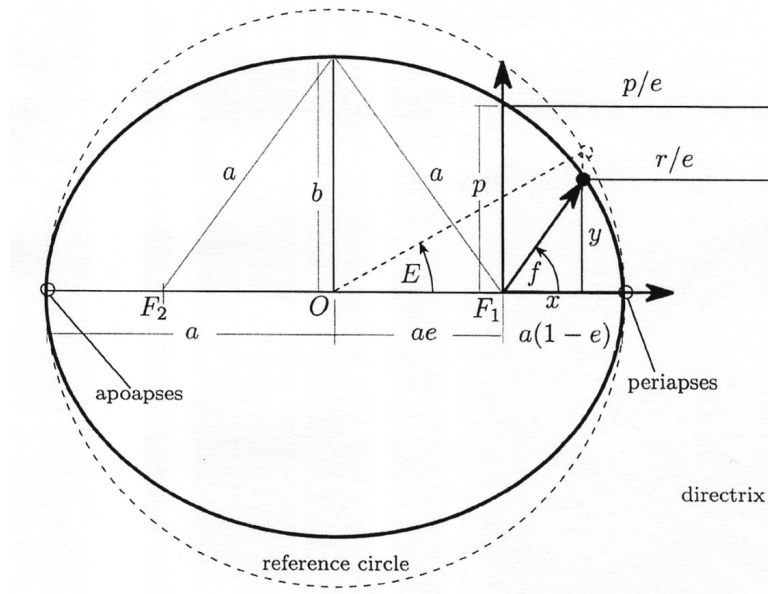
Figura 3.2: Elementos clássicos de órbita [6].

A inclinação está limitada ao intervalo  $i \in [0, \pi]$  de modo a assegurar uma correspondência biunívoca. Os outros dois,  $\Omega$  e  $\varpi$ , pertencem em princípio ao intervalo  $[0, 2\pi]$ , embora possa ser interessante (e é possível) estender esse intervalo. Estes três elementos determinam a posição do plano da órbita no espaço e a orientação da linha das ápsides no plano orbital, ou seja a orientação da órbita no plano.

O nome *Ascensão Recta do Nodo Ascendente* é utilizado no referencial centrado na Terra. Quando o referencial é o heliocêntrico-elíptico, centrado no Sol e definido de modo similar mas usando a eclíptica em vez do equador, a coordenada correspondente toma o nome de *Longitude do Nodo Ascendente*; embora com nomes diferentes e referenciais diferentes, correspondem ao mesmo conceito.

Os restantes três elementos do segundo subconjunto têm que ver com o tipo de órbita e localização do satélite nela,  $\{a, e, T_0\}$  (cf. Figura 3.3):

- A elipse (ou outra cônica) é completamente determinada pelo *Semi-eixo Maior*  $a$  e pela *Excentricidade*  $e$ .



**Figura 3.3:** Órbita com os três elementos clássicos de órbita que determinam a forma da órbita [50].

- A posição do satélite na órbita pode ser calculada em qualquer instante sabendo o *Tempo de Passagem no Perigeu*  $T_0$ .

Os parâmetros orbitais  $(a, e)$  já são bem conhecidos do Capítulo 2 como sendo suficientes para determinar completamente a órbita (note-se que  $\varpi$  substitui  $\beta_0$ ).  $T_0$  serve para relacionar a órbita com a passagem do tempo do calendário e permite calcular a posição na órbita usando as equações de Kepler e da órbita (e sabendo  $a, e$ ).

Há muitos outros conjuntos de parâmetros que podem ser utilizados de modo equivalente aos ECO ou noutras situações, em que se determinem mais adequados que os ECO ou as condições iniciais. Uma alternativa não muito diferente dos ECO é especificar a anomalia verdadeira num certo instante de tempo no calendário, que é equivalente a especificar  $T_0$ . Os elementos orbitais de Delaunay, ou variáveis de Delaunay, são elementos relacionados com a Mecânica Hamiltoniana usados para simplificar cálculos de perturbações.

Os elementos clássicos de órbita  $\{i, \Omega, \varpi, a, e, T_0\}$  são de *interpretação muito mais fácil* e natural do que especificar  $\{\vec{r}_0, \vec{v}_0\}$ .

### 3.2 Elementos Clássicos de Órbita versus $\vec{r}_0, \vec{v}_0$

Em § 3.1.4 argumentámos que os Elementos Clássicos de Órbita eram equivalentes a ter a posição e a velocidade iniciais, mas isso não foi demonstrado. É o que vamos fazer nesta secção, ao mesmo tempo que se obtêm as fórmulas que nos permitem passar das

posição e velocidade iniciais para os ECO e vice-versa.

### 3.2.1 Determinação dos Elementos Clássicos de Órbita de $\vec{r}_0, \vec{v}_0$

Sejam  $\vec{r}_0, \vec{v}_0$  conhecidos. Da equação da energia (2.86), calculada no ponto inicial,

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu}{2a} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu}{r_0}, \quad (3.1)$$

obtém-se imediatamente o *semi-eixo maior*  $a$ , como já tinha sido feito para a órbita estabelecida a partir de condições iniciais (2.138), ou seja,

$$a = -\frac{\mu}{v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}}. \quad (3.2)$$

O vector de Laplace-Runge-Lenz (2.174) determina directamente a direcção da periápside no espaço e a *excentricidade*  $e$

$$\vec{e} = \frac{1}{\mu} \left[ \vec{v}_0 \times (\vec{r}_0 \times \vec{v}_0) - \mu \frac{\vec{r}_0}{r_0} \right] \quad (3.3)$$

Conhecendo o instante inicial  $t_0$ , o *tempo de passagem no perigeu*  $T_0$  pode imediatamente ser calculado pelo procedimento seguinte:

- A equação de Kepler (e. g. (2.104) se for uma órbita elíptica) determina  $t_0 - T_0$  em função da anomalia excêntrica  $E_0$

$$E_0 : \quad T_0 = t_0 - \sqrt{a^3/\mu}(E_0 - e \sin E_0). \quad (3.4)$$

- A anomalia excêntrica obtém-se da anomalia verdadeira  $\theta_0$  correspondente à posição considerada, utilizando (2.109),

$$\tan \frac{E_0}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta_0}{2}. \quad (3.5)$$

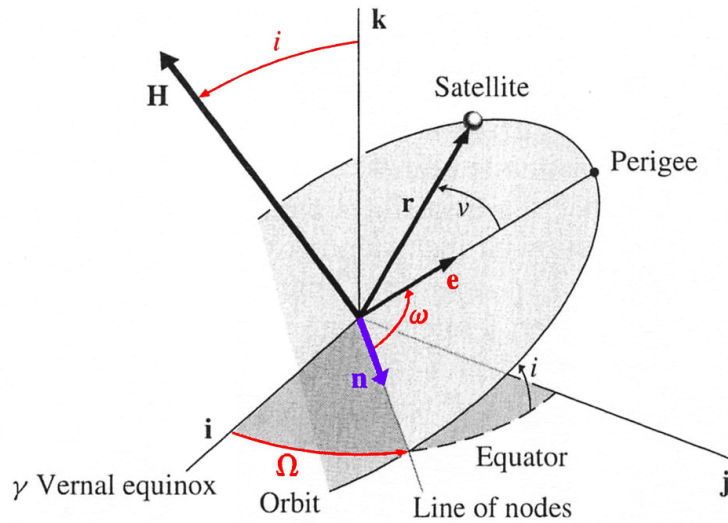
- A anomalia verdadeira inicial  $\theta_0$  é obtida a partir das condições iniciais  $r_0, v_0, \gamma_0$  usando (2.132)

$$\tan \theta_0 = \frac{\frac{r_0 v_0^2}{\mu} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0}{\frac{r_0 v_0^2}{\mu} \cos^2 \gamma_0 - 1}, \quad (3.6)$$

ou directamente através do vector excentricidade

$$\cos \theta_0 = \frac{\vec{e} \cdot \vec{r}_0}{e r_0} \quad (3.7)$$

com o *Quadrante* de  $\theta_0$  a ser determinado pelos *sinais* de  $\vec{r}_0, \vec{v}_0$ .



**Figura 3.4:** Elementos clássicos de órbita [60].

Para determinar os Elementos Clássicos de Órbita relacionados com a orientação no espaço, considere-se o referencial ECI com vetores de base  $\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z$ , respectivamente.

Já se determinou  $\vec{e}$ , que tem a direção e sentido do perigeu. O momento angular  $\vec{h}$  obtém-se de  $\vec{r}_0, \vec{v}_0$ :  $\vec{h} = \vec{r}_0 \times \vec{v}_0$ . O vector unitário  $\vec{n}$  define a *linha dos nós* (nodo ascendente) e pode ser obtido de  $\vec{h}$

$$\vec{n} = \frac{\vec{e}_Z \times \vec{h}}{|\vec{e}_Z \times \vec{h}|}. \quad (3.8)$$

O vector  $\vec{n}$  pertence ao plano do equador logo, pode-se escrever,

$$\vec{n} = \cos \Omega \vec{e}_X + \sin \Omega \vec{e}_Y, \quad (3.9)$$

sendo necessário utilizar ambas as componentes de  $\vec{n}$  para eliminar a ambiguidade de sinal e determinar  $\Omega$  univocamente.

A inclinação da órbita  $i$  é facilmente obtida a partir do momento angular

$$\cos i = \frac{\vec{e}_Z \cdot \vec{h}}{|\vec{h}|}, \quad (3.10)$$

sem ambiguidade porque, por definição,  $i \in [0, \pi]$ .

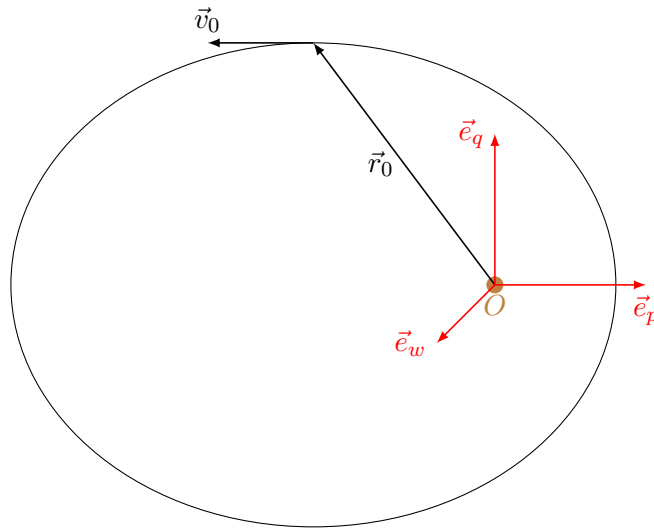
Finalmente, o argumento do perigeu é obtido de

$$\cos \varpi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{|\vec{e}|}, \quad (3.11)$$

mas é necessário confirmar o quadrante pois o co-seno não distingue hemisférios. De modo a resolver a indeterminação, pode verificar-se para que hemisfério aponta o vector excentricidade.

### 3.2.2 Referencial de inércia alinhado com a órbita

Os ECO que definem a orientação da órbita no espaço são equivalentes a ângulos de Euler que transformam um referencial alinhado com o plano da órbita e linha das ápsides para o referencial de inércia, como vamos ver.



**Figura 3.5:** O referencial  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{w}$ .  $\vec{p}$  tem a direcção da periápside,  $\vec{q}$  do semi-latus rectum e  $\vec{w}$ , com direcção perpendicular ao plano orbital, do momento angular (visto em perspectiva).

Seja um referencial  $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{w}\}$  orientado pela órbita (cf. Figura 3.5) tal que:

- $\vec{e}_p$  tem a direcção e sentido da periápside;
- $\vec{e}_q$  tem a direcção  $\theta = \pi/2$  no plano orbital;
- $\vec{e}_w$  está orientado na direcção normal ao plano no sentido directo da órbita.

Este referencial será inercial (apenas rodado relativamente ao outro) se a órbita for Kepleriana, e pode ser imediatamente determinado pelos parâmetros da órbita:

$$\vec{e}_p = \frac{\vec{e}}{e}, \quad \vec{e}_w = \frac{\vec{h}}{|\vec{h}|}, \quad \vec{e}_q = \vec{e}_w \times \vec{e}_p. \quad (3.12)$$

É fácil ver que

$$\vec{r}_0 = r_0 \cos \theta_0 \vec{e}_p + r_0 \sin \theta_0 \vec{e}_q. \quad (3.13)$$

Por outro, a velocidade é, por definição,

$$\begin{aligned}\vec{v}_0 &= \dot{r}_0 \vec{e}_{r_0} + r_0 \dot{\theta}_0 \vec{e}_{\theta_0} \\ &= \dot{r}_0 (\cos \theta_0 \vec{e}_p + \sin \theta_0 \vec{e}_q) + r_0 \dot{\theta}_0 (-\sin \theta_0 \vec{e}_p + \cos \theta_0 \vec{e}_q).\end{aligned}\quad (3.14)$$

Utilizando  $\dot{\theta}_0 = h/r_0^2$ ,  $\dot{r}_0 = \frac{\mu e}{h} \sin \theta_0$  e a equação da órbita  $1/r_0 = (1 + e \cos \theta_0)/(h^2/\mu)$ , obtém-se

$$\boxed{\vec{v}_0 = \frac{\mu}{h} [-\sin \theta_0 \vec{e}_p + (e + \cos \theta_0) \vec{e}_q]}.\quad (3.15)$$

Os vectores  $\vec{r}_0, \vec{v}_0$  estão então escritos no referencial  $\{\vec{e}_p, \vec{e}_q, \vec{e}_w\}$  e podem ser transformados para o referencial ECI.

### 3.2.3 Transformação entre referenciais (resumido)

Vamos ver como se pode definir a transformação de referenciais com ângulos de Euler, i. e. à custa de rotações sucessivas em torno dos eixos coordenados. Seja  $R_k(\alpha)$  a rotação em torno do eixo  $k$  para passar do referencial  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  para  $\{\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}\}$ . Por exemplo, no caso de rotação em torno de  $z$  (no caso em torno de  $y$  os sinais dos sin são ao contrário) tem-se

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_z^{-1}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad (3.16)$$

$$R_z^{-1}(\alpha) = R_z(-\alpha), \quad \begin{bmatrix} \vec{e}_{x'} & \vec{e}_{y'} & \vec{e}_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \end{bmatrix} R_z(\alpha).\quad (3.17)$$

As componentes de um vector  $\vec{A}$  transformam-se de acordo com

$$\begin{bmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{bmatrix} = R_z^{-1}(\alpha) \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = R_z(\alpha) \begin{bmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{bmatrix}\quad (3.18)$$

No caso dos referenciais  $\{\vec{e}_p, \vec{e}_q, \vec{e}_w\}$  e  $\{\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z\}$  (cf. Figura 3.4) tem-se

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_p & \vec{e}_q & \vec{e}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_X & \vec{e}_Y & \vec{e}_Z \end{bmatrix} R_3(\Omega) R_1(i) R_3(\varpi),\quad (3.19)$$

com

$$\begin{bmatrix} A_p \\ A_q \\ A_w \end{bmatrix} = R_3^{-1}(\varpi) R_1^{-1}(i) R_3^{-1}(\Omega) \begin{bmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{bmatrix}\quad (3.20a)$$

$$\begin{bmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{bmatrix} = R_3(\Omega) R_1(i) R_3(\varpi) \begin{bmatrix} A_p \\ A_q \\ A_w \end{bmatrix},\quad (3.20b)$$

e qualquer vector  $\vec{A}$  pode ser escrito nos dois referenciais, incluindo  $\{\vec{r}_0, \vec{v}_0\}$





# Capítulo 4

## Manobras orbitais

### 4.1 Manobras impulsivas

Após compreender como as órbitas Keplerianas funcionam, podemos começar a pensar no que distingue a mecânica orbital da mecânica celeste: a capacidade de alterar o estado do movimento, i. e. de manobrar. E antes de complicar ainda mais o ambiente de forças, vamos estudar manobras no contexto de órbitas Keplerianas.

Manobrar implica introduzir uma nova força, que será significativa se altera significativamente o movimento. Isto levanta uma questão: se a força é significativa, o movimento deixa de ser do tipo Kepleriano. Esta contradição pode ser ultrapassada em muitos casos reconhecendo que as manobras orbitais realizadas por foguetões químicos são em geral de curta duração, quando comparadas com as escalas típicas do problema. A duração das manobras costuma ser da ordem de alguns minutos. Por exemplo, a manobra de injeção trans-lunar<sup>1</sup>, a manobra que colocava a Apollo no caminho da Lua a partir da órbita da Terra (portanto uma manobra importante, apesar de não chegar a escapar da influência da Terra), durava cerca de 350s, um pouco menos de seis minutos. Isto é cerca de 6% do período de uma órbita baixa terrestre, acontecendo numa pequena zona da órbita.

As considerações acima conduzem ao conceito de *manobra impulsiva*, o de considerar que as manobras são instantâneas, uma vez que são rápidas, quando comparadas com as escalas de tempo dos problemas. Este tipo de aproximações não é inédito, por exemplo em choques com ressalto. Neste caso, esta aproximação funciona bem em muitos casos, com erros da ordem de alguns, poucos, por cento (5% é um número típico mas pode variar bastante, falaremos sobre esta questão mais tarde).

Considerar as manobras como instantâneas — impulsivas — tem muitas vantagens:

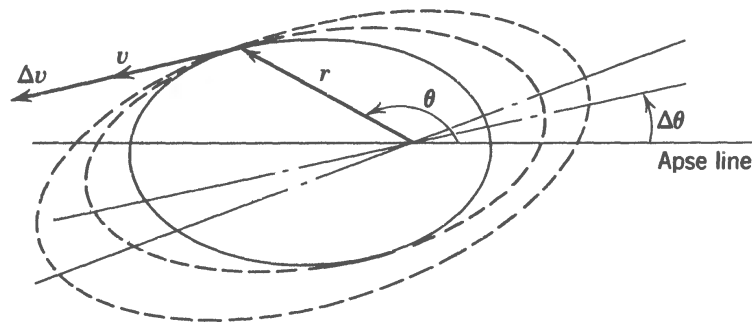
- Podemos estudar os problemas separadamente das preocupações com a força aplicada e massa dos veículos, já que o relevante é a velocidade imediatamente antes e depois do impulso.
- A manobra é reduzida e caracterizada por uma variação de velocidade instantânea,

---

<sup>1</sup>*Trans-lunar injection*, em Inglês, também conhecida pela sua sigla TLI.

$\Delta v$  (escalar se a direcção e sentido forem conhecidos). A manobra acaba por ser designada precisamente por  $\Delta v$ .

- Uma vez que a manobra é instantânea, o veículo espacial está na mesma posição imediatamente antes e depois da manobra.
- Passa-se num único ponto de uma órbita Kepleriana para outra órbita Kepleriana, não havendo troços de trajectória complicados. Ou seja, sob acção de um único impulso — um  $\Delta v$  — as órbitas inicial e final interceptam-se necessariamente na posição da manobra.
- O resultado é exactamente determinado pelo  $\Delta v$  aplicado, sem indeterminações na trajectória ou necessidade de cálculos mais complicados. Claro que na realidade será mais complicado mas esta é uma grande vantagem para cálculos preliminares.



**Figura 4.1:** Manobra de um impulso com variação apenas no módulo do vector velocidade [58].

Na Figura 4.1 podemos ver um exemplo de uma manobra impulsiva, no caso apresentado apenas uma variação do módulo do vector velocidade. Pode-se observar que as características da órbita,  $a, e, \beta_0, \theta_0$  podem mudar todas, a única coisa que não muda é o ponto onde se dá o impulso ser da órbita.

Uma característica clara mas importante das manobras é que tipicamente se tem como objectivo realizá-las com o menor consumo de combustível possível, já que é extremamente dispendioso transportar massa para o espaço. Isto significa que, pela desigualdade triangular, o efeito de um  $\Delta v$  de módulo constante é tanto maior quanto mais alinhado for com a velocidade (como na Figura 4.1). Ou seja, uma das técnicas para otimizar as manobras é procurar situações em que a manobra possa ser realizada na direcção da velocidade.

Um exemplo interessante é o da manobra de escape a partir de uma órbita circular de raio  $r_c$ . A velocidade  $v_c$  é dada por (cf. Capítulo 2)

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r_c}}, \quad (4.1)$$

que tem a direção transversal ao raio da órbita. As órbitas de escape são parabólicas, de energia igual a zero, e são as órbitas com energia mais baixa que conseguem atingir infinito, o que significa que à distância  $r_c$  a velocidade de tal órbita será

$$v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{r_c}}, \quad (4.2)$$

que pode ter qualquer direção. O valor do impulso será a diferença vectorial entre as duas velocidades

$$\Delta \vec{v}_e = \vec{v}_e - \vec{v}_c, \quad (4.3)$$

que será mínimo quando os vectores forem colineares, i. e. quando a periápside da órbita parabólica coincidir com o raio da órbita circular  $r_c$ . Nesse caso, e só nesse caso, o  $\Delta v_e$  é mínimo e igual a

$$\Delta v_e = v_e - v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r_c}}(\sqrt{2} - 1). \quad (4.4)$$

## 4.2 A transferência de Hohmann

### 4.2.1 Manobra fundamental da mecânica orbital: a transferência de Hohmann

Uma das manobras mais usadas em mecânica orbital, pela sua simplicidade e eficácia, é a órbita de transferência de Hohmann, ou simplesmente *transferência de Hohmann*, que permite a transferência de um veículo espacial entre duas órbitas circulares arbitrarias. Ela foi gizada pelo engenheiro alemão Walter Hohmann, um dos pioneiros entusiastas das viagens pelo espaço. Ele era membro da famosa *Sociedade do Voo Espacial*<sup>2</sup> e publicou em 1928 uma antologia de artigos sobre o voo espacial que inclui a manobra de transferência, agora com o seu nome, como contribuição própria.

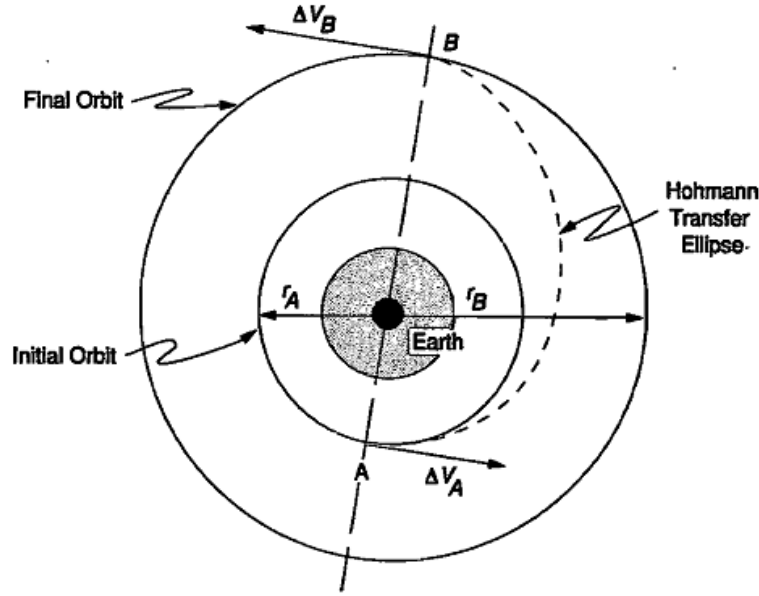
No caso de duas órbitas circulares, cada uma delas está a uma distância diferente do astro central (foco). Isto significa que há uma órbita elíptica cuja periápside [apoápside] coincide com o raio da órbita interior [exterior]. Esta órbita tem um ponto comum com cada uma das órbitas circulares, o que significa que nesse ponto consegue-se passar da órbita circular inicial para a órbita elíptica de transferência com um impulso e desta para a órbita circular final com um segundo impulso. A transferência de Hohmann requer então dois impulsos para realizar a transferência

Para fixar ideias, exemplifiquemos com uma transferência de uma órbita interior de raio  $r_A$  para uma exterior de raio  $r_B$  (cf. Figura 4.2). Como a linha das ápsides da órbita de transferência vai de uma órbita circular até à outra, do outro lado, o semi-eixo maior  $a_H$  da órbita de transferência é determinado por

$$2a_H = r_A + r_B. \quad (4.5)$$

A velocidade nas órbitas circulares é igual em qualquer ponto e sempre perpendicular ao raio. Uma vez que as manobras são realizadas na periápside e apoápside da órbita de

<sup>2</sup> *Verein für Raumschiffahrt* no original alemão, uma associação para a promoção do voo espacial.



**Figura 4.2:** Manobra de transferência de Hohmann [34].

transferência, as velocidades antes e depois de cada impulso são colineares. Utilizando a equação vis-viva (cf. Capítulo 2) para as três órbitas, o primeiro impulso  $\Delta v_A$ , que acontece em  $r = r_A$  e faz passar o veículo da órbita inicial para a órbita de transferência, é

$$\Delta v_A = \sqrt{2\mu \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{2a_H} \right)} - \sqrt{\frac{\mu}{r_A}}, \quad (4.6a)$$

onde o primeiro termo do lado direito é a velocidade na periápside da órbita de transferência, com  $a_H$  dado por (4.5), e o segundo a velocidade da órbita circular original.  $\Delta v_A > 0$  pois neste caso a órbita de transferência tem mais energia que a órbita original  $a_H > r_A$ . Quando o veículo atinge a apoápside da órbita de transferência, em  $r = r_B$ , é dado o segundo impulso que o transfere para a órbita circular final

$$\Delta v_B = \sqrt{\frac{\mu}{r_B}} - \sqrt{2\mu \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{2a_H} \right)}. \quad (4.6b)$$

O  $\Delta v_{\text{tot}}$  total, sempre entendido como uma medida do gasto total de propelente, é então a soma dos módulos dos  $\Delta v_i, i = A, B$  individuais

$$\Delta v_{\text{tot}} = |\Delta v_A| + |\Delta v_B|, \quad (4.7)$$

já que o sinal dos  $\Delta v$  está relacionado com o seu sentido e nunca se subtrai gasto de propelente. No exemplo dado, ambos os  $\Delta v$  são positivos mas nem sempre isso acontece.

Como o veículo descreve exactamente meia órbita de periápside a apoápside, o tempo

que demora a transferência  $t_t$  é exactamente meio período da órbita de transferência

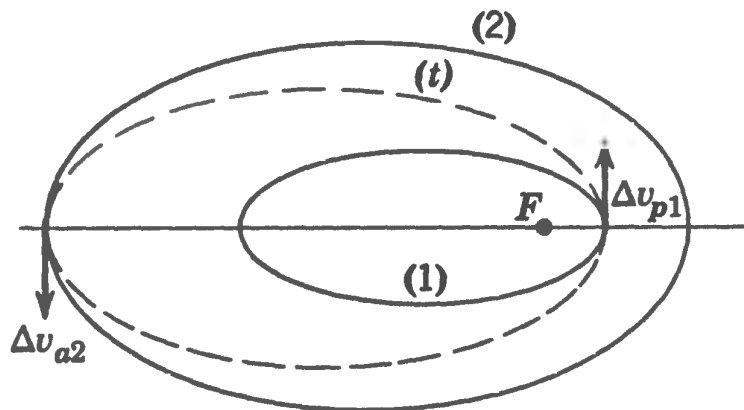
$$t_t = \frac{T_H}{2} = \pi \sqrt{\frac{a_H^3}{\mu}}. \quad (4.8)$$

Se a órbita inicial tivesse raio maior que a final, tudo se passaria de modo similar, com a diferença que os impulsos seriam negativos, i. e. com sentido contrário à velocidade, em ambos os casos.

Como se viu, a manobra é bastante simples mas bastante eficaz, já que os impulsos têm sempre a mesma direcção da velocidade. Na realidade demonstra-se que a manobra de transferência de Hohmann é a manobra mais eficiente de entre as manobras de dois impulsos, i. e. a que requer menor  $\Delta v_{\text{tot}}$  deste conjunto. Também se demonstra que é a mais lenta i. e. que é a que demora mais tempo a acontecer, de entre o conjunto de todas as manobras de dois impulsos.

Existem muitos factos surpreendentes em mecânica orbital. Por exemplo, embora a transferência de Hohmann seja a transferência óptima de dois impulsos entre duas órbitas circulares, se a razão das ápsides for  $\frac{r_a}{r_p} \gtrsim 3.30417$  custará mais  $\Delta v_{\text{tot}}$  mudar para a órbita circular superior do que escapar para infinito (demonstração ao cuidado do estudante interessado). Embora escapar para infinito exija mais energia, a energia não é o único factor relevante ou, mais exactamente, é mais difícil de calcular do que parece. Discutiremos esta questão mais tarde (cf. § 4.3.2). Também é necessário reparar que, variando o potencial em  $1/r$ , as maiores variações de energia acontecem quando se fazem transferências mais próximas do foco. Para órbitas altas, já não se está muito longe de infinito em termos energéticos.

#### 4.2.2 Transferência de Hohmann entre órbitas elípticas



**Figura 4.3:** Transferência de Hohmann entre órbitas elípticas com linha das ápsides colinear [58].

Uma generalização simples da transferência de Hohmann é a denominada *transferência de Hohmann elíptica*, i. e. entre as periápside e apoápside de órbitas elípticas alinhadas (cf. Figura 4.3). Neste caso, já não é possível realizar a transferência a partir de qualquer ponto mas a manobra dos pontos referidos continua a ser basicamente a mesma, com uns cálculos suplementares porque as velocidades das órbitas inicial e final envolvem agora a excentricidade de cada órbita.

### 4.2.3 A transferência bi-elíptica

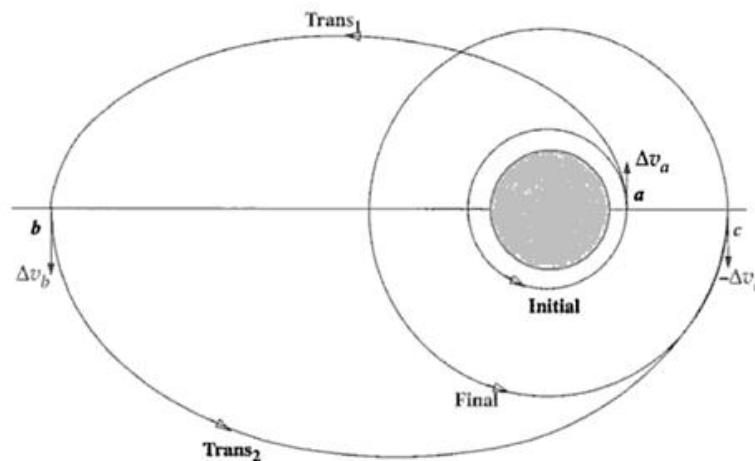


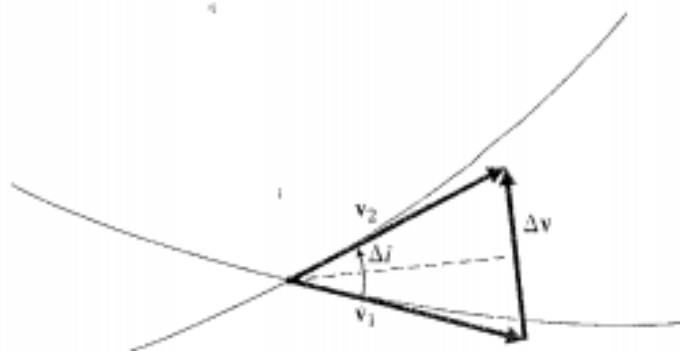
Figura 4.4: Transferência bi-elíptica.

Uma manobra bastante interessante é a transferência bi-elíptica, uma manobra de três impulsos entre duas órbitas circulares que é uma generalização da transferência de Hohmann: começa por uma transferência para um ponto intermédio situado acima da órbita de destino. Chegado lá, um segundo impulso eleva a periápside para a altitude da órbita final e, chegado a esta, um impulso de travagem finalmente insere o veículo na órbita final (cf. Figura 4.4).

A transferência bi-elíptica é mais económica em termos de  $\Delta v_{\text{tot}}$  do que a transferência de Hohmann (note-se que a bi-elíptica tem três impulsos, e não dois) quando a razão dos raios das órbitas final e inicial é  $r_f/r_i > 15.58$ . Este valor é considerável. Por exemplo, em órbitas terrestres, começando numa órbita bastante baixa de 200 km de altitude, quase o mínimo possível, a órbita final tem que ter um raio superior a 100 000 km, mais do dobro da órbita geoestacionária, uma das mais altas usualmente utilizadas. E o ponto intermédio teria que estar muito acima desse valor. Portanto, pelo menos na Terra, esta órbita não oferece grandes vantagens relativamente à transferência de Hohmann. De facto, mesmo nos casos mais favoráveis, quando o ponto intermédio tende para infinito, a transferência bi-elíptica é, no máximo, cerca de 8% melhor que a de Hohmann.

#### 4.2.4 Mudanças de plano

As manobras não têm que se cingir a um plano orbital pois as órbitas existem em três dimensões e pode acontecer ser necessário passar de um plano para outro. De modo a ser mais claro, é mais fácil começar por se pensar em mudanças de plano puras, i. e. manobras que alteram apenas o plano orbital, resultando numa órbita em tudo igual excepto no plano que a contém. Deste modo separamos a mudança de plano de outras manobras, simplificando o problema. Mais tarde poderemos eventualmente combinar manobras (cf. § 4.3.1).



**Figura 4.5:** Mudança de plano pura. A órbita final tem as mesmas características da inicial excepto estar num plano diferente [60].

A mudança de plano, manobra de um impulso, é realizada num ponto da intersecção dos planos das órbitas inicial e final (cf. Figura 4.5). Se essas órbitas são similares no seu plano, a sua velocidade será a mesma no ponto da manobra, i. e. as velocidades inicial e final do impulso têm o mesmo módulo, e fazem um ângulo que coincide com a inclinação dos planos orbitais. Então, os vectores das velocidades inicial e final, e a sua diferença — o  $\Delta v$  — é o terceiro lado de um triângulo isósceles formado pelos três vectores. Se o ângulo entre os planos orbitais for  $\Delta i$ , um cálculo geométrico simples determina que o terceiro lado é dado por

$$\Delta v = 2v \sin \frac{\Delta i}{2}. \quad (4.9)$$

Este resultado é muito importante porque mostra que as mudanças de plano são manobras muito dispendiosas em termos de propelentes. Por exemplo, se o ângulo entre os planos for de  $60^\circ$ , o  $\Delta v$  igualará a velocidade orbital. Mesmo um ângulo que poderemos considerar bastante moderado de  $10^\circ$  resultará num  $\Delta v$  da ordem de 17% da velocidade orbital, o que, em órbita baixa terrestre, é superior a 1 km/s.

A consequência mais importante é que nos lançamentos deve-se usar o azimute que permita introduzir o veículo directamente na inclinação final pois as mudanças de plano são proibitivas. Outra alternativa que minimiza o problema será mudar de plano, se mesmo necessário, em pontos da órbita onde a velocidade é mínima, ou seja na apoápside.

### 4.3 Heurísticas de desempenho

Na secção anterior vimos que há manobras que exigem muito propelente. A minimização de propelente é um dos objectivos mais comuns em mecânica orbital, já que ele tem que ser transportado do solo e o transporte para o espaço é extremamente dispendioso. É por conseguinte uma boa ideia seleccionar manobras que minimizem o  $\Delta v$  total dispendido, sempre que possível.

#### 4.3.1 Manobras combinadas

Uma das formas mais simples de poupar  $\Delta v$  é combinar manobras, se estas têm que acontecer no mesmo local. Por exemplo, se há manobras a fazer que têm direcções diferentes, a desigualdade triangular determina que o módulo da soma vectorial será menor que a soma dos módulos. Por exemplo pode-se realizar uma transferência de Hohmann e uma mudança de plano simultaneamente ao combinar o impulso da mudança de plano com um dos da transferência de Hohmann. E, como já referido em § 4.2.4, será preferível realizar a mudança de plano com o impulso onde a velocidade seja menor.

Pode até gizar-se manobras de propósito para fazer diminuir o  $\Delta v$ . Por exemplo, se é necessário mudar de plano, pode valer a pena realizar uma transferência até um ponto a grande altitude, onde a velocidade orbital será muito menor, realizar nesse ponto a mudança de plano e voltar para a órbita original ou outra de destino muito mais abaixo. Dependendo dos valores dos parâmetros esta manobra pode valer a pena em termos de  $\Delta v$  total dispendido. Pode até ir-se aproximadamente até infinito numa órbita quase parabólica, caso em que a mudança de plano custa aproximadamente zero, embora seja um pouco demorada.

#### 4.3.2 Ganhos por gravidade

Outro efeito curioso é denominado perdas por gravidade e é relevante quando se pretende ganhar (ou, pelo contrário, perder) energia, i. e. passar para uma órbita com muito mais energia. É uma situação frequente, por exemplo quando se pretende passar para uma órbita mais elevada ou mesmo escapar da atracção do astro central.

Imagine-se que se estava numa órbita de energia

$$\mathcal{E}_i = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}, \quad (4.10)$$

e se pretendia dar um impulso  $\Delta v$  colinear com a velocidade. Qualquer que seja o ponto da órbita à distância  $r$  onde se faça a manobra, a órbita resultante do impulso terá energia

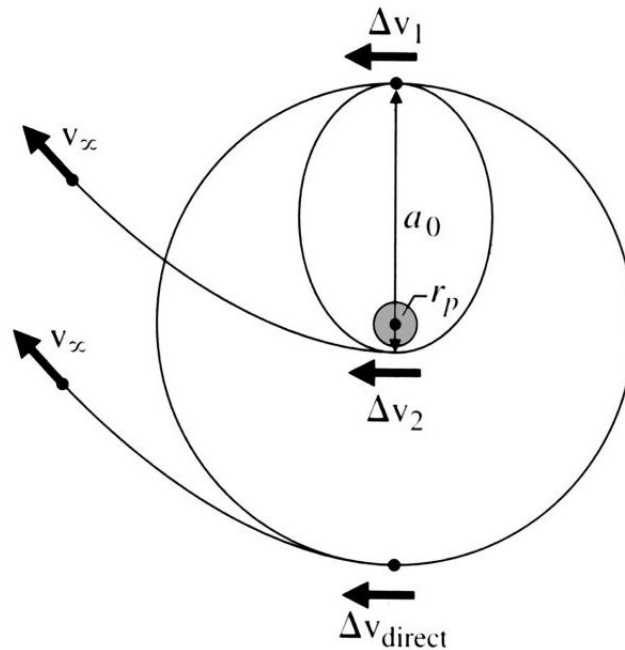
$$\mathcal{E}_f = \frac{(v + \Delta v)^2}{2} - \frac{\mu}{r}. \quad (4.11)$$

A diferença de energias entre ambas as órbitas será

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i = v \Delta v + \frac{(\Delta v)^2}{2}, \quad (4.12)$$



o que significa que se ganhará tanto mais energia quanto maior a velocidade do ponto da órbita inicial onde se faz a manobra. Claro que, se o objectivo for uma órbita com uma determinada energia, o  $\Delta v$  necessário será menor. Em geral, como a velocidade aumenta com a diminuição da distância ao foco, podemos definir a heurística de que, para ganhar energia, é preferível realizar a manobra tão baixo quanto possível.



**Figura 4.6:** Manobra de Oberth, em que se desce a sonda para poder ganhar mais energia, minimizando o gasto de propelentes [60].

Um exemplo da exploração deste princípio é a manobra de Oberth (Figura 4.6) em que se faz uma manobra propositada para se ficar mais perto do foco, aumentando a velocidade, para depois ser necessário um  $\Delta v$  menor para escapar.

Este princípio é muito usado em manobras e até em foguetões que saem do solo. Por exemplo, a trajectória do foguetão Ariane, mesmo quando ele se dirige para uma órbita alta, passa algum tempo a altitude aproximadamente constante, numa zona onde a atmosfera já pode ser desprezada mas ainda relativamente baixa, a ganhar velocidade.

A manobra bi-elíptica mostrada em § 4.2.3 no fundo tira partido deste efeito: ao dirigir-se inicialmente para um ponto a uma altitude superior à final, o primeiro  $\Delta v$  é maior, mas ganhando muito mais energia, podendo os  $\Delta v$  seguintes serem muito mais pequenos, já que as diferenças de energia entre distâncias diminuem com a distância ao foco.

Pode-se perguntar como é possível ganhar energia com o mesmo  $\Delta v$  e partindo de uma órbita sempre com a mesma energia. De onde vem a energia extra? Para compreender isso é necessário lembrar os motores de foguetão expelam material com uma certa velocidade relativamente ao foguetão. No caso de um impulso num ponto

mais baixo com mais velocidade orbital, o material é expelido e ficará com velocidade mais baixa relativamente ao referencial de inércia e, estando mais abaixo, terá menor energia potencial. Por conservação total de energia, química dos propelentes, do material expelido, e do veículo, se o material expelido fica com menos energia, o veículo deverá ficar com mais.

### 4.3.3 Impulsos finitos

Um factor a ter em conta é a diferença entre as manobras impulsivas e as manobras reais que demoram sempre algum tempo. Essa diferença pode ser relativamente pequena mas introduz potenciais quebras de desempenho no caso de *impulsos finitos*<sup>3</sup> que têm que ser levadas em conta, e que passamos a explicar.

Considere-se uma manobra na periápside de uma órbita. A aproximação de impulso instantâneo acontece completamente no ponto da órbita mais próximo do foco, onde a velocidade é máxima. No caso de uma manobra real, ela demorará sempre algum tempo, o que introduz duas questões:

- Apenas num instante de tempo o impulso será dado na periápside, em todos os outros a velocidade orbital é menor, o que significa, por (4.12), que se ganhará menos energia do que o suposto. Ter-se-á assim uma *perda por gravidade*.
- Por outro lado, se o impulso é dado na direcção da velocidade na periápside, em todos os outros pontos ao longo do impulso finito a velocidade orbital não terá a direcção do impulso que, pela desigualdade triangular, implica uma perda. Mesmo que a direcção do impulso acompanhe a rotação do vector velocidade na órbita, no final o impulso total será menor devido, neste caso à rotação da força.

As perdas por se ter impulsos finitos podem ser significativas, chegam a ser 20% em alguns casos, e é uma questão que deve ser endereçada, se possível. Por exemplo, nos casos de aumento da apoápside, correspondendo à primeira parte de uma transferência de Hohmann, poder-se-á eventualmente repartir esse impulso em vários sucessivos, cada um deles fazendo passar o veículo para uma órbita com a mesma periápside mas apoápside cada vez mais elevada. No fim de cada período, novamente na periápside, é dado novo impulso e o processo repete-se até a apoápside atingir a altitude desejada. Como cada impulso é menor que o impulso total, cada manobra está mais perto da periápside e as perdas são menores.

## 4.4 Outras manobras impulsivas

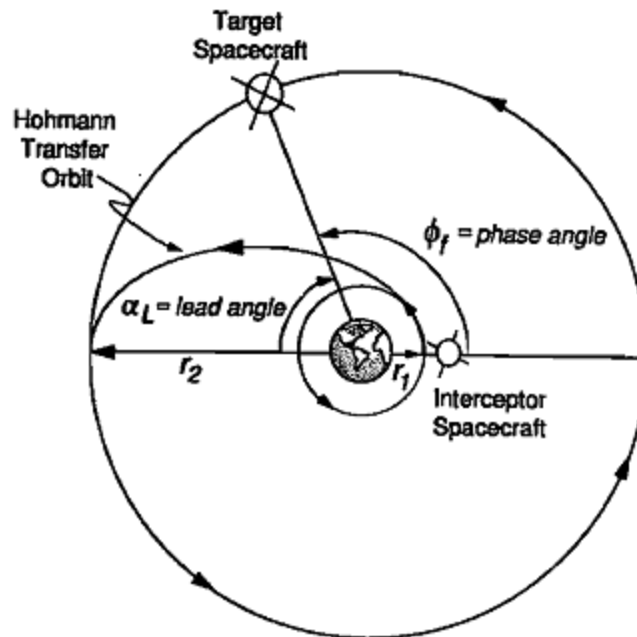
A partir das manobras básicas podem pensar-se em muitas outras e com objectivos muito variados. Nesta secção vamos dar exemplos de algumas.

---

<sup>3</sup>*Finite burns* é a expressão utilizada em Inglês.

#### 4.4.1 *Rendez-vous*

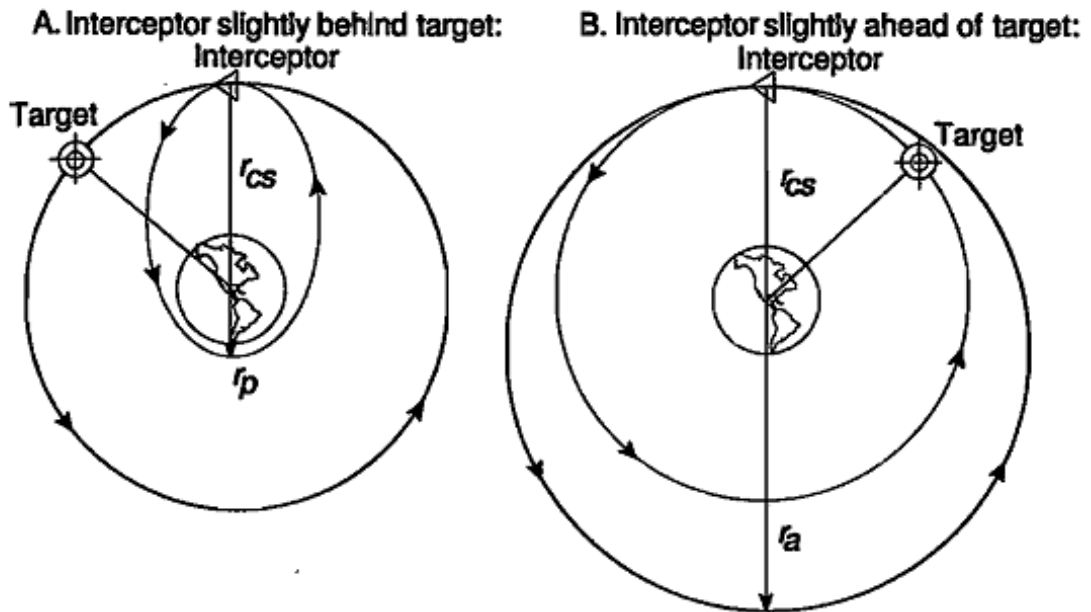
As manobras conhecidas universalmente por *Rendez-vous* são muito comuns pois há muitas aplicações que requerem o encontro de dois veículos espaciais com velocidade relativa nula, i. e. na mesma órbita. O problema pode ser enunciado como estando dois veículos em órbitas diferentes, qual a manobra, ou conjunto de manobras, que o vai colocar na mesma órbita e no mesmo ponto da órbita simultaneamente. Por exemplo, a



**Figura 4.7:** Transferência de Hohmann com *rendez-vous* [34].

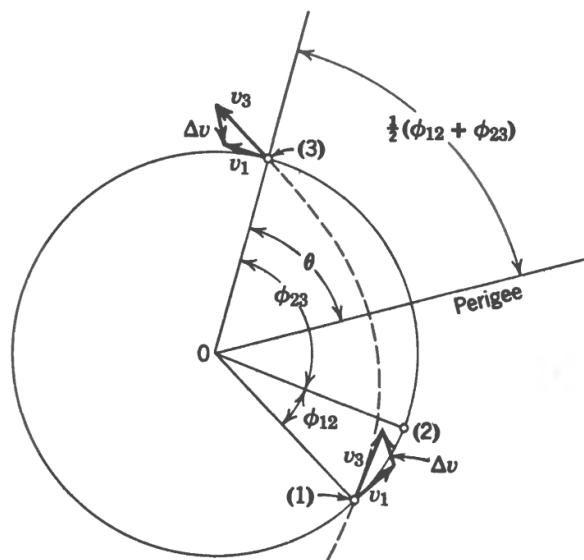
situação da Figura 4.7 em que um veículo realiza uma transferência de Hohmann mas com o requisito de atingir a órbita final ao mesmo tempo que um outro veículo que já se encontrava nessa órbita. Neste caso, é necessário que o ângulo relativamente ao foco formado por ambos os veículos no início da manobra de transferência tenha um valor determinado, que leva ao conceito de janela de lançamento: só em determinados instantes a manobra pode ser realizada de modo a atingir os fins desejados.

Uma situação fácil de analisar, e é uma manobra eficiente, é quando os dois veículos, interceptor e alvo, se encontram na mesma órbita circular (Figura 4.8). Um modo de os fazer encontrar é o interceptor alterar ligeiramente a sua órbita, com um impulso na direcção da velocidade, entrando numa nova órbita com um período diferente que permita que, após uma revolução completa, se encontre com o alvo. Como o período orbital depende do semi-eixo maior, se o alvo vai à frente do interceptor, este deve entrar numa órbita mais rápida — ou seja, menor — que vai ser interior à original. Ao contrário, se o interceptor segue à frente, a órbita terá que ter um período maior de modo que durante este o alvo complete uma revolução completa e avance ainda o espaço entre ambos na órbita. Este processo pode até durar várias órbitas, desde



**Figura 4.8:** *Rendez-vous* com mudança para órbita ligeiramente diferente, voltando ao mesmo local. As manobras de início e fim são simétricas, i. e. módulo igual, sentido contrário [34].

que correctamente sincronizadas. Este processo é bastante eficiente porque os impulsos acontecem na direcção da velocidade, negativo para interceptar um alvo à frente, positivo no caso contrário.



**Figura 4.9:** Veículo (1) a interceptar (2) em (3) numa manobra rápida [58].

Outra alternativa é simplesmente estabelecer uma trajectória directa de intercepção para uma posição seleccionada (Figura 4.9). Neste caso, não só a velocidade tem que ser maior, de modo a que se consiga realizar a intercepção na trajectória, como o impulso não poderá ter provavelmente a direcção da velocidade, o que diminui a eficiência. Como regra heurística, é muito fácil estudar manobras que envolvam intervalos de tempo de maior período ou um período, pelas mesmas razões das da transferência de Hohmann, e manobras lentas podem ser mais eficientes, porque se pode encontrar posições mais vantajosas. Como frequentemente o tempo não é um problema em manobras orbitais, as manobras lentas são frequentes.

Em situações realistas, para evitar riscos de colisão, o interceptor tem como objectivo interceptar um ponto suficientemente próximo do alvo, na mesma órbita deste. Depois, através de pequenas manobras sucessivas, a aproximação é realizada envolvendo velocidades relativas pequenas e cada vez menores.

#### 4.4.2 Outras manobras

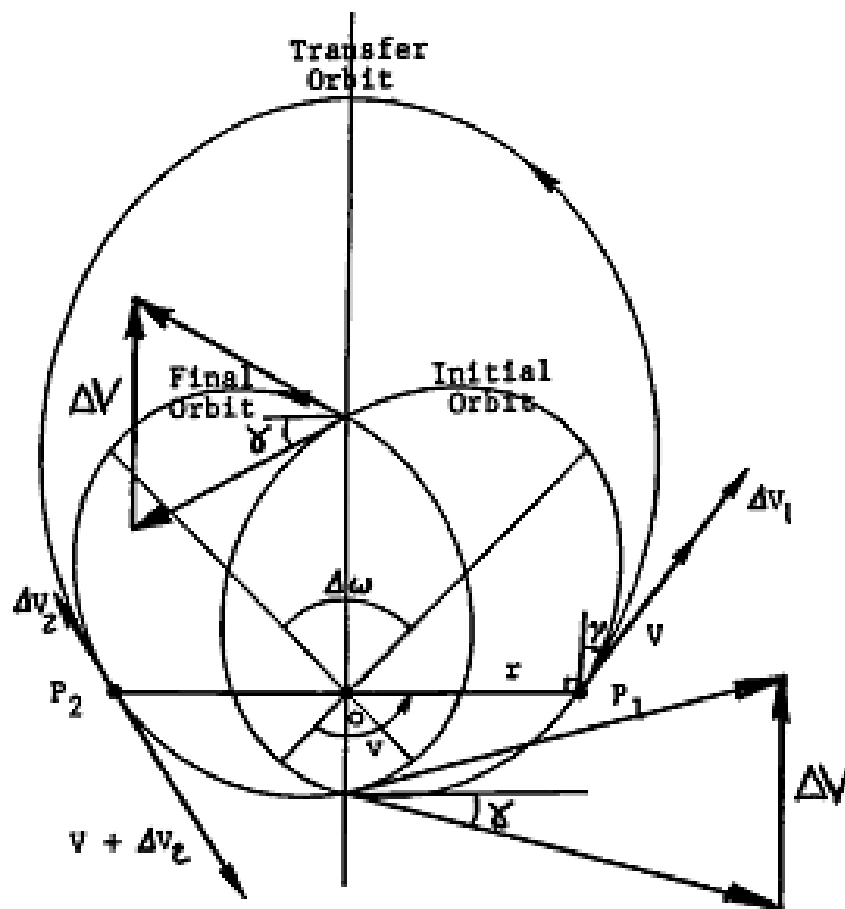
A variação do tipo de manobras apenas é limitado pela imaginação. Para além das manobras de *phasing* e *chasing*, variações do que fizemos em § 4.4.1, há muitas manobras possíveis, dependendo dos objectivos. Um exemplo é uma manobra que altera apenas a orientação da órbita i. e. que roda apenas a linha das ápsides (cf. Figura 4.10). Também há que ter em conta que em certos casos há constrangimentos como limitações de  $\Delta v$  ou tempo de voo para a manobra acontecer.

#### 4.4.3 Transferências com impulso contínuo

Até agora apenas se referiu manobras impulsivas, que são uma boa aproximação para a propulsão química utilizada nos foguetes convencionais. Por outro lado, como pode ser reduzida a impulsos instantâneos, o problema constitui combinar órbitas Keplerianas, ou partes delas pois no resto do tempo apenas há força da gravidade.

A situação mudou com o aparecimento dos motores iónicos e outros. Estas novas tecnologias têm uma característica que as distingue da propulsão química convencional: são tecnologias muito eficientes, com um impulso específico várias vezes mais elevado que a propulsão química, mas com uma força muito pequena. Isto faz com que, para serem úteis, tenham que funcionar durante longos períodos de tempo, i. e. continuamente, e daí a designação de *propulsão contínua*, por vezes também denominada *propulsão iónica*, no caso dessa tecnologia.

Estando a propulsão sempre a trabalhar, o veículo espacial tem neste caso actuadas duas forças, a da gravidade do corpo central e a da propulsão, e a solução não é mais uma cónica. Tipicamente a solução tem que ser calculada numericamente. Além disso, o processo de determinação da trajectória é bastante mais complicado pois em princípio o propulsor, sempre a funcionar, pode mudar a direcção da propulsão em cada instante, alterando a trajectória. A trajectória terá que ser determinada de modo a minimizar o gasto de combustível (por exemplo) mas não é clara qual é a solução. Um processo de optimização tem que ser implementado. Essas técnicas estão para além do âmbito da

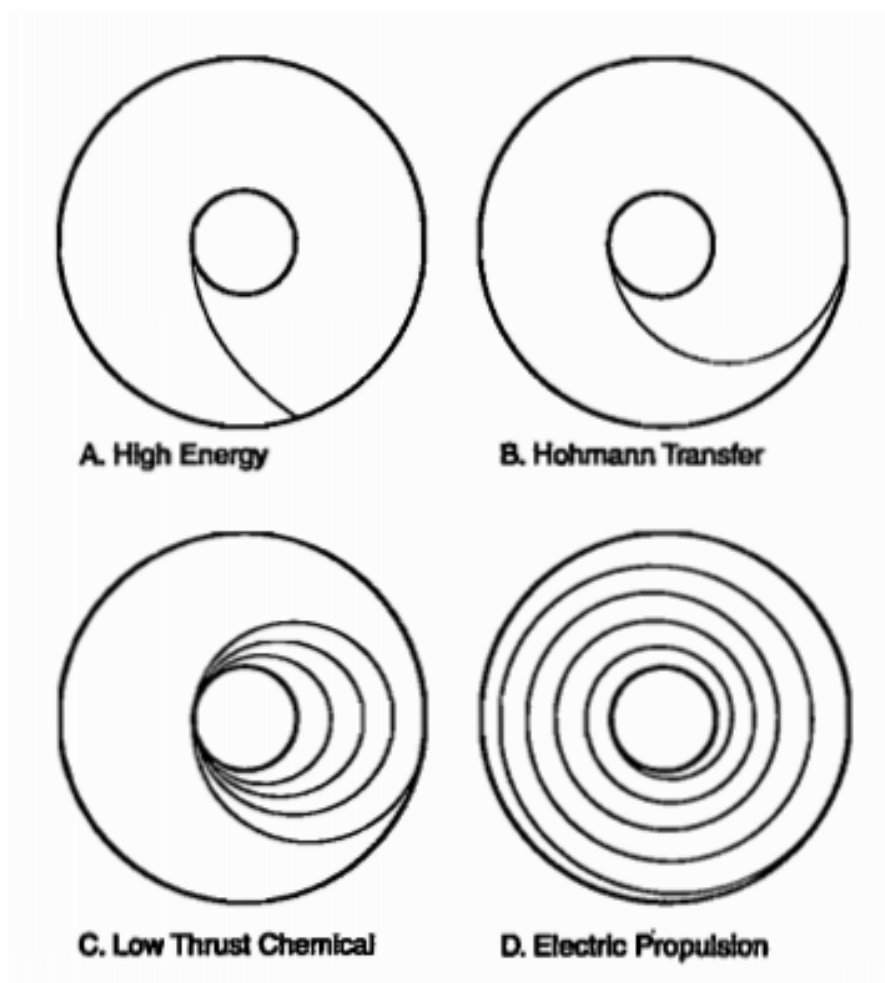


**Figura 4.10:** Manobra de rotação da linha das ápsides. Há três possibilidades óbvias: realizando uma manobra de um impulso num dos dois pontos comuns das órbitas inicial e final, ou utilizando uma órbita de transferência que permite os  $\Delta v$  serem colineares com a velocidade orbital [15].

matéria aqui discutida.

Vale a pena comparar a propulsão contínua com as outras técnicas básicas de manobrar no espaço (cf. Figura 4.11). No painel (A) temos uma manobra de alta energia, sem preocupações de tentar alinhar todos os impulsos com a velocidade; em (B) tem-se uma transferência de Hohmann, que é, num certo sentido, ótima: é económica e simples. Em (C) temos uma manobra de impulsos químicos pequenos que minimiza as perdas por gravidade dos impulsos que na realidade são finitos, e não instantâneos, numa manobra de elevação de apoápside em vez de uma transferência directa de Hohmann. Finalmente, em (D) temos uma trajectória típica de impulso contínuo, vai espiralando até ao destino.

Vale a pena notar que as trajectórias de impulso contínuo tendem a ser mais lentas que as que envolvem manobras impulsivas porque a propulsão contínua é fraca e requer tempo para ser efectiva. Por outro lado, a propulsão contínua funciona sempre, o que significa que a propulsão tende a tirar menos partido dos efeitos gravíticos de manobrar



**Figura 4.11:** De (A) para (D): órbitas rápidas, transferência de Hohmann, elevação de apoápside e impulso contínuo [34].

onde a velocidade é maior (cf. § 4.3.2). Mas o alto valor do impulso específico destas tecnologias compensa largamente essa perda.





## Capítulo 5

# Perturbações Orbitais

### 5.1 Perturbações

Em capítulos anteriores obtivemos a solução do problema dos dois corpos mas no Universo não há apenas duas partículas. Isso significa que, mesmo em situações em que as forças claramente mais importantes sejam as mútuas entre dois corpos, há sempre outras forças que, sendo muito menores<sup>1</sup>, existem. O critério para incluir ou desprezar uma influência está relacionado com o efeito dessa influência i. e. com mudança na trajectória que ela induz. Essa mudança na trajectória tipicamente vai aumentando ao longo do tempo de modo que, quanto mais longo for o período de tempo em que queremos resolver o problema, maior a precisão necessária e mais influências menores temos que levar em conta de modo a manter a precisão desejada. Essas influências menores alterarão a trajectória mas, sendo pequenas, espera-se que a trajectória seja pouco desviada relativamente à solução de dois corpos. As estas influências menores que alteram ligeiramente o problema principal denominam-se *perturbações*.

A solução do problema principal (neste caso o de problema de dois corpos ou de força central) com as perturbações será a *solução perturbada*. A ideia é que, sendo as perturbações pequenas quando comparadas com as forças do problema principal, a solução perturbada não seja muito diferente da solução do problema principal. Nesse caso, a função que descreve a solução poderá ser escrita como um desenvolvimento em série em torno da solução do problema principal e, sendo as perturbações pequenas, essa série tenderá muito rapidamente para zero e poderá ser rapidamente truncada. Se puder ser truncada após o termo de ordem um, obtém-se um sistema linear para descrever os desvios induzidos pelas perturbações, o que tornará o problema muito mais fácil.

A literatura dos problemas perturbados e dos métodos utilizados para os estimar estão para além do âmbito deste trabalho mas é relevante ter consciência da importância relativa das forças de perturbação e ter a capacidade de estimar essa importância. De outro modo não se saberá quais as perturbações que podem ser desprezadas na resolução de cada problema.

---

<sup>1</sup>Se não forem muito menores, o movimento não poderá ser descrito como sendo de dois corpos. É necessário contar sempre com todas as forças significativas.

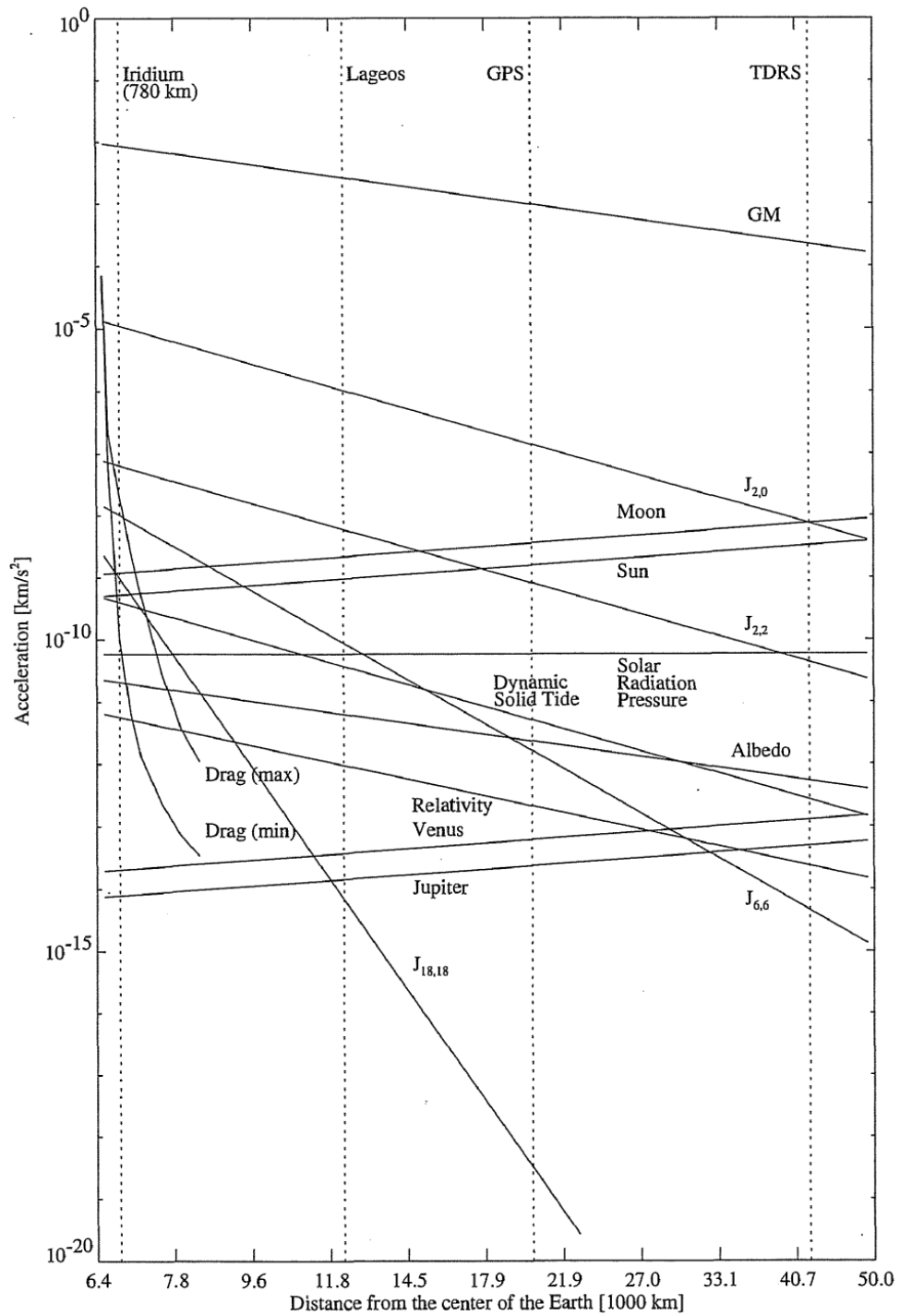


Figura 5.1: Acelerações, principal e das várias perturbações, em órbitas terrestres [40].

As perturbações mais importantes sentidas nas órbitas em torno da Terra estão mostradas na Figura 5.1, em conjunto com a força principal  $GM_{\oplus} \equiv \mu_{\oplus}$ . As mais importantes de todas são, em geral:

- Os efeitos do potencial gravítico, para além da aproximação de que o corpo tem simetria esférica, equivalente a uma partícula pontual no centro. Isto é verdade mesmo no caso de corpos bastante esféricos, como planetas, e ainda mais em pequenos corpos do sistema solar por serem mais irregulares.
- A influência de *terceiros corpos* i. e. de todos os outros astros, para além dos dois em causa no problema principal. Esta influência tende a aumentar de importância com a distância.
- A resistência aerodinâmica devida à atmosfera, no caso de órbitas suficientemente baixas.
- A pressão de radiação solar, especialmente no caso de veículos com painéis solares que aumentam a área, e portanto a força total.

Na § 5.3, as curvas indicadas pelas letras  $J$  estão relacionadas com o potencial gravítico; as curvas indicadas com o nome de um astro são as devidas à gravidade desse objecto (no caso do Sol, descontado o efeito deste na Terra, já que uma órbita em torno da Terra descrita relativamente à Terra inclui implicitamente essa componente). O efeito da atmosfera, muito importante a baixas altitudes, decai muito rapidamente e passa a ser muito pouco importante mesmo em órbitas ainda relativamente baixas. À parte a atmosfera, o efeito mais importante é o da gravidade, através do termo seguinte do potencial, também conhecido por  $J_2$  (cf. § 5.3). Todas estas forças dependem de vários parâmetros, dependendo da perturbação, e. g. a direcção em cada instante de terceiros corpos, latitude, etc. O valor indicado é o máximo esperado de cada perturbação, o que significa que num movimento variado o efeito médio possa ser algo menor, mas o que importa é a ordem de grandeza da perturbação esperada. Para calcular um valor mais preciso, será necessário fazer um cálculo mais cuidadoso.

Podemos todavia fazer uma estimativa do desvio espectável utilizando um cálculo simples. Por exemplo, podemos observar na Figura 5.1 que a aceleração devida ao termo  $J_{2,0}$  é de cerca de  $a_{J_2} \sim 2 \times 10^{-5}$  km/s. No caso de uma órbita circular a uma altitude  $h = 300$  km, o período é muito aproximadamente 90 min. Se a aceleração fosse constante, poderíamos esperar um desvio  $d_{J_2}$  ao fim de uma órbita da ordem de

$$d_{J_2} \sim 3 \times 10^2 \text{ km}, \quad (5.1)$$

provavelmente algo menos que este valor pois o efeito varia com a latitude e varia na direcção, relativamente ao satélite. Mesmo que seja uma ordem de grandeza abaixo, serão ainda dezenas de quilómetros. O problema é que a órbita tem grande dimensões, cerca de 42 000 km de perímetro. Mesmo que o desvio seja pequeno comparado com as dimensões da órbita, é significativo à escala humana e pode tornar-se um problema, por

exemplo se queremos realizar um *rendez-vous* (cf. Capítulo 4), como por exemplo levar astronautas para a ISS.

Nas secções seguintes vamos falar de algumas das perturbações mais importantes e de algumas das suas consequências.

## 5.2 Efeitos da atmosfera

### 5.2.1 Atmosfera exponencial

A atmosfera não é estática, nomeadamente na sua base, mas, embora haja muitos efeitos relevantes, a sua estrutura básica é determinada pela hidrostática. Se por hipótese a atmosfera for isotérmica e o gás for ideal, e se considerarmos a aceleração da gravidade  $g$  constante na zona em que há atmosfera<sup>2</sup>, o equilíbrio hidrostático da coluna de gás determina que a densidade<sup>3</sup> diminui exponencialmente com a altitude:

$$\rho = \rho_0 e^{-h/h_0}, \quad (5.2a)$$

$$h_0 = \frac{RT}{\mu g}, \quad (5.2b)$$

onde  $R$  é a constante dos gases,  $T$  a temperatura e  $\mu$  a massa molecular. Na realidade a temperatura varia,  $g$  não é exactamente constante e o gás não é exactamente ideal, mas a forma exponencial básica mantém-se aproximadamente. A temperatura varia mas, em certas altitudes pode considerar-se que não varia muito. Um dos modos de melhorar o modelo exponencial da atmosfera é considerar um *modelo exponencial por camadas*, onde em cada camada se tem uma exponencial diferente, com uma temperatura diferente, ligando-se as camadas entre si por continuidade.

Outro modo de melhorar o modelo atmosférico é considerar que o *factor de escala da atmosfera*, depende ele próprio da altitude e outras variáveis, embora lentamente, de modo a preservar a variação exponencial básica. Assim, ter-se-á

$$\rho = \rho_0 e^{-h/h_*}, \quad (5.3a)$$

$$h_* = h_*(h, T, \dots), \quad (5.3b)$$

com  $h_*$  a variar lentamente e valendo, à altitude das órbitas baixas, cerca de

$$h_* \sim (6 - 8)\text{km}, \quad (\text{órbitas baixas}). \quad (5.4)$$

Isto significa que, cada vez que a altitude aumenta entre cerca de 14 km a 18 km, a densidade diminui uma ordem de grandeza.

A densidade atmosférica tem variações locais significativas. O Space Shuttle detectou variações significativas locais de até 20% durante a reentrada. A densidade também

<sup>2</sup>A atmosfera existe de forma significativa até algumas centenas de quilómetro de altitude; a  $h = 300$  km o valor de  $g$  ainda é 90% do valor à superfície.

<sup>3</sup>Tem havido alguma confusão dos termos utilizados em Português ao longo do tempo. Aqui, *densidade*

varia significativamente com o ciclo solar, cerca de duas ordens de grandeza de diferença entre o máximo e o mínimo de atividade solar a altitudes entre os 500 km e os 800 km (correspondendo às duas curvas na Figura 5.1), sendo mais densa à mesma altitude no máximo. Se contarmos com a variabilidade da atividade solar e a heterogeneidade local, a nossa incerteza nos valores locais da densidade pode atingir 100% em altitudes orbitais. A atmosfera vai ficando cada vez mais rarefeita até ser completamente desprezável.

### 5.2.2 Tempo de vida de um satélite

A atmosfera vai exercer uma força de resistência aerodinâmica nos satélites em órbita baixa que os fará diminuir a altitude até eventualmente se despenharem. A aceleração  $a_D$  induzida pela resistência aerodinâmica é dada por

$$a_D = \frac{1}{2} \frac{C_D A}{m} \rho v^2 = \frac{1}{2} B^* \rho v^2, \quad (5.5)$$

onde  $C_D$  é o coeficiente de resistência aerodinâmica,  $A$  a área do veículo na direção normal ao escoamento,  $\rho$  a densidade, e  $v$  e  $m$  são a velocidade e a massa do veículo, respectivamente. O coeficiente de resistência aerodinâmica  $C_D$  depende da geometria do veículo e é geralmente determinado experimentalmente. Satélites colocados em órbita em torno da Terra têm tipicamente  $C_D$  entre 2 e 4, que são valores bastante elevados.

As constantes podem ser agregadas no *coeficiente balístico*  $B^*$

$$B^* \equiv \frac{C_D A}{m}, \quad (5.6)$$

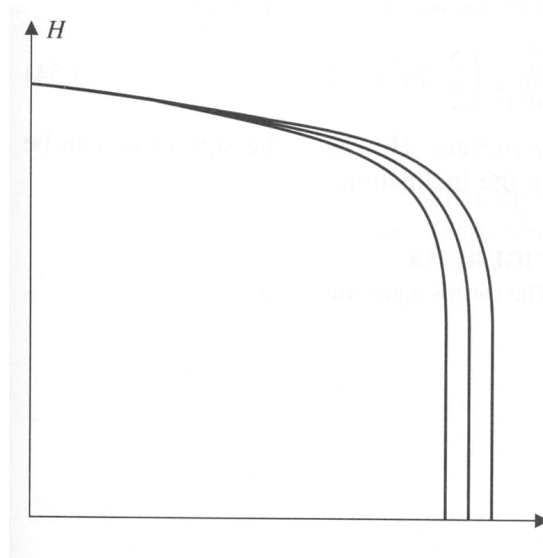
que agrega a influência das características do veículo, embora a área  $A$  dependa da altitude.

A aceleração de resistência aerodinâmica faz diminuir a velocidade do veículo, que por sua vez o faz descer até eventualmente ele entrar nas camadas mais densas da atmosfera até à desintegração final, que acontece por volta dos 80 km de altitude, em plena entrada. A variável mais importante para determinar o tempo de vida é a densidade, já que varia exponencialmente com a altitude. Se um veículo desce até uma altitude de entre 120 km e 160 km (dependendo do seu coeficiente balístico e excentricidade da órbita) ele decairá em poucos dias. Por outro lado, acima de cerca de 600 km de altitude, a atmosfera será tão tênue que as órbitas duram mais de 10 anos, continuando a aumentar rapidamente, como vimos em § 5.2.1, com o aumento da altitude.

A diminuição exponencial da densidade tem um efeito curioso e importante nas órbitas elípticas, cuja periápside está muito abaixo da apoápside, ou seja numa zona onde a atmosfera pode ser muito mais densa. O efeito de diminuição da velocidade devido à resistência aerodinâmica faz-se sentir muito mais na zona da periápside. Isso, é *grosso modo*, equivalente a um  $\Delta v$  negativo na periápside, que tem como consequência baixar a apoápside mantendo a periápside mais ou menos incólume. A excentricidade da órbita vai então diminuir, ficando cada vez mais parecida com uma órbita circular.

---

ou *massa volúmica* significa massa por unidade de volume, com dimensões  $ML^{-3}$



**Figura 5.2:** Tempo de queda. As incertezas fazem com que o instante exacto, e o local de queda, variem imenso [60].

Este fenómeno denomina-se *circularização das órbitas*. Uma vez mais ou menos circular, a órbita continuará a decair em espiral.

Como a densidade vai aumentando exponencialmente com a diminuição da altitude, as órbitas decaem tanto mais depressa quanto mais baixo estão, até atingir um ponto em que caem abruptamente (cf. Figura 5.2). Isto, aliado às heterogeneidades locais da atmosfera faz variar o tempo de vida e faz com que seja impossível saber em que ponto exacto da superfície o veículo se vai despenhar. Mesmo com apenas algumas horas de antecedência, o erro pode ser de centenas ou milhares de quilómetros, dependendo do tipo de órbita.

## 5.3 Achatamento da Terra

### 5.3.1 Astros não-esféricos

Até agora tratámos todas as fontes de gravidade como se fossem partículas pontuais. Essa aproximação é razoável porque uma distribuição de massa com simetria esférica é equivalente a uma massa pontual no seu centro e, devido à gravidade, corpos suficientemente massivos tendem a ficar esféricos devido à atracção mútua, à parte irregularidades relativamente pequenas. Um efeito frequente, porque relativamente importante, é o achatamento dos pólos<sup>4</sup> devido à força centrífuga que surge devido à rotação dos astros, que é muito frequente e frequentemente significativa para fazer deste o maior desvio da esfericidade perfeita. Por exemplo, a diferença entre os raios equatorial e polar da Terra é de 21.36 km.

<sup>4</sup>A expressão em Inglês, *equatorial bulge*, é muito mais sugestiva da origem do efeito.

Sendo a distribuição de massa no espaço mais complicada do que a equivalente a uma partícula, a questão coloca-se de saber exactamente qual o potencial gravítico em cada ponto do espaço que determina a força da gravidade nesse local. O modo mais usual de descrever o problema é através de harmónicas esféricas. É possível demonstrar que qualquer distribuição de massa numa região do espaço pode ser escrita como uma série de um conjunto (infinito) de funções. Como estas funções conseguem descrever, com maior ou menor dificuldade, qualquer distribuição de massa, diz-se que é um conjunto *completo de funções* e desempenha o papel nos espaços de funções de dimensão infinita correspondente ao da base em espaços lineares de dimensão finita.

### 5.3.2 Simetria axial

Uma vez que sai fora do âmbito deste trabalho, não se vai apresentar a expressão mais geral mas uma simplificada, válida quando a distribuição de massa ainda tem simetria axial, pois essa é suficiente para apresentar o maior efeito que é o do achatamento dos pólos. Então, se a distribuição de massa tiver simetria axial, o potencial gravítico pode ser descrito pela série

$$U = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{k=2}^{\infty} (R/r)^k J_k P_k(\cos \phi) \right], \quad (5.7)$$

onde  $R$  é uma normalização (tipicamente o raio equatorial do astro, que é o maior),  $r, \theta, \phi^5$  são as coordenadas esféricas ( $\theta$  não surge na expressão porque há simetria axial), os  $P_k$  são polinómios de Legendre e os  $J_k$  são os coeficientes que dependem de cada distribuição específica de massa existente.

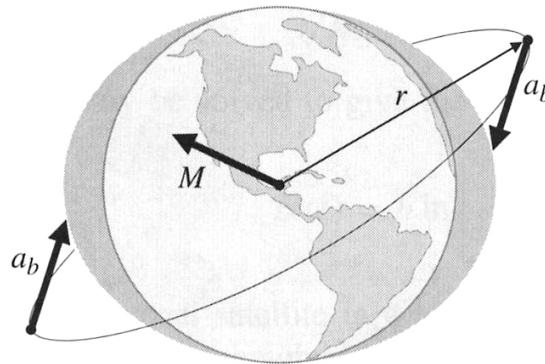
Note-se que a força da gravidade já não é só proporcional a  $1/r^2$ . Quanto mais se avança na série, maior é o expoente (negativo) de  $r$ , que tende mais rapidamente para zero à medida que  $r$  aumenta. Devemos por conseguinte esperar que a aceleração devida a termos sucessivos diminua mais rapidamente com a distância, que é exactamente o que se observa na Figura 5.1 relativamente aos termos  $J_{n,0}$ , que são basicamente as acelerações resultantes dos termos da série (5.7).

O primeiro termo de (5.7) é o equivalente à distribuição com simetria esférica, e o segundo termo,

$$U_{J_2} = -\frac{\mu}{r} \left( \frac{R}{r} \right)^2 J_2 P_2(\cos \phi) = \frac{-\mu R^2}{r^3} J_2 \frac{1}{2} (2 - 3 \sin^2 \phi), \quad (5.8)$$

descreve o achatamento do astro. No caso da Terra, que não assim tão diferente de uma esfera, este é o termo mais importante, cerca de 1000 vezes maior que todos os seguintes, e será uma aproximação significativamente melhor levar este termo em conta e desprezar todos os seguintes. Deste modo, para astros quase esféricos como a Terra, podemos tratar o problema de um satélite em órbita como um problema de força central perturbado pelo termo seguinte da série, conhecido por  $J_2$ .

<sup>5</sup>O ângulo  $\phi$ , neste contexto, é conhecido como co-latitude, i. e. a latitude contada a partir do pólo.



**Figura 5.3:** Achatamento dos pólos visto como massa extra na zona equatorial e seu efeito qualitativo [60].

### 5.3.3 Efeitos do $J_2$

Pode-se pensar intuitivamente no achatamento dos pólos, correspondente ao termo  $J_2$ , como “massa a mais” na zona equatorial, relativamente a um astro esférico (cf. Figura 5.3). Considere-se um satélite numa órbita de inclinação  $i$ . Se  $i \neq 0$  o efeito não será só na alteração do valor da força, mas também na sua direcção. Quando o satélite se encontrar acima do equador, a massa extra vai tender a puxá-lo na direcção deste, e o mesmo se passa quando está sobre o hemisfério Sul. É possível contabilizar o efeito médio ao longo da órbita deste efeito. A geometria sugere que o efeito médio do satélite no corpo central será equivalente a um binário, e portanto o efeito na órbita do satélite será também um binário, ou seja, pode-se esperar que o termo  $J_2$  tenha efeitos giroscópicos na órbita.

O melhor modo de entender o que se passa é utilizar os elementos clássicos de órbita introduzidos no Capítulo 3. No caso de órbitas Keplerianas, os elementos clássicos de órbita são constantes, mas neste caso temos órbitas Keplerianas perturbadas pelo termo  $J_2$  e a órbita vai ser alterada. Se a perturbação é pequena (e já vimos que é, na Figura 5.1 e nos cálculos que conduziram a (5.1)), pode-se pensar na trajectória do problema perturbado como uma cónica a variar no tempo, i. e. os *elementos clássicos de órbita agora dependem do tempo* e, em cada instante, temos uma cónica instantânea que melhor descreve a trajectória nesse instante.

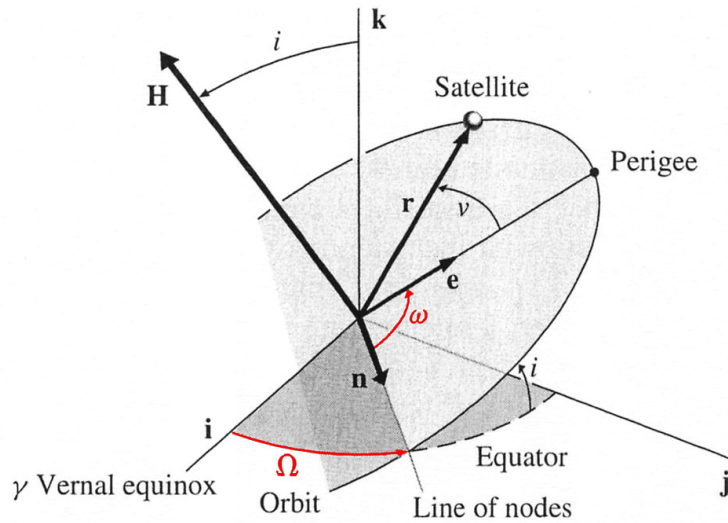
Existem vários métodos para obter aproximações das soluções perturbadas, por exemplo as bem conhecidas *equações de Lagrange planetárias*, que não se vão apresentar aqui por sair do âmbito deste texto. Estas equações calculam então a evolução aproximada dos parâmetros clássicos de órbita, dada uma certa perturbação, como a do termo  $J_2$ .

### 5.3.4 Variações periódicas e seculares dos elementos orbitais

Os parâmetros clássicos de órbita de um problema perturbado podem apresentar *variações periódicas* ou *variações seculares*.

As variações periódicas, como o nome indica, voltam ao seu valor original após um período e depois repetem-se. Se a amplitude da variação periódica for pequena, o valor





**Figura 5.4:** Variação da ascensão recta do nodo ascendente e do argumento do perigeu [60].

não muda muito, o que significa que um parâmetro clássico vai ter mais ou menos o mesmo valor ao longo do tempo, com pequenas oscilações mas cuja média não muda. Pode-se então eventualmente (a não ser que se requeira grande precisão, mas nesse caso o estudo da perturbação terá que ser mais completo) desprezar a sua variação e considerá-lo constante. Se a amplitude for grande, a variação periódica poderá ter que ser levada em conta, dependendo da precisão desejada no resultado, já que a sua média continua a não mudar. As variações periódicas são também classificadas de período curto ou período longo, dependendo do valor do mesmo.

As variações seculares são simplesmente variações não periódicas a longo prazo em séries temporais. Se uma variação é percebida como secular pode depender da escala de tempo do problema: uma variação secular numa escala de tempo de séculos, pode ser uma variação periódica numa escala de milhões de anos. Se um parâmetro clássico evolui secularmente, a sua evolução terá um efeito visível no sistema e tem que ser levada em conta.

No caso da perturbação do  $J_2$  em primeira ordem, todos os parâmetros clássicos apresentam pequenas variações periódicas, e podem portanto ser considerados constantes, excepto dois, a ascensão recta do nodo ascendente  $\Omega$  e o argumento do perigeu  $\varpi$  (cf. Figura 5.4). Isto significa que a forma e a inclinação da órbita se mantêm mas que o plano orbital roda, inclinado, em torno do eixo  $z$ , e que a linha das ápsides roda no plano da órbita. Estes são os efeitos médios ao longo da órbita de modo que as variações seculares são consideradas constantes, ou seja, tem-se:

$$\Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}t, \quad (5.9a)$$

$$\varpi = \varpi_0 + \dot{\varpi}t, \quad (5.9b)$$

com a variação média da ascensão recta do nodo ascendente dada por

$$\dot{\Omega} = -\frac{3nJ_2R_\oplus^2}{2a^2(1-e^2)^2} \cos i, \quad (5.10)$$

e o argumento do perigeu por

$$\dot{\varpi} = \frac{3nJ_2R_\oplus^2}{2a^2(1-e^2)^2} \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i\right), \quad (5.11)$$

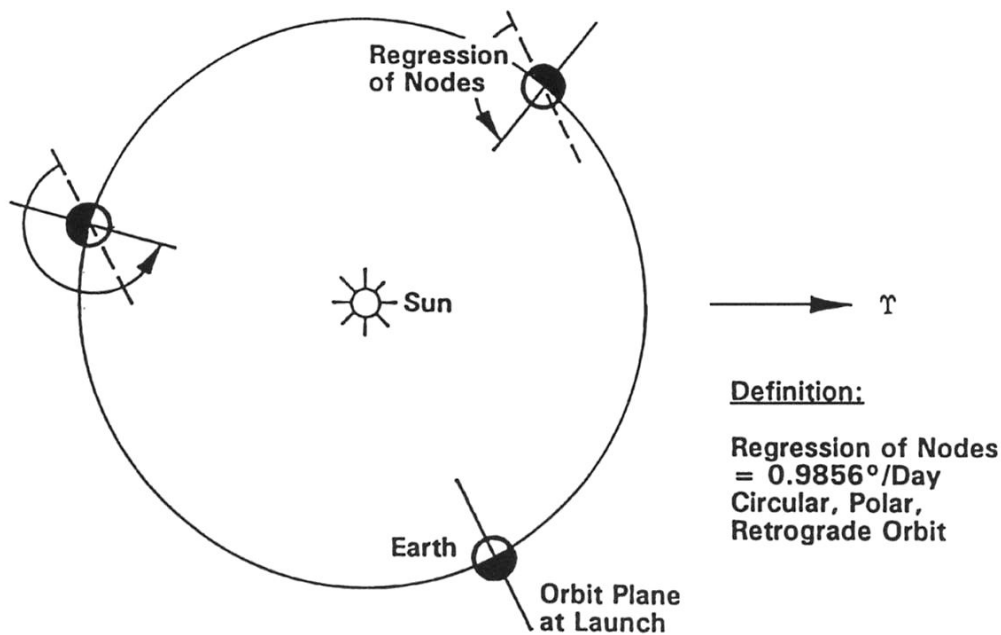
onde  $a, e$  são, respectivamente, o semi-eixo maior e a excentricidade da órbita,  $i$  a inclinação,  $R_\oplus$  o raio equatorial da Terra,  $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = 2\pi/T$  é frequência de revolução, da órbita com período  $T$ , e  $J_2$  a constante que depende da forma do astro, que no caso da Terra vale  $J_2 = 0.001018$ .

As variações dependem dos restantes parâmetros orbitais  $i, a, e$ , considerados constantes. Para cada cónica, as variações seculares são controladas pela inclinação  $i$  e  $\dot{\varpi} \geq 0$ , dependendo do valor de  $i$ , propriedade que, como veremos, são relevantes. No caso de  $i = 0$ , o plano da órbita não se altera; nesse caso  $\Omega$  e  $\varpi$  somam-se e a órbita é determinada por uma força central mas  $F \neq C/r^2$  devido ao termo de  $J_2$ . O resultado é que a órbita ainda precessa, i. e. a linha das ápsides roda no plano orbital.

Estamos agora em condições de verificar o desvio induzido ao fim de uma órbita previsto por (5.1). Seja uma órbita de excentricidade  $e = 0.01$ , altitude média  $h = 300$  km (i. e.  $a = R_\oplus + 300$  km), e inclinação  $i = 45^\circ$ . Suponha-se que o satélite está a cruzar o equador no seu perigeu exactamente no eixo  $x$ . Quando cruzar novamente o equador, cerca de 90 min depois, a órbita ter-se-á desviado, devido a  $\dot{\Omega} < 0$ , cerca de 44 km na direcção de  $-y$  e o argumento do perigeu desviado para cima na direcção da órbita  $45^\circ$  em relação ao equador (compensando em parte o desvio de  $\dot{\Omega}$ ) cerca de 47 km, num desvio total de  $d \sim 35$  km  $\ll 390$  km, cerca de uma ordem de grandeza menor que o valor estimado na página 111. Mas note-se que este efeito envolve funções circulares cujo efeito ao fim de uma órbita será menor pois pode-se esperar que uma parte do efeito se anule, como especulado antes. Se dividirmos o resultado de (5.1) por  $2\pi$  obtém-se  $d \sim 62$  km, da mesma ordem de grandeza do resultado do termo de  $J_2$ , e este pode ser maior no caso de outras inclinações. O ponto é que o desvio ao fim de uma órbita, sendo pequeno face às dimensões da órbita, é enorme à escala humana e será suficiente para fazer falhar uma missão. E acumula-se em órbitas sucessivas.

### 5.3.5 Satélites *Sun-synchronous* e *Molniya*

A variação secular da ascensão recta do nodo ascendente e do argumento do perigeu faz as órbitas rodarem, o que pode ser uma desvantagem. Mas a razão a que rodam pode até certo ponto ser controlada, nomeadamente pela selecção judiciosa da inclinação orbital, o que pode ser também uma vantagem. Duas aplicações que exploram a possibilidade de controlar a variação dos parâmetros orbitais são os satélites *Sun-synchronous* e *Molniya*.



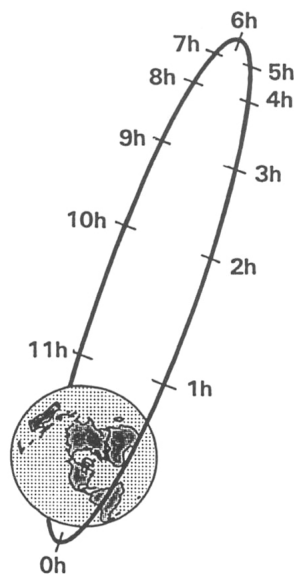
**Figura 5.5:** Se o plano orbital rodar à velocidade certa, o ângulo de incidência do Sol na superfície da Terra observado pelo satélite será sempre o mesmo [12].

**Satélites *Sun-synchronous*.** Para satélites relacionados com recursos da Terra e de observação é conveniente ter luz incidente em quantidade e sempre com mesmo ângulo, para comparação fácil de observações do mesmo local ao longo do tempo. De facto, as sombras têm uma influência significativa e sombras diferentes alteram significativamente a imagem, dificultando ou até mesmo impossibilitando a comparação de observações com observações anteriores. Esta questão era por exemplo crucial no tempo da guerra fria para identificação da evolução dos recursos do inimigo — novos silos de mísseis balísticos intercontinentais, novos navios, novas instalações em bases militares, etc. Havia até pessoas especializadas na interpretação das imagens que, nessa altura, tinham uma qualidade muito limitada, o que só realça a necessidade de manter as sombras iguais ao longo do tempo.

Uma órbita imóvel no espaço não conseguiria manter ao longo do ano sempre o mesmo ângulo de incidência do Sol na superfície observada da Terra, para tal, o plano orbital teria que rodar à mesma razão que a Terra vai revolucionando o Sol (cf. Figura 5.5<sup>6</sup>). Mas na realidade o plano da órbita roda, a uma razão determinada por  $\dot{\Omega}$ . Então para o plano orbital manter o ângulo de incidência é necessário que rode exactamente  $2\pi$  ao fim de uma revolução completa da Terra à volta do Sol, i. e. um ano (sideral), ou seja,

$$\text{órbita } Sun\text{-synchronous: } \dot{\Omega} = 2\pi/(\text{um ano sideral}) = 1.990\,97 \times 10^{-7} \text{ rad/s.} \quad (5.12)$$

<sup>6</sup>Note-se que o plano orbital não tem que estar alinhado com a direcção do Sol, basta que mantenha um ângulo constante com este.



**Figura 5.6:** Órbita Molniya, bastante excêntrica de modo a estar a maior parte do tempo acima do horizonte na zona de interesse, com inclinação tal que não precessa [12]

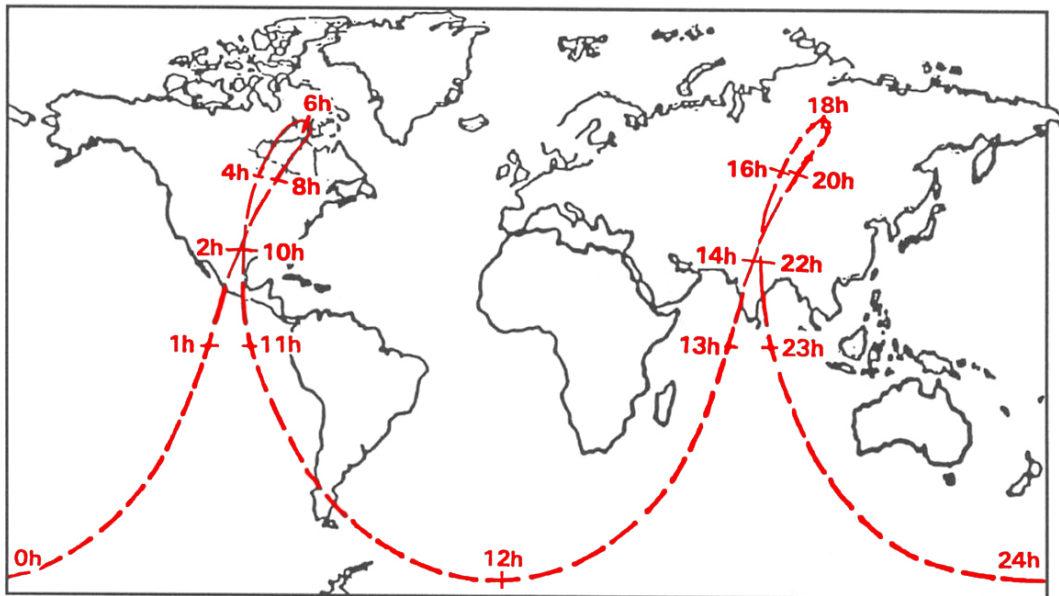
Como um ano tem cerca de 365 dias, apenas um pouco mais que  $360^\circ$ , a variação da ascensão recta do nodo ascendente tem que variar cerca de  $\dot{\Omega} \sim 1^\circ/\text{dia} > 0$ , positivo pois a Terra revoluciona o Sol no sentido directo. Como (5.10) tem um sinal menos, isso significa que as órbitas *Sun-synchronous* têm necessariamente que ser retrógradas  $i > 90^\circ$ . Tipicamente estes satélites são lançados a meio do dia, evitando órbitas na zona de crepúsculo e assegurando luz solar metade do tempo.

**Satélites Molniya.** Nas latitudes muito altas, como por exemplo as típicas da Rússia, os satélites geostacionários não são muito eficazes pois como se encontram no plano equatorial, localizam-se numa declinação relativamente baixa à superfície, sofrendo muitas interferências e sendo facilmente ocultados pelas irregularidades de terreno e edifícios.

Uma solução é utilizar um satélite não geostacionário mas, de modo a ter cobertura o máximo de tempo possível, é conveniente que a sua órbita seja bastante excêntrica (cf. Figura 5.6). O problema é que, devido à variação do argumento do perigeu, um satélite que inicialmente passe a maior parte do tempo sobre a zona de interesse, do lado da apogeu, mais tarde ou mais cedo vai estar ao contrário, i. e. com o perigeu desse lado, passando muito pouco tempo acima do horizonte na zona relevante. No entanto, este problema pode ser resolvido reparando, por (5.11), que  $\dot{\omega} = 0$  para a inclinação crítica  $i_c$  tal que

$$i_c : 2 - \frac{5}{2} \sin^2 i_c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad i_c = \arcsin 2/\sqrt{5} \simeq 63.4^\circ \vee 116.56^\circ, \quad (5.13)$$

pois a inclinação apenas está definida no intervalo  $[0, \pi]$ . Há portanto duas soluções, uma órbita directa e outra retrógrada, em que o apogeu se mantém sempre no mesmo



**Figura 5.7:** Cobertura da superfície por satélites Molniya. Cobertura permanente é garantida com três satélites [12].

hemisfério, assegurando a cobertura alargada. Note-se que a inclinação crítica não depende do astro central.

Na Figura 5.7 pode-se observar a cobertura da superfície da Terra de uma órbita Molniya. A órbita foi seleccionada como tendo um período de exactamente meio dia sideral ( $T=43\,082\text{ s}$ ) de modo a os satélites estarem sincronizados com a rotação da Terra. O período seleccionado implica que o semi-eixo maior seja  $a = 26\,562\text{ km}$ , correspondente a uma órbita média. A órbita da figura tem  $i = 63.4^\circ$  com apogeu no hemisfério Norte. Três satélites igualmente espaçados na mesma órbita asseguram visibilidade contínua na região de interesse que, neste caso, poderia ser a Rússia ou EUA/Canadá, estando quase todo o tempo dois satélites visíveis simultaneamente. Note-se que a ascensão recta do nodo ascendente neste caso varia mas esse facto é irrelevante para o efeito pretendido.



## Capítulo 6

# O problema dos três corpos

### 6.1 Introdução e definições

#### 6.1.1 Introdução

Nos capítulos anteriores resolveu-se o problema de dois corpos, e de força central. A seguir apresentaram-se técnicas para resolver aproximadamente problemas de dois corpos com a adição de contribuições muito menores que a força principal entre os dois corpos. Essas contribuições podem ser de vários tipos, incluindo a influência de outros corpos. A abordagem de incluir contribuições adicionais falha se estas forem suficientemente importantes, ou se passar tempo suficiente e acontecer um fenómeno de ressonância, em que uma contribuição, por ter certas características, acaba por se tornar importante porque o seu efeito é amplificado. Isto dá frequentemente origem a fenómenos que podem ser observados que, no âmbito do problema dos dois corpos, não são pura e simplesmente explicáveis. É o caso, por exemplo, dos Asteróides Troianos. Nessa altura temos que estudar o problema envolvendo logo de início três corpos (ou mais se for caso disso, os problemas serão cada vez mais complexos), reconhecendo que a influência do terceiro corpo é demasiado relevante para o que se pretende estudar para ser desprezada ou para ser considerada como uma pequena perturbação.

O estudo do problema dos três corpos é bastante antigo, bem como o reconhecimento da sua dificuldade. Newton estudou o sistema Terra-Sol-Lua e queixava-se que o problema “...lhe dava dores de cabeça e mantinha-o acordado...”. Apesar das dores de cabeça, foi capaz de calcular o movimento do perigeu da órbita lunar com uma diferença de apenas 8% do valor observado (1687). O problema mais importante durante muito tempo, e motor de muitos desenvolvimentos teóricos para o conseguir abordar, foi precisa e naturalmente o do sistema Terra-Sol-Lua, que teve o seu triunfo, no sentido de ser bem sucedida a explicar os fenómenos observados e que ainda hoje é utilizada, na teoria lunar de Hill (1879) e Brown (1896). Mais tarde, Poincaré chegou a pensar que tinha resolvido o problema dos três corpos mas, depois de descobrir que se tinha enganado, passou anos a tentar resolvê-lo — inventando ramos inteiros da Matemática no processo — até chegar à conclusão que não havia solução geral na forma fechada, e em geral os

movimentos são imprevisíveis a longo prazo.

Neste capítulo vamos fazer apenas uma introdução ao problema dos três corpos, já que o seu estudo é bastante complexo e extenso, sendo objecto de livros inteiros dedicados exclusivamente às técnicas para estudar e obter as suas soluções, saindo claramente fora do âmbito deste texto.

### 6.1.2 P3C e suas simplificações

O objectivo do problema (geral) dos três corpos (P3C), como no caso geral de  $n$  corpos, é calcular a posição em função do tempo de três massas pontuais isoladas do resto do Universo, dadas as posições e velocidades iniciais de todas elas. O problema é altamente não-linear e as forças mútuas entre as partículas dependem, em geral, do tempo (problema não autónomo). Isto torna a resolução do problema geral bastante mais difícil. A abreviatura P3C<sup>1</sup> do problema de três corpos é frequentemente utilizada, bem como abreviaturas para algumas aproximações do problema.

Como o P3C geral é bastante complexo, pode-se estudar vários casos particulares que são uma boa aproximação em algumas situações, do mesmo modo que o problema de força central é uma boa aproximação para certos problemas de dois corpos. Euler (1767) considerou três corpos de massa arbitrária alinhados. Ele mostrou que, para condições iniciais adequadas, os corpos ficariam sempre alinhados e que a linha rodaria em torno do centro de massa do sistema. Lagrange (1772) encontrou outra família de soluções periódicas: ele mostrou que se os corpos estivessem posicionados de modo a formarem um triângulo equilátero, este se moveria ao longo de elipses para certas condições iniciais, preservando a configuração original. As soluções de Euler e Lagrange são soluções particulares do problema geral dos três corpos, pois só acontecem para condições iniciais específicas.

Quando duas massas são muito menores que a terceira, esta praticamente não é afectada pelas outras e estará (aproximadamente) parada num referencial de inércia. Os outros dois interagem entre si. Este foi o problema considerado por Hill e é agora conhecido por *Problema de Hill*.

Uma outra aproximação importante é quando dois corpos são muito mais massivos que o terceiro. Nesse caso, a influência do terceiro nos primeiros dois é desprezável e o movimento destes pode imediatamente ser determinado pelas equações do problema de dois corpos, restando o movimento do terceiro para ser determinado. Este problema é denominado *problema restrito dos três corpos* (PR3C<sup>2</sup>) e se as órbitas dos dois massivos forem circulares, *problema restrito circular dos três corpos* (PRC3C<sup>3</sup>). O PRC3C é tão comum que por vezes, quando as órbitas dos massivos são elípticas, o problema é, por oposição, designado por *problema restrito elíptico dos três corpos*, ou seja PRE3C<sup>4</sup>.

<sup>1</sup>3BP, de *three-body problem*, em Inglês.

<sup>2</sup>R3BP, de *restricted three-body problem*, em Inglês.

<sup>3</sup>CR3BP, de *circular restricted three-body problem*, em Inglês.

<sup>4</sup>ER3BP, ou *elliptic restricted three body problem*, em Inglês.



### 6.1.3 Problema restrito circular dos três corpos

Como referido na § 6.1.2, o problema geral dos três corpos é bastante complexo mas podem ser feitas simplificações que conseguem descrever muitos casos relevantes. Um desses casos, dos mais antigos, é o problema restrito circular dos três corpos (PRC3C).

No PRC3C, tem-se então que:

- Dos três corpos, a massa do terceiro é desprezável, quando comparada com a dos outros dois, designados por *primários*, i. e.  $m_1 \sim m_2 \gg m_3$ .
- Como a massa dos terceiro corpo é desprezável, considera-se que a sua influência no movimento dos primários é desprezável.
- Se a terceira massa não influencia o movimento dos primários, estes constituem um problema de dois corpos, logo resolúvel: as trajectórias de cada um deles serão cónicas em torno do centro de massa (CM), que só depende dos primários.
- No caso do problema restrito circular, considera-se apenas o caso em que os dois primários têm órbitas circulares no referencial do CM
- Como o movimento dos primários é facilmente conhecido, *o objectivo do PRC3C é determinar completamente o movimento do terceiro corpo*, dadas as suas posição e velocidade iniciais, e a configuração inicial dos dois primários (ou seja, a solução do respectivo problema de dois corpos).

Este problema simplificado ainda tem muitas aplicações práticas — é aproximação razoável de muitos problemas concretos, numa escala de tempo adequada. Por exemplo, veículo no espaço orbitando entre a Terra e a Lua. Ou asteróides relativamente próximos de Júpiter, influenciados por este e pelo Sol, e muitos outros (note-se que nestes exemplos a excentricidade das órbitas dos primários não é zero mas pequena, uma fonte de erro que deve ser avaliada).

## 6.2 Escalas Físicas Típicas do problema

Como é fácil de notar, o PRC3C depende de vários parâmetros e tem muitas escalas possíveis. Por exemplo a massa total do sistema pode ser muito variada, mesmo que a fracção de massa dos primários se mantenha, o que não tem que acontecer. A distância entre os primários também é arbitrária, e temos naturalmente que estudar todos os casos. No entanto, é óbvio que podemos ter um problema similar em escalas diferentes, alteradas adequadamente as escalas envolvidas. Isso sugere o uso de equações na forma adimensional, de modo a conseguir estudar muitos problemas de uma só vez, revertendo no fim da resolução para a versão com dimensões em cada problema específico que se resolver.

No caso da dinâmica, as escalas físicas relevantes são as de *Comprimento*, *Massa* e *Tempo*. Seja então um problema (restrito, circular) de três corpos que, sem perda de generalidade, se pode considerar que o primeiro primário é mais massivo que o segundo primário,  $m_1 \gtrsim m_2 \gg m_3$ .

**Escala de comprimento.** A escolha natural para a escala de comprimento é a distância entre os objectos primários  $m_1$  e  $m_2$ , i. e.

$$\boxed{a_{12} = 1.} \quad (6.1)$$

Note-se que, como as órbitas dos primários são circulares, esta distância é constante. Seja  $r$  uma variável com dimensão física de espaço. A versão  $r'$  adimensional de  $r$  é tal que  $r' = r/a_{12}$ , o que significa que  $r = a_{12} \Rightarrow r' = 1$ .

**Escala de Massa.** Seja a variável adimensional de massa tal que a massa total do sistema é igual a um,

$$\boxed{m_1 + m_2 = 1} \quad (m_3 \rightarrow 0), \quad (6.2)$$

pois sendo  $m_3$  desprezável, a massa total do sistema é a soma das massas dos primários, que é normalizada à unidade. Deste modo, a massa de cada um dos primários pode escrever-se:

$$m_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = 1 - \mu, \quad (6.3a)$$

$$m_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \mu, \quad (6.3b)$$

onde não se deve confundir  $\mu$  (a massa adimensional de  $m_2$ ) com o parâmetro gravitacional  $GM$ . Repare-se que deste modo se passa a ter apenas um parâmetro,  $\mu$ , em vez de três,  $(m_1, m_2, m_3)$ .

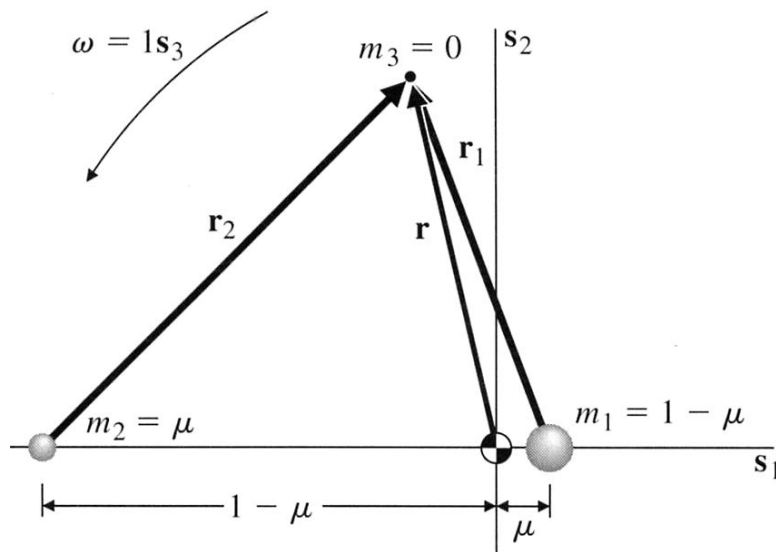
**Escala de Tempo.** Da lei de Kepler, escolhendo unidades tais que a constante da gravitação universal se reduz a  $G = 1$ , o período dos dois primários  $T_{12}$  é normalizado para

$$\boxed{T_{12} = 2\pi \left[ \frac{a_{12}^3}{G(m_1 + m_2)} \right]^{1/2} = 2\pi,} \quad (6.4)$$

onde se usou (6.1) e (6.3). A razão desta escolha ficará clara a seguir.

### 6.3 Equações do Movimento

Uma das maiores dificuldades é a dependência do tempo das forças. Neste caso, as influências dos primários em  $m_3$  variará, já a força da gravidade diminui com o inverso do quadrado da distância e os primários revolucionam um à volta do outro. Matematicamente diz-se que as equações do movimento não são autónomas, i. e. a variável independente  $t$  surge explicitamente nas equações motivada pelo movimento dos primários. É no entanto possível neste caso resolver este problema através de um referencial que acompanhe o movimento orbital dos dois primários. Este referencial em rotação, ou *sinódico*, foi introduzido por Euler (1767) e elimina a dependência explícita do tempo das equações do movimento.



**Figura 6.1:** Geometria do problema de três corpos no referencial que roda com os primários [60].

Considere-se o referencial de inércia com origem no centro de massa. Neste referencial, os primários descrevem órbitas circulares, um de cada lado do CM e alinhados com este. Seja então o referencial sinódico  $\{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3\}$  (cf. Figura 6.1) com origem no centro de massa e o plano  $xy$  coincidente com o plano da órbita dos primários. O referencial roda de tal modo que o eixo  $x$  se encontra sempre na direção definida pelos primários (e o CM), tendo o eixo  $z$  o mesmo sentido que o momento angular. Por definição, neste referencial os primários estão parados no eixo dos  $x$  e, sem perda de generalidade, considere-se que  $m_1$  está do lado positivo do eixo. Uma vez que as órbitas dos primários são circulares, a segunda lei de Kepler implica que ângulos iguais em tempos iguais e portanto a velocidade angular  $\vec{\omega}$  do referencial é constante e determinada pelo período das órbitas dos primários (6.4), ou seja

$$\boxed{\vec{\omega} = 1\vec{s}_3}, \quad (6.5)$$

onde se simplificou a notação definida no Capítulo 1,  $\vec{\omega} \equiv \vec{\omega}^{si}$ , para designar a velocidade angular do referencial  $\{s\}$  em rotação, relativamente ao referencial de inércia  $\{i\}$ .

Note-se que, como o CM se localiza na origem e as massas dos primários (6.3) são, respectivamente,  $m_1 = 1 - \mu$  e  $m_2 = \mu$ , então tem-se imediatamente que as coordenadas  $x$  dos primários são, respectivamente,  $x_1 = \mu$  e  $x_2 = -(1 - \mu)$  ( $|x_2| = 1 - \mu$ ).

Para estudar um problema num referencial em rotação é necessário escrever as equações do movimento  $\vec{F} = m\vec{a}$  em função de variáveis dinâmicas desse referencial, o que significa recorrer às transformações (1.47) referidas no Capítulo 1 para a velocidade (1.52) e aceleração (1.54) medidas num referencial em que os eixos coordenados rodam i. e. num referencial não inercial. Neste caso, a velocidade angular é constante,  $\dot{\vec{\omega}} = 0$ , e as velocidade e aceleração da origem do referencial são nulas,  $\vec{v}_0 = 0 = \vec{a}_0$ , pois

a origem coincide com o CM. Assim, a aceleração  $\frac{{}^i d^2 \vec{r}}{dt^2}$  do terceiro corpo no referencial de inércia com origem no centro de massa é dada por

$$\frac{{}^i d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{{}^s d^2 \vec{r}}{dt^2} + 2\vec{\omega} \times \frac{{}^s d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad (6.6)$$

onde  $\frac{{}^s d^2 \vec{r}}{dt^2}$  e  $\frac{{}^s d\vec{r}}{dt}$  são a aceleração e a velocidade medidas no referencial sinódico, e  $\vec{r}$  é o vector posição (que coincide em ambos os referenciais embora com coordenadas diferentes em cada um deles).

Se o vector posição se escreve, no referencial sinódico, com as coordenadas

$$\vec{r} = x \vec{s}_1 + y \vec{s}_2 + z \vec{s}_3, \quad (6.7a)$$

então, como os vectores da base  $\vec{s}_i$  não variam relativamente ao próprio referencial  $\{s\}$ , tem-se:

$$\frac{{}^s d\vec{r}}{dt} = \dot{x} \vec{s}_1 + \dot{y} \vec{s}_2 + \dot{z} \vec{s}_3, \quad (6.7b)$$

$$\frac{{}^s d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{x} \vec{s}_1 + \ddot{y} \vec{s}_2 + \ddot{z} \vec{s}_3, \quad (6.7c)$$

onde o ponto significa derivada em ordem ao tempo. Substituindo todas as (6.7) em (6.6), obtém-se a aceleração de  $m_3$  no referencial de inércia, em função de grandezas medidas no referencial sinódico,

$$\boxed{\frac{{}^i d^2 \vec{r}}{dt^2} = (\ddot{x} - 2\dot{y} - x) \vec{s}_1 + (\ddot{y} + 2\dot{x} - y) \vec{s}_2 + \ddot{z} \vec{s}_3.} \quad (6.8)$$

Para escrever as equações do movimento de  $m_3$  falta calcular a força aplicada nesta partícula pelos primários. A massa  $m_3$  surge nos termos da força gravítica e no termo da força de inércia  $m\vec{a}$ , logo podemos dividir a equação por  $m_3$  e igualar a aceleração resultante às forças gravíticas por unidade de massa devidas aos primários, ou aceleração devida à gravidade  $\vec{a}_g$ .

A força gravítica é proporcional ao inverso do quadrado da distância entre as massas envolvidas. As distâncias dos primários à massa  $m_3$  são:

$$\vec{r}_{i3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_{0i} \equiv \vec{r} - \vec{r}_{0i}, \quad i = 1, 2; \quad \vec{r}_{01} = (\mu, 0, 0), \quad \vec{r}_{02} = (-(1 - \mu), 0, 0), \quad (6.9)$$

onde se usou  $\vec{r}_{0i}$  para designar as posições dos primários no referencial sinódico. Logo:

$$r_{13} \equiv r_1 = \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2 + z^2}, \quad (6.10a)$$

$$r_{23} \equiv r_2 = \sqrt{(x + 1 - \mu)^2 + y^2 + z^2}. \quad (6.10b)$$

A “aceleração gravítica” aplicada em  $m_3$ , escrita no referencial sinódico  $\{\vec{s}_i\}$  é a soma das forças da gravidade por unidade de massa devidas a  $m_1$  e  $m_2$ , ou seja

$$\boxed{\vec{a}_g \equiv \frac{\vec{F}_3}{m_3} = -\frac{(1 - \mu)}{r_1^3} \vec{r}_1 - \frac{\mu}{r_2^3} \vec{r}_2.} \quad (6.11)$$

As equações do movimento (segunda Lei de Newton) para  $m_3$  são então, usando (6.8) e (6.11),

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - x = -\frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^3}, \quad (6.12a)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}, \quad (6.12b)$$

$$\ddot{z} = -\frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3}, \quad (6.12c)$$

que são um sistema de três equações diferenciais não-lineares, pois  $r_{1,2}$  dependem das coordenadas.

Sendo não-lineares, as equações são extremamente difíceis de resolver já que não há, como nas equações lineares, uma solução geral que consegue verificar todas as condições iniciais apenas mudando umas constantes. Neste caso, para cada posição e velocidade iniciais, a solução tem que ser determinada e pode ser completamente diferente da solução para outras condições iniciais. Além disso, é um problema mal posto: uma pequena diferença, por muito pequena que seja, nas condições iniciais leva, mais tarde ou mais cedo, a uma grande diferença entre o que se está a calcular e a solução real. E há sempre alguma incerteza nas condições iniciais reais. O mesmo problema surge no próprio cálculo numérico em que os erros de truncatura podem ser imaginados como alteração das condições iniciais em cada instante. Isto é uma manifestação de caos. O resultado é que será impossível determinar na prática soluções, mesmo numericamente, que sejam válidas para sempre e que se torna extremamente difícil obter soluções aproximadas e saber até que ponto são válidas. Isto é verdade para os problemas de  $n$  corpos em geral, o que torna impossível saber, por exemplo, o destino do sistema solar, admitindo que não é introduzida nenhuma perturbação exterior desconhecida.

Isto não significa que tenhamos que ficar na completa ignorância. Há informação sobre os sistemas que se consegue calcular, o que significa que, mesmo que não consigamos resolver totalmente as equações, consegue-se saber algo sobre o sistema. Há soluções aproximadas que podem ser obtidas e estimar o intervalo de tempo em que serão válidas (isto é, em que se mantêm uma boa aproximação, apesar do mau condicionamento do problema) e métodos podem ser usados para minimizar dificuldades (por exemplo métodos numéricos symplecticos que preservam a energia). É portanto possível, por exemplo, determinar a evolução do sistema solar durante algum tempo e assegurar que ele permanecerá estável nas próximas dezenas de milhões de anos. Não se consegue é saber o que acontecerá mais tarde do que isso.

## 6.4 Pontos de Lagrange

Como observado no fim de § 6.3, o facto de não conseguirmos resolver as equações do movimento (6.12) não significa que não se consiga saber nada sobre o sistema. Uma das informações que se pode tentar obter é a de saber se existem *pontos de equilíbrio* ou

estacionários, i. e. pontos onde a velocidade e a aceleração são nulas. Isto significa que se  $m_3$  se encontrar em tal ponto com velocidade zero, então permanecerá nesse ponto. Esta característica torna-se possível porque o sistema é autónomo pois se houver dependência explícita do tempo não será em geral possível assegurar aceleração sempre nula num ponto. Daí a importância dos sistemas autónomos e a conclusão imediata de que no referencial de inércia não há pontos de equilíbrio.

Para determinar os pontos de equilíbrio é necessário anular a velocidade e aceleração nas equações (6.12), i. e. todos os termos com derivada, e procurar soluções das equações algébricas resultantes:

$$-x = -\frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^3}, \quad (6.13a)$$

$$-y = -\frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}, \quad (6.13b)$$

$$0 = -\frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3}. \quad (6.13c)$$

A primeira coisa que se pode notar é que, de (6.13c),

$$0 = -\frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3} = -\left[\frac{(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right]z = -kz, \quad k > 0, \quad \Rightarrow \quad z = 0, \quad (6.14)$$

i. e. o sistema de equações (6.13) só poderá ser verificado se  $z = 0$  pois o coeficiente que o multiplica é sempre estritamente negativo. Logo, apenas poderá haver ponto de equilíbrio no plano  $xy$ , o plano orbital dos primários. Isto faz sentido porque se  $m_3$  sair do plano dos primários haverá necessariamente uma componente  $\ddot{z}$ . Podemos então limitar a análise restante ao plano  $z = 0$ .

Verifica-se também imediatamente que, se acontecer que

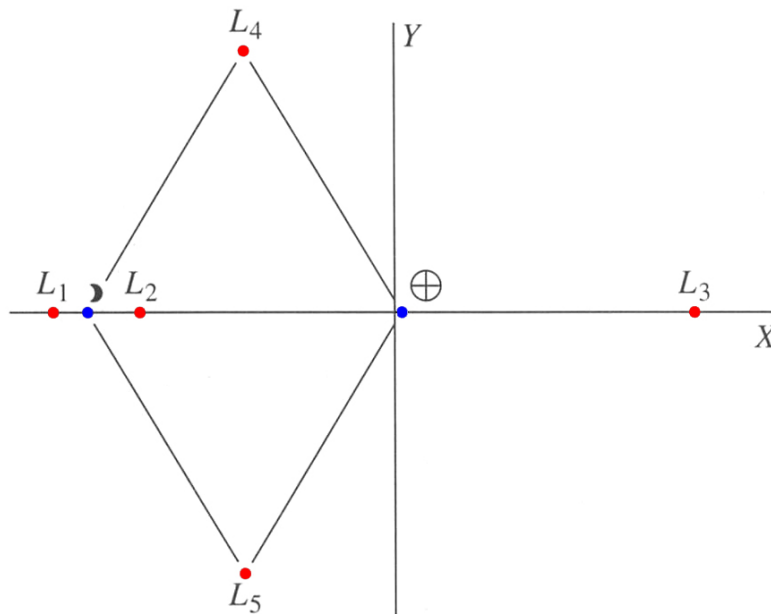
$$r_1 = r_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} + \mu, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (6.15)$$

então ambas (6.13a) e (6.13b) são necessariamente verificadas pois resultam numa identidade:

$$\begin{aligned} -x &= -\frac{(1-\mu)(x-\mu)}{1^3} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{1^3} \\ &= -(x-\mu-\mu x+\mu^2) - (\mu x+\mu-\mu^2) = -x, \end{aligned} \quad (6.16a)$$

$$-y = -\frac{(1-\mu)y}{1^3} - \frac{\mu y}{1^3} = -(y-\mu y) - \mu y = -y. \quad (6.16b)$$

Estes dois pontos foram descobertos por Lagrange e são designados  $L_4$  e  $L_5$ . Cada um deles forma um triângulo equilátero com os primários, já que nestas coordenadas adimensionais a distância entre estes também é igual a um. Por essa razão são designados *pontos triangulares de Lagrange*.



**Figura 6.2:** Pontos de Lagrange no caso do sistema Terra-Lua [60].

Por outro lado, verifica-se que se  $y = 0$  (e já se tem  $z = 0$ ), (6.13b) é sempre verdadeira pois anula-se em ambos os lados. Isto significa que as soluções restantes serão os zeros da equação restante (6.13a)

$$y = z = 0 \quad \Rightarrow \quad x - \frac{(1 - \mu)(x - \mu)}{|x - \mu|^3} - \frac{\mu(x + 1 - \mu)}{|x + 1 - \mu|^3} = 0, \quad (6.17)$$

e estarão necessariamente sobre o eixo  $x$ . É necessário ter algum cuidado com o estudo dos módulos nos denominadores mas é possível verificar que a equação resultante é um polinómio do quinto grau mas que não tem mais que três raízes reais na região relevante  $0 \leq \mu \leq 1$ , de onde resultam mais três soluções  $L_1, L_2, L_3$ , designados por *pontos colineares*, que foram descobertos por Euler antes de  $L_4, L_5$ . No entanto, todos os cinco pontos de equilíbrio, tanto os colineares como os triangulares, acabaram por tomar o nome de *Pontos de Lagrange*. A sua localização pode ser observada na Figura 6.2 para o valor de  $\mu$  correspondendo ao caso dos primários Terra-Lua.

## 6.5 Estabilidade dos Pontos de Lagrange

Uma questão importante é saber se os pontos de equilíbrio são estáveis. A estabilidade em Dinâmica é uma questão complicada porque os sistemas podem ser observados de muitos pontos de vista. Por exemplo, poder-se-ia argumentar que o sistema solar com  $n$  planetas seria estável se nenhum planeta acabasse por ser ejectado. Mas por outro lado, se os planetas migrassem de suas órbitas para distâncias muito diferentes do Sol, isso

poderia ser considerado instável de um certo ponto de vista. Há mais de 50 definições de diversos tipos de estabilidade, muitas vezes levando a conclusões contraditórias.

### 6.5.1 Equações da estabilidade

Para estudar a estabilidade dos pontos de Lagrange vamos usar o conceito mais simples, que é o de estabilidade linear: estabilidade de perturbações de ordem um para desvios pequenos. Considere-se pequenos desvios  $\delta$  da posição de equilíbrio:

$$x = x_e + \delta x, \quad (6.18a)$$

$$y = y_e + \delta y, \quad (6.18b)$$

$$z = z_e + \delta z = 0 + \delta z = \delta z, \quad (6.18c)$$

onde  $(x_e, y_e, z_e = 0)$  é a posição de um ponto de Lagrange, portanto independente do tempo, enquanto que os desvios  $\delta$  podem depender do tempo. Logo

$$x_e = \text{Cte} : \quad \dot{x} = \delta \dot{x}, \quad (6.19a)$$

$$y_e = \text{Cte} : \quad \dot{y} = \delta \dot{y}, \quad (6.19b)$$

$$z_e = 0 : \quad \dot{z} = \delta \dot{z}, \quad (6.19c)$$

e o mesmo para a segunda derivada

$$w_e = \text{cte} : \quad \dot{w} = \delta \dot{w}, \quad w = x, y, z. \quad (6.20)$$

Substituindo, por exemplo em (6.12a) e tendo em conta (6.19) e (6.20), fica-se com

$$\delta \ddot{x} - 2\delta \dot{y} - x_e - \delta x = -\frac{(1-\mu)(x_e + \delta x - \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x_e + \delta x + 1 - \mu)}{r_2^3}, \quad (6.21)$$

levando em conta que  $(x_e, y_e, z_e)$  ponto de equilíbrio ( $\dot{w}_e, \ddot{w}_e = 0$ ,  $(w_e = x_e, y_e, z_e)$ ). Como só nos interessam pequenos desvios, podemos expandir as funções e desprezar termos nos desvios de ordem superior a um, i. e.  $\delta x^2, \delta x \delta y$ , etc. As distâncias aos primários  $r_1, r_2$  podem ser aproximadas e simplificadas pela expansão binomial

$$\frac{1}{(1 \pm w)^\alpha} = 1 \mp \alpha w + \alpha(\alpha+1) \frac{w^2}{2!} + \dots, \quad w \ll 1, \quad (6.22)$$

resultando:

$$\begin{aligned} r_1^{-3} &= \left[ (x_e + \delta x - \mu)^2 + (y_e + \delta y)^2 + \delta z^2 \right]^{-3/2} \\ &\approx \left[ (x_e - \mu)^2 + y_e^2 \right]^{-3/2} - \frac{3r_{1e}^{-5}}{2} [2(x_e - \mu)\delta x + 2y_e\delta y] \\ &= \frac{1}{r_{1e}^3} \left\{ 1 - \frac{3}{r_{1e}^2} [(x_e - \mu)\delta x + y_e\delta y] \right\}, \end{aligned} \quad (6.23)$$



para  $r_1^{-3}$ , e de modo similar para  $r_2^{-3}$ . Por outro lado,  $(x_e, y_e, z_e)$  é um ponto de equilíbrio e, por (6.12a), verifica a equação

$$-x_e = -\frac{(1-\mu)(x_e - \mu)}{r_{1e}^3} - \frac{\mu(x_e + 1 - \mu)}{r_{2e}^3}, \quad (6.24)$$

que pode ser usada para simplificar (6.21).

Substituindo (6.23) e a similar para  $r_2^{-3}$ , e usando (6.24) obtém-se, após alguma manipulação algébrica, a equação da perturbação em  $x$

$$\boxed{\delta\ddot{x} - 2\delta\dot{y} - \delta x = -C_{x1}\delta x + C_{x2}\delta y}, \quad (6.25)$$

com as constantes

$$C_{x1} = (1-\mu) \left[ \frac{1}{r_{1e}^3} - 3\frac{(x_e - \mu)^2}{r_{1e}^5} \right] + \mu \left[ \frac{1}{r_{2e}^3} - 3\frac{(x_e + 1 - \mu)^2}{r_{2e}^5} \right], \quad (6.26a)$$

$$C_{x2} = 3(1-\mu) \frac{(x_e - \mu)y_e}{r_{1e}^5} + 3\mu \frac{(x_e + 1 - \mu)y_e}{r_{2e}^5}. \quad (6.26b)$$

Para a perturbação em  $y$  a dedução é similar e a equação resultante também é parecida:

$$\boxed{\delta\ddot{y} + 2\delta\dot{x} - \delta y = C_{y1}\delta x - C_{y2}\delta y}, \quad (6.27)$$

com as constantes

$$C_{y1} = 3(1-\mu) \frac{(x_e - \mu)y_e}{r_{1e}^5} + 3\mu \frac{(x_e + 1 - \mu)y_e}{r_{2e}^5} = C_{x2}, \quad (6.28a)$$

$$C_{y2} = (1-\mu) \left[ \frac{1}{r_{1e}^3} - 3\frac{y_e^2}{r_{1e}^5} \right] + \mu \left[ \frac{1}{r_{2e}^3} - 3\frac{y_e^2}{r_{2e}^5} \right], \quad (\text{similar a } C_{x1}). \quad (6.28b)$$

As equações (6.25) e (6.27) formam um sistema de equações diferenciais de coeficientes constantes e  $(\delta x, \delta y)$  (independentes de  $\delta z$ ), logo resolúveis em forma fechada. Todos os termos de ordem zero desapareceram das equações pois estes são as equações no ponto de equilíbrio.

A equação em  $\delta\ddot{z}$  é mais simples e separada das anteriores

$$\delta\ddot{z} = -\left( \frac{1-\mu}{r_{1e}^3} + \frac{\mu}{r_{2e}^3} \right) \delta z = -k\delta z, \quad k > 0. \quad (6.29)$$

i. e. só depende de  $\delta z$ . Como  $k > 0$  as soluções de (6.29) são senos ou co-senos, ou seja, dada uma perturbação  $\delta z_0$ ,  $m_3$  oscilará com valores da mesma ordem, nunca se afastando de  $z_e = 0$ . Isto já seria de esperar pois se  $m_3$  sair do plano  $xy$ , os primários puxa-la-ão de volta. Pode-se então estudar as perturbações em  $x$  e  $y$  separadamente da de  $z$ .

As equações que descrevem as perturbações (6.25) e (6.27) são válidas, tal como (6.29), apenas localmente. Se, por exemplo,  $\delta x$  crescer o suficiente, a solução deixará de ser válida pois a equação foi obtida no pressuposto que  $\delta x^2$  pode ser desprezado.

### 6.5.2 Estabilidade dos pontos triangulares

Concretizemos agora para o ponto triangular  $L_4$  (para  $L_5$  será similar, por simetria). As coordenadas do ponto são

$$x_e = -\frac{1}{2} + \mu, \quad y_e = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad r_{1e} = r_{2e} = 1, \quad (6.30)$$

e substituindo em (6.26) e (6.28), as equações das perturbações (6.26) e (6.28) ficam:

$$\delta\ddot{x} - 2\delta\dot{y} - \frac{3}{4}\delta x - \frac{3\sqrt{3}}{2} \left( \mu - \frac{1}{2} \right) \delta y = 0, \quad (6.31a)$$

$$\delta\ddot{y} + 2\delta\dot{x} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \left( \mu - \frac{1}{2} \right) \delta x - \frac{9}{4}\delta y = 0. \quad (6.31b)$$

Com  $\delta\vec{r}^\top = (\delta x, \delta y)$ , (6.31) podem ser escritas matricialmente como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta\ddot{\vec{r}} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \delta\dot{\vec{r}} + \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{2} \left( \mu - \frac{1}{2} \right) \\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} \left( \mu - \frac{1}{2} \right) & -\frac{9}{4} \end{bmatrix} \delta\vec{r} = 0. \quad (6.32)$$

A solução de (6.32) será do género

$$\delta\vec{r} = \vec{A} e^{\lambda t}, \quad (6.33)$$

que, substituída em (6.32) resulta na equação característica que descreve um problema de valores/vectores próprios para  $\vec{A}$ ,

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 - \frac{3}{4} & -2\lambda - \frac{3\sqrt{3}}{2} \left( \mu - \frac{1}{2} \right) \\ 2\lambda - \frac{3\sqrt{3}}{2} \left( \mu - \frac{1}{2} \right) & \lambda^2 - \frac{9}{4} \end{bmatrix} \vec{A} = 0. \quad (6.34)$$

O determinante de (6.34),

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - \frac{3}{4} & -2\lambda - \frac{3\sqrt{3}}{2} \left( \mu - \frac{1}{2} \right) \\ 2\lambda - \frac{3\sqrt{3}}{2} \left( \mu - \frac{1}{2} \right) & \lambda^2 - \frac{9}{4} \end{vmatrix} \vec{A} = 0, \quad (6.35)$$

deve ser nulo para haver solução não trivial  $\vec{A} \neq 0$  e simplifica-se para uma equação quadrática em  $\lambda^2$

$$\lambda^4 + \lambda^2 - \frac{27}{4}\mu(\mu - 1) = 0, \quad (6.36)$$

cuja solução é

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \left( -1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)} \right). \quad (6.37)$$

Tendo em conta a forma da solução (6.33), para haver estabilidade é necessário assegurar que os expoentes  $\lambda$  tenham parte real negativa ou sejam imaginários puros, pois se a parte real for positiva  $\delta\vec{r}$  crescerá indefinidamente e afastar-se-á do ponto

de Lagrange. Mas, por (6.37), é impossível obter quatro raízes com parte real apenas negativa, o que implica que a estabilidade só poderá existir quando as quatro soluções são imaginários puros. Isto significa que o discriminante não pode ser negativo. O limite de estabilidade é atingido para

$$1 - 27\mu(1 - \mu) = 0, \quad (6.38)$$

de onde resultam dois valores críticos:

$$\mu_{c1,c2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{69}}{18} \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{c1} = 0.0385209, \quad \mu_{c2} = 0.961479, \quad (6.39)$$

que quando substituídos em (6.37) se verifica que há estabilidade quando

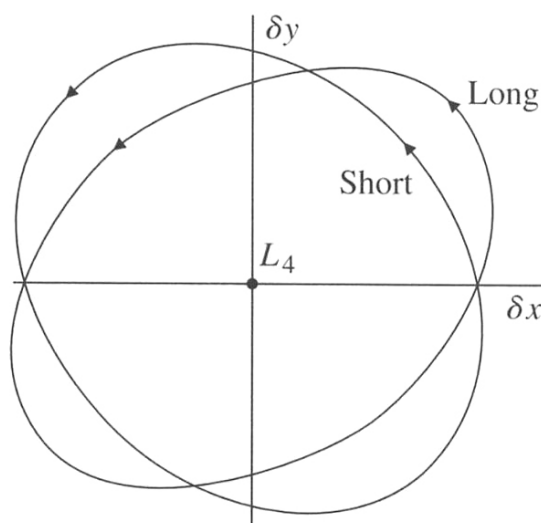
$$\boxed{\text{Estabilidade: } \mu < \mu_{c1} \quad \vee \quad \mu > \mu_{c2}.} \quad (6.40)$$

Estes valores são simétricos relativamente ao centro do intervalo de  $\mu$  e correspondem a  $m_2$  trocar de papel com  $m_1$ . Se supusermos, sem perda de generalidade, que  $m_1 > m_2$ , baste discutir o limite  $\mu_{c1}$ . Ou seja, para haver estabilidade no caso de  $L_{4,5}$  as massas dos primários têm que ser suficientemente diferentes i. e.

$$m_2 < 0.0385209 m_{\text{total}} \quad \Leftrightarrow \quad m_2 < \frac{9 - \sqrt{69}}{9 + \sqrt{69}} m_1 = 0.0400642 m_1. \quad (6.41)$$

O valor limite parece pequeno mas para os corpos do sistema solar que faz sentido considerar como primários (Sol-planetas ou planeta-satélites) o único caso em que pontos triangulares não são estáveis é o de Plutão-Caronte, cuja razão de massas é  $m_2/m_1 = 0.117$ . A maior razão de massas seguinte é a do sistema Terra-Lua com  $m_2/m_1 = 0.0123 < 0.04$ . A Lua é um satélite muito grande, o maior do sistema solar quando comparado com o planeta que orbita, a Terra, pois Plutão é agora apenas um planeta anão.

A estabilidade dos pontos triangulares de Lagrange explica a existência dos asteróides Troianos. Estes asteróides constituem uma população que se acumula na região da órbita de Júpiter, cerca de  $60^\circ$  à frente e  $60^\circ$  atrás do planeta, exactamente nas zonas de  $L_4$  e  $L_5$ . O que acontece é que os asteróides vão viajando pelo sistema solar e sendo afectados pelos planetas mais próximos. Quando passam pela zona dos pontos triangulares com as condições adequadas, tendem a ficar por lá. Embora as populações sejam dinâmicas, em média há uma acumulação de corpos nessas zonas. Acontece com Júpiter porque, sendo mais massivo, é mais fácil para os asteróides estarem nas condições requeridas. Os asteróides troianos não são caso único. Foram também observados objectos nos pontos triangulares das luas de Saturno. O caso da Terra seria potencialmente mais fácil de observar mas os pontos triangulares estão vazios. Na realidade, dada a massa relativamente pequena da Terra e a proximidade do Sol, a importância deste como quarto corpo não pode ser desprezada e torna na realidade os pontos instáveis, ao contrário do prescrito pela teoria do PRC3C. É um sintoma dos limites de validade desta abordagem.



**Figura 6.3:** Modos de período longo e curto em torno de  $L_4$  [60].

### 6.5.3 Solução perturbada dos pontos triangulares

Para completar a solução é necessário resolver numericamente as equações para um certo valor de  $\mu$ . Para o caso Terra-Lua,  $\mu \simeq 0.01213$  os valores próprios e vectores próprios normalizados são

$$\lambda_{1,2} = \pm 0.297931i, \quad \vec{A}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0.77641 \mp 0.365i \\ 0.5137 \end{bmatrix} \quad (6.42a)$$

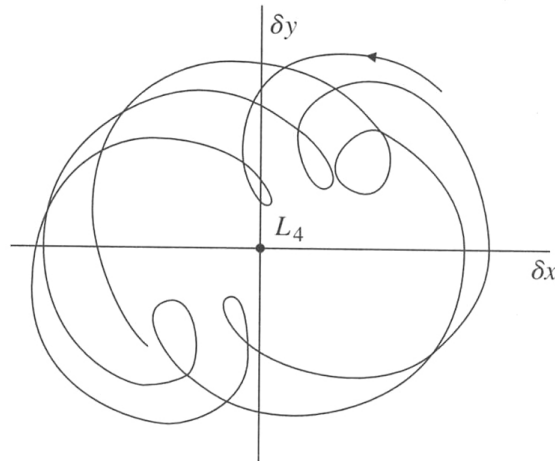
$$\lambda_{3,4} = \pm 0.954587i, \quad \vec{A}_{3,4} = \begin{bmatrix} 0.4487 \mp 0.6745i \\ 0.5869 \end{bmatrix} \quad (6.42b)$$

respectivamente denominados modos de período longo e de período curto. O período curto é similar ao período orbital lunar  $T_{\text{modo}} T_{\text{curto}} \simeq T_{\text{órbita lunar}}$  enquanto que o período longo é  $T_{\text{modo}} T_{\text{longo}} \approx 3$  meses. O modo de período curto pode ser interpretado como uma excentricidade relativamente à órbita circular em torno de  $L_4$ . Em problemas com  $\mu$  menor,  $T_{\text{modo}} T_{\text{longo}}$  é muito maior. Os modos podem ser visualizado na Figura 6.3, onde se mostram dois modos com a mesma amplitude.

A solução mais geral será uma sobreposição dos dois modos

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 C_i \vec{A}_i e^{\lambda_i t} \quad (6.43)$$

que resulta num movimento como o mostrado na Figura 6.4, onde as constantes  $C_i$  são determinadas pelas condições iniciais.



**Figura 6.4:** Sobreposição dos modos com  $A_{\text{modo } T \text{ longo}} = 2 \times A_{\text{modo } T \text{ curto}}$  e. g. caso dos asteróides Troianos [60].

#### 6.5.4 Estabilidade dos pontos colineares

No caso dos pontos colineares  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , pode fazer-se o mesmo tipo de análise da feita para os pontos triangulares com uma diferença: não há fórmula fechada para a localização dos pontos e as equações têm que incluir coeficientes numéricos, de modo que a álgebra é menos esclarecedora. Mas é no entanto possível verificar que *todos os pontos colineares são sempre instáveis*.

Apesar de serem instáveis, os pontos colineares têm interesse, pois pode não ser preciso dispendir muito combustível para os manter na zona. Outra vantagem é a órbita ser potencialmente interessante (comunicações, observações) como alternativa a outra mais complexa. Por exemplo, a sonda SOHO<sup>5</sup> encontra-se no ponto  $L_2$  do sistema Sol-Terra de modo a manter-se a observar o Sol permanentemente mas sempre com comunicação possível com a Terra.

### 6.6 Integral de Jacobi

O problema restrito dos três corpos tem todas as quantidades definidas para o problema de  $n$  corpos conservadas: energia, quantidade de movimento, momento angular e posição do centro de massa. São integrais do movimento. No entanto,  $m_3 \rightarrow 0$  implica que todas as leis de conservação sejam afirmações sobre as duas massas primárias — inútil para resolver o problema. Seria necessário então ter seis leis de conservação para resolver completamente o PR3C para a terceira massa  $m_3$ . Na realidade, este problema tem apenas *uma* equação de conservação exacta, o *Integral de Jacobi*, que vamos obter.

Multiplicando cada uma das componentes da equação do movimento (6.12) pelas

<sup>5</sup>Solar and Heliospheric Observatory

respectivas componentes da velocidade e somando:

$$\begin{aligned} \dot{x} \times (\text{equação do movimento})_x \\ + \dot{y} \times (\text{equação do movimento})_y \\ + \dot{z} \times (\text{equação do movimento})_z, \end{aligned} \quad (6.44)$$

resulta em

$$\begin{aligned} \ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} - x\dot{x} - y\dot{y} \\ = -\frac{1-\mu}{r_1^3} [(x-\mu)\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}] - \frac{\mu}{r_2^3} [(x+1-\mu)\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}]. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Notando que

$$\ddot{w}\dot{w} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{w}^2 \right), \quad w\dot{w} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} w^2 \right), \quad \text{cte}\dot{w} = \frac{d}{dt} (\text{cte}w), \quad w = x, y, z, \quad (6.46)$$

consegue-se transformar (6.45) na derivada de uma quantidade igualada a zero,

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} \right] = 0, \quad (6.47)$$

ou seja, a expressão que está a ser derivada tem que ser constante. É a constante do movimento conhecida por *Integral de Jacobi*,

$$\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} = C. \quad (6.48)$$

Reescrevendo o integral de Jacobi em função da velocidade medida no referencial em rotação

$$\boxed{\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} = C,} \quad (6.49)$$

é mais fácil reconhecer o primeiro termo como sendo a energia cinética medida no referencial sinódico; o segundo termo tem a interpretação de um potencial efectivo da “força centrífuga”; os dois últimos termos são a energia potencial gravítica. Quando se escreve a função no referencial de inércia, verifica-se que é uma combinação da energia total da partícula e do seu momento angular. Ver-se-á a seguir que informação sobre o sistema nos pode oferecer o Integral de Jacobi.

## 6.7 Curvas de velocidade zero e regiões inacessíveis

### 6.7.1 Utilidade do integral de Jacobi

Analisando a expressão do Integral de Jacobi (6.49), verifica-se que um dos termos é sempre não negativo  $v^2 \geq 0$ , enquanto que os restantes termos são sempre não positivos.

Isto significa que para cada valor de  $C$ , determinado pelas condições iniciais, há fronteiras onde  $v \rightarrow 0$ . Nessas fronteiras o terceiro corpo tem que parar e voltar para trás, ou ter-se-ia  $v^2 < 0$ , impossível. Neste caso haverá regiões do espaço inacessíveis. As fronteiras, definidas por  $v = 0$ , denominam-se *Curvas de Velocidade Zero*.

Para  $v = 0$ , (6.49) simplifica-se para

$$C = -\frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}, \quad (6.50)$$

que define regiões no espaço que serão inacessíveis. Variando  $C$ , as regiões inacessíveis vão mudando, determinando se é ou não possível e. g. viajar entre os primários ou afastar (ou aproximar) dos primários. O integral de Jacobi não obriga a que tal aconteça, apenas estabelece a possibilidade ou impossibilidade de tal acontecer. A trajectória efectiva terá sempre que ser determinada pelas equações do movimento completas. Na Figura 6.5 podem observar-se sucessivas regiões inacessíveis (em tons cada vez mais escuros) para diversos valores da constante do movimento  $C$ .

### 6.7.2 Regiões inacessíveis no sistema Terra-Lua

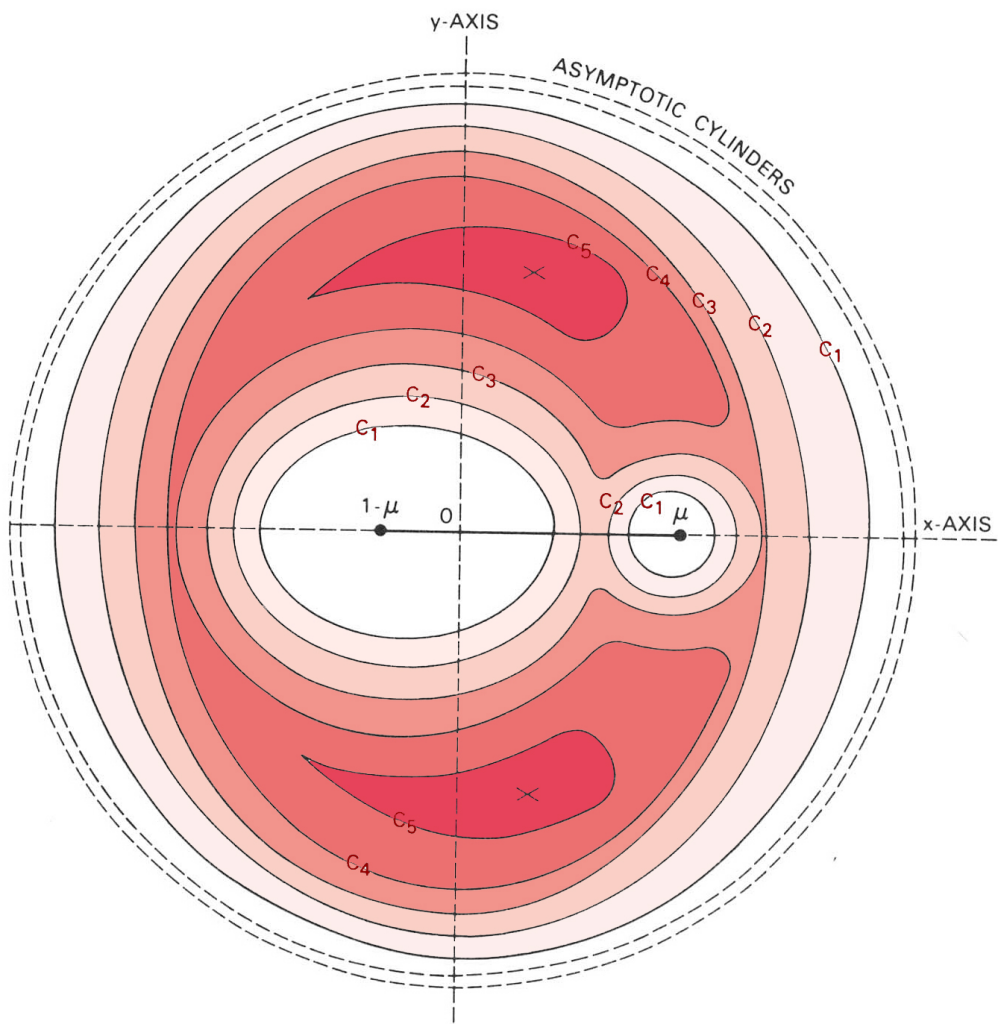
Podemos usar o sistema Terra-Lua para analisar mais de perto o que acontece às regiões inacessíveis quando a constante do integral de Jacobi muda de valor, determinada pelas condições iniciais particulares de cada caso.

Na Figura 6.6 à esquerda, pode ser observado o caso  $C = -1.7$  onde o movimento é possível à volta de cada um dos primários, quase como se o outro primário não existisse. À direita, o caso  $C = C(L_2) \simeq -1.59411$ , quando o movimento entre os dois primários passa a ser possível. A região inacessível abre passagem exactamente em  $L_2$ . Este é o caso de trajectórias Terra-Lua de energia mínima, apenas fica a faltar a posição e direcção da velocidade correctas.

Na Figura 6.7 à esquerda, o caso  $C = C(L_1) \simeq -1.58603$  em que passagem para fora se abre em  $L_1$ , obtendo-se trajectórias de energia mínima para escapar do sistema Terra-Lua. Esta trajectória para fora requer passagem muito próxima da Lua. Os pontos colineares  $L_1, L_2, L_3$  são pontos de sela da função  $C$  (instáveis). Na Figura 6.7 à direita tem-se o caso  $C = C(L_3)$  em que as regiões inacessíveis se dividem em duas em  $L_3$ . Para valores superiores de  $C$  as regiões inacessíveis serão cada vez menores até desaparecem exactamente nos pontos triangulares  $L_4, L_5$ .

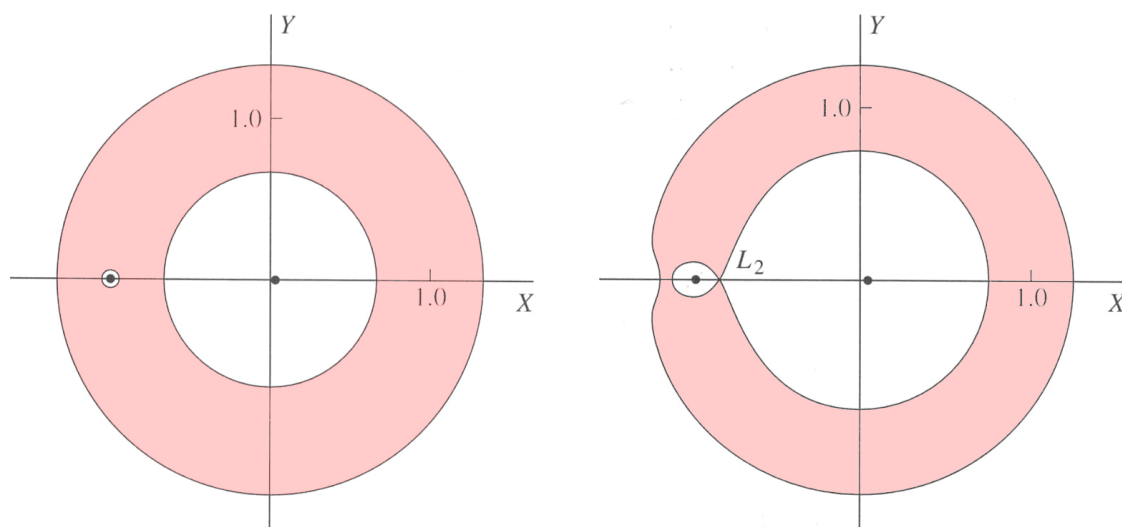
Na Figura 6.8 pode-se observar as curvas de velocidade zero em pormenor nas imediações da Lua. A região de órbitas estáveis à volta da Lua, similares às Keplerianas em que a influência da Terra pode ser considerada uma perturbação, tem raio  $r \simeq 20R_L$ . Acima desse valor pode haver transição para trajectória para a Terra. O problema na realidade é ainda mais complicado, já que perturbações induzidas pelo Sol podem fazer despenhar um satélite na superfície. As curvas críticas de  $L_2$  e  $L_3$  são próximas. Isto significa que a energia necessária para viagens Terra-Lua ou para escapar do sistema são similares.

A utilidade do integral de Jacobi foi muito bem exemplificada por Hill, que utilizou as curvas de velocidade zero para mostrar que a Lua está permanentemente ligada à Terra,

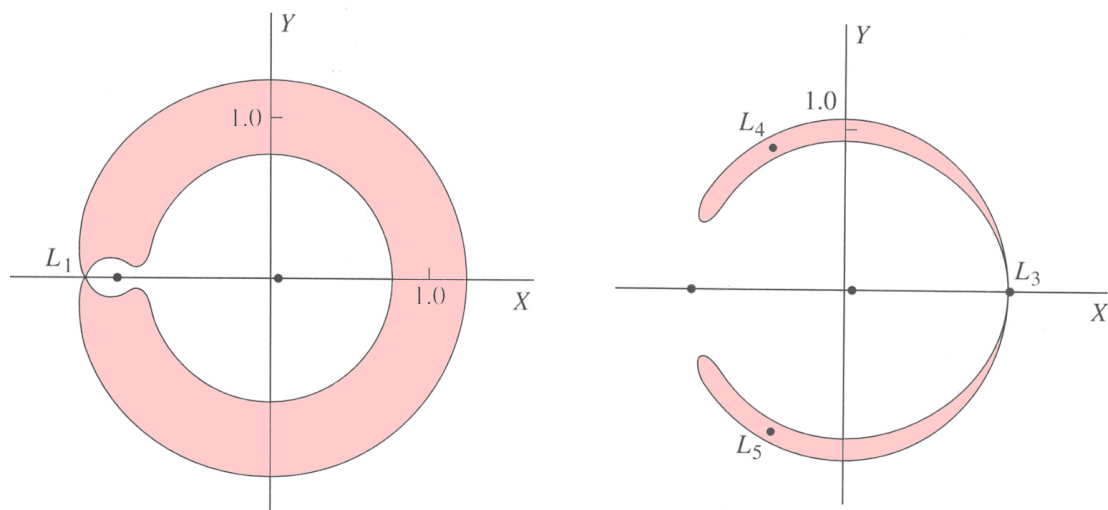


**Figura 6.5:** Regiões inacessíveis para diversos valores de  $C$ . [57].

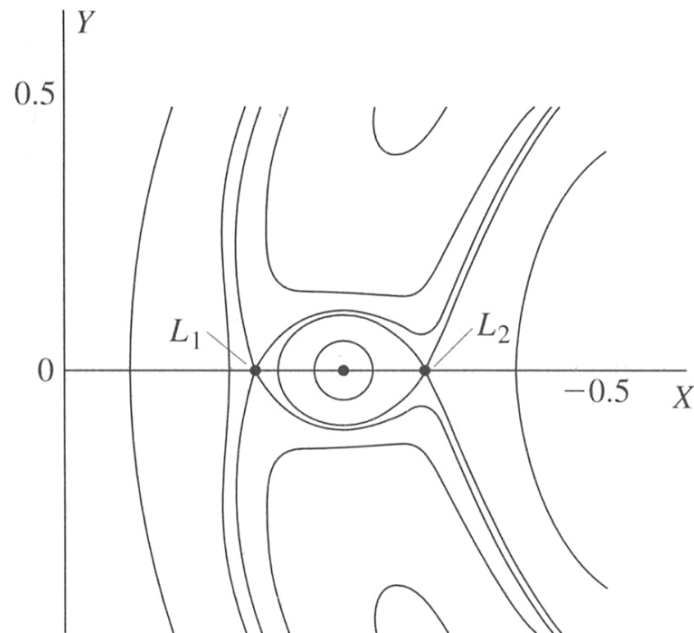




**Figura 6.6:** Regiões proibidas do sistema Terra-Lua. Casos de sem passagem entre os primários e abertura de passagem em  $L_2$  [60].



**Figura 6.7:** Regiões proibidas do sistema Terra-Lua. Casos de abertura para fora em  $L_1$  e abertura em  $L_3$  [60].



**Figura 6.8:** Curvas de velocidade zero perto da Lua (pormenor) [60]

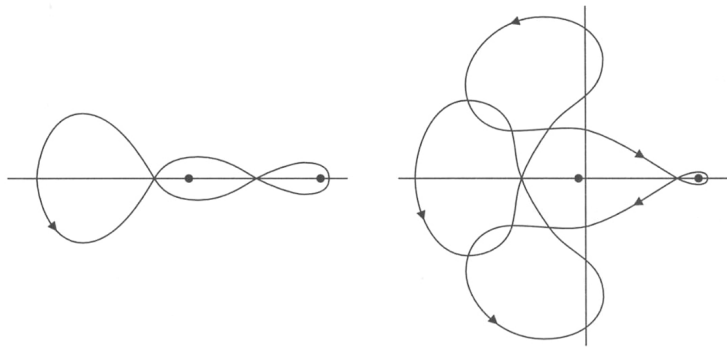
no problema Sol-Terra-Lua. Um feito impressionante pois a solução geral do problema lunar para tempo arbitrário não existe.

## 6.8 Generalizações

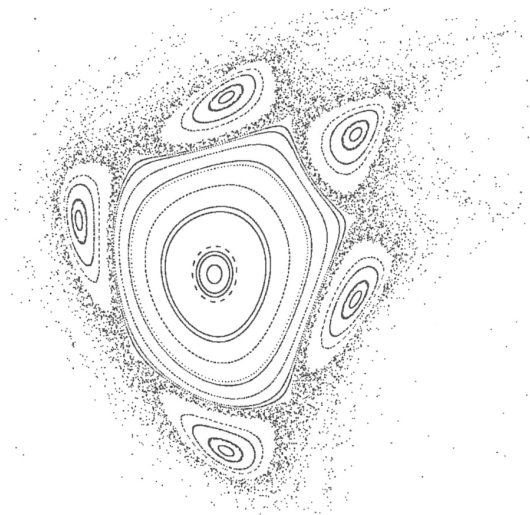
Há muitas generalizações e variações na tentativa de resolver problemas mais gerais e explicar fenômenos observados, alguns já referidos no início do capítulo, como o PRE3C (órbitas dos primários elípticas) ou problema de Hill, quando  $m_1 \gg m_2 \sim m_3$ . Neste, para aplicação ao sistema Sol-Terra-Lua, pode considerar-se o problema num plano com um corpo, o Sol, em infinito.

Como já referido, o problema é não-linear e mal posto, o que o torna extremamente difícil. Há muitos métodos para avançar o conhecimento no problema dos três corpos. Métodos de transformação ou de perturbação são usados para estudar problemas e fenômenos específicos e. g. os *Kirkwood gaps* (que requerem que se considere perturbações de ordem 2 do problema restrito).

Outra técnica para abordar o problema é o da busca de soluções periódicas (cf. Figura 6.9) e estudo da sua estabilidade (teoria de Floquet). A teoria KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser) consiste em usar técnicas de topologia diferencial para encontrar soluções e estudar a sua estabilidade. A estrutura do espaço das fases é infinitamente complexa, i. e. existe caos. O estudo de secções (ditas de Poincaré) no espaço das fases (cf. Fi-



**Figura 6.9:** Órbitas periódicas no problema dos três corpos [60].



**Figura 6.10:** Secção de Poincaré no espaço das fases [60].

gura 6.10) é uma das técnicas de análise ao permitir seguir o caminho de uma trajetória e intuir o seu comportamento. Estas técnicas são avançadas e saem fora do âmbito deste texto.



## Capítulo 7

# Viagens Interplanetárias

### 7.1 Especificidades das órbitas planetárias

Após observar os planetas no céu, cresceu o desejo na humanidade de os visitar e saber mais sobre eles. O seu movimento e características foi sendo observado (cf. Tabela 7.1)) e essa informação será útil para chegar até eles e descobrir como são e o que há lá.

**Tabela 7.1:** Dados dos planetas do sistema solar, o palco das viagens interplanetárias [6], com algumas informações já ultrapassadas.

Planet	Orbital Period years	Mean distance $10^6$ km	Orbital speed km/sec	Mass Earth = 1	$\mu$ $\text{km}^3/\text{sec}^2$	Equatorial radius km	Inclination of equator to orbit
Sun	—	—	—	333432	$1.327 \times 10^{11}$	696000	$7^\circ 15'$
Mercury	.241	57.9	47.87	.056	$2.232 \times 10^4$	2487	?
Venus	.615	108.1	35.04	.817	$3.257 \times 10^5$	6187	$32^\circ$
Earth	1.000	149.5	29.79	1.000	$3.986 \times 10^5$	6378	$23^\circ 27'$
Mars	1.881	227.8	24.14	.108	$4.305 \times 10^4$	3380	$23^\circ 59'$
Jupiter	11.86	778	13.06	318.0	$1.268 \times 10^8$	71370	$3^\circ 04'$
Saturn	29.46	1426	9.65	95.2	$3.795 \times 10^7$	60400	$26^\circ 44'$
Uranus	84.01	2868	6.80	14.6	$5.820 \times 10^6$	23530	$97^\circ 53'$
Neptune	164.8	4494	5.49	17.3	$6.896 \times 10^6$	22320	$28^\circ 48'$
Pluto	247.7	5896	4.74	.9?	$3.587 \times 10^5?$	7016?	?

O sistema solar é um problema de  $n$  corpos mas tem uma característica especial: o

Sol tem muito mais massa que todos os outros corpos seguintes mais importantes, os planetas. Numa aproximação razoável podemos dizer que o sistema de  $n$  corpos Sol mais planetas se transforma em  $n - 1$  problemas de 2 corpos Sol-planeta em que se despreza a influência mútua entre os planetas. De modo similar, conhecidas as posições (mais ou menos bem aproximadas) dos planetas, podemos até certo ponto fazer o mesmo com sondas espaciais. Mais informações sobre o movimento dos planetas na Tabela 7.2, onde podemos observar por exemplo que as suas órbitas são quase circulares e estão (quase) todos no mesmo plano.

**Tabela 7.2:** Elementos clássicos de órbita dos planetas.

**ORBITAL ELEMENTS OF THE PLANETS\*  
FOR THE EPOCH 1969 JUNE 28.0**

Planet	Semi-major axis $a$ , [AU]	Orbital eccentricity $e$	Inclination to ecliptic $i$	Longitude of ascending node $\Omega$	Longitude of perihelion $\Pi$	True longitude at epoch $\ell_0$
Mercury	.3871	.2056	$7^{\circ}.004$	$47^{\circ}.970$	$76^{\circ}.981$	$341^{\circ}.111$
Venus	.7233	.0068	$3^{\circ}.394$	$76^{\circ}.405$	$131^{\circ}.142$	$326^{\circ}.400$
Earth	1.000	.0167	$0^{\circ}.000$	undefined	$102^{\circ}.416$	$276^{\circ}.117$
Mars	1.524	.0934	$1^{\circ}.850$	$49^{\circ}.322$	$335^{\circ}.497$	$265^{\circ}.096$
Jupiter	5.203	.0482	$1^{\circ}.306$	$100^{\circ}.139$	$13^{\circ}.684$	$188^{\circ}.568$
Saturn	9.519	.0539	$2^{\circ}.489$	$113^{\circ}.441$	$93^{\circ}.828$	$31^{\circ}.074$
Uranus	19.28	.0514	$0^{\circ}.773$	$73^{\circ}.916$	$171^{\circ}.513$	$183^{\circ}.225$
Neptune	30.17	.0050	$1^{\circ}.773$	$131^{\circ}.397$	$52^{\circ}.275$	$237^{\circ}.573$
Pluto	39.76	.2583	$17^{\circ}.136$	$109^{\circ}.870$	$222^{\circ}.894$	$175^{\circ}.423$

### 7.1.1 Região de influência

Em geral, uma sonda nunca estará perto de dois planetas simultaneamente portanto resta a questão de saber como ter em conta a influência do planeta mais próximo e do Sol. Para tal consideramos o conceito de região de influência.

Se uma sonda estiver suficientemente próxima de um planeta, a força exercida pelo planeta será muito mais importante que a exercida pelo Sol, tendo em conta que, considerando o referencial do planeta, a força que o Sol exerce no planeta também está a ser contada como influenciando a sonda. A única força desprezada aplicada na sonda

<sup>1</sup>A massa das sondas é sempre muito menor que a dos planetas logo é seguro utilizar a aproximação de força central no referencial do planeta.



**Figura 7.1:** Zona de influência [60].

é a diferença entre a força que o Sol efectivamente exerce na sonda e a força que o Sol exerce no planeta. Nessas condições pode-se esquecer o Sol e tratar o problema como um problema de força central<sup>1</sup> ou de dois corpos, cuja solução é conhecida.

Por outro lado, se a sonda estiver suficientemente longe do planeta, a força exercida por este será desprezável e a sonda estará na prática apenas sob influência do Sol, outro problema de força central. A fronteira é o limite da zona de influência. Nas imediações da fronteira, ambos os astros, Sol e planeta serão em princípio importantes.

Há vários critérios para avaliar o tamanho da zona de influência. Igualando as forças exercidas pelo Sol e pelo planeta na linha que une ambos e contando com a força centrífuga, já que o planeta anda à volta do Sol porque este é muito mais massivo ( cf. [60]), o raio  $r$  da zona de influência é dado por

$$r \simeq R \left( \frac{m}{3M} \right)^{1/3}, \quad (7.1)$$

onde  $R$  é a distância do planeta ao Sol,  $m$  a massa do planeta e  $M$  a massa do Sol. Outras considerações, originalmente realizadas por Lagrange, levam a uma fórmula alternativa mais utilizada de

$$r \simeq R \left( \frac{m}{M} \right)^{2/5}. \quad (7.2)$$

De qualquer modo não faz muita diferença porque o conceito de zona de influência não é muito bem definido, já que na fronteira ambas as influências são importantes. O que se pode dizer é que o movimento da sonda é basicamente determinado pelo planeta quando ela se encontra bem no interior da zona de influência e pelo Sol quando se encontra claramente fora.

### 7.1.2 A aproximação das cónicas ajustadas

A aproximação das cónicas ajustadas, ou *patch-conic approximation*, consiste em transformar um problema de  $n$  corpos em  $n - 1$  (ou mais, dependendo do número de viagens) problemas de dois corpos, quando a geometria do problema o permite. É fácil aceitar, e verificar, que quando uma sonda está muito longe de qualquer planeta, apenas a força gravítica do Sol é importante, tendo-se nesse caso um problema de dois corpos numa boa aproximação. Pela mesma razão, se a sonda estiver relativamente próxima de um planeta e todos os outros estiverem longe, como no caso do sistema solar, as influências do Sol e

**Tabela 7.3:** Raios das zonas de influência dos planetas do sistema solar [60]. Quanto mais longe do Sol e mais massivos são os planetas, maior é a zona de influência. No entanto, na aproximação das cónicas ajustadas usa-se valores de partida e chegada relativamente ao Sol como se o raio da zona de influência fosse zero.

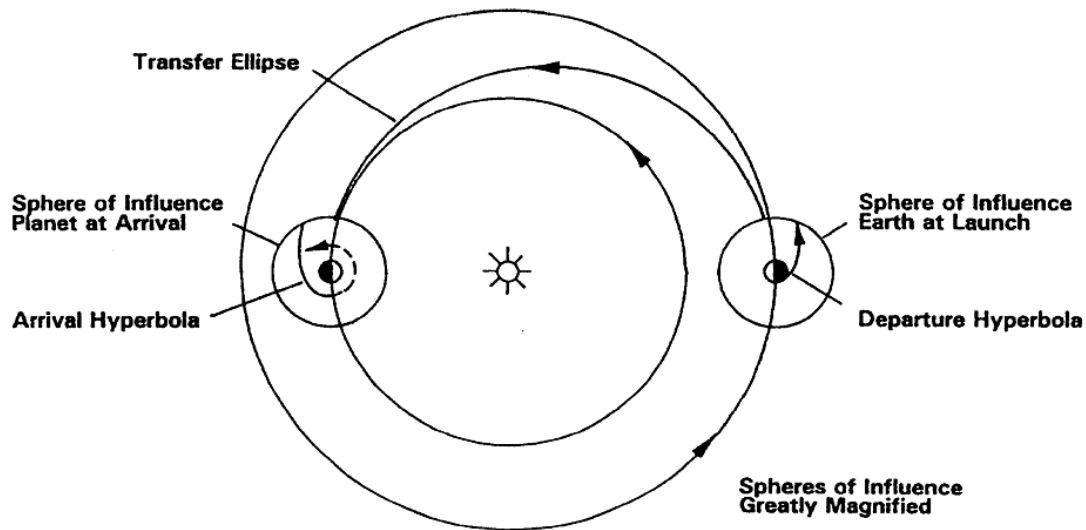
<b>Planetary Data</b>			
<b>Planet</b>	<b>Reciprocal mass (solar masses)<sup>-1</sup></b>	<b>Semimajor Axis (AU)</b>	<b><math>r</math> (AU)</b>
Mercury	6,023,600	0.387099	0.00075
Venus	408,520	0.723332	0.00411
Earth	328,900	1.0	0.00621
Mars	3,098,710	1.523691	0.00385
Jupiter	1,047.35	5.2028	0.3222
Saturn	3,498.1	9.53884	0.364
Uranus	22,869	19.1819	0.346
Neptune	19,332	30.0578	0.580
Pluto	130,000,000	39.44	0.00056

do planeta serão, de longe, as mais importantes. A aproximação das cónicas ajustadas consiste principalmente em transformar cada problema de três corpos Sol-planeta-sonda em dois problemas de dois corpos, cada vez que a sonda está próxima de um planeta. Isto torna possível estudar as viagens interplanetárias, já que sabemos resolver problemas de dois corpos. Claro que um erro é cometido pois nas imediações da fronteira da zona de influência, de um lado desprezamos uma força importante e do outro a outra. No entanto, esta aproximação é utilizada em viagens interplanetárias onde se pretende escapar ou aproximar de um planeta, o que significa que a sonda não vão ficar muito tempo nesta zona (o que aconteceria se estivessem simplesmente a orbitar o planeta, aí sim, seria uma aproximação má). Além disso, o tempo que a sonda passa nessa zona quando comparado com o da viagem toda é muito pequeno e pode-se esperar que o erro induzido na solução de uma viagem interplanetária seja também pequeno, o que é confirmado pelos resultados. As cónicas soluções dos diversos problemas de dois corpos de cada fase são ajustadas na fronteira, daí o nome da aproximação.

Vai-se então dividir a viagem de transferência entre dois planetas em três fases:

- Partida, ou seja, escape do planeta (vai-se considerar escape a partir de uma órbita de estacionamento a definir, considerando-se que algum foguetão inseriu a sonda nessa órbita). Do ponto de vista dos cálculos, a zona de influência é sempre considerada pequena face à transferência interplanetária e vai-se desprezar as variações de velocidade e posição, relativamente ao Sol ou seja, vai-se considerar que tudo o que acontece nesta fase acontece no ponto de partida, do ponto de vista do Sol, e que a sonda chega a infinito quando escapa do planeta, eliminando complicações de pequenas variações irrelevantes pois significa que após o escape a sonda ainda está no ponto de partida com a velocidade  $v_\infty$  relativamente ao





**Figura 7.2:** Transferência com cónicas ajustadas [16]. A partida e chegada são consideradas pontos, na perspectiva da transferência.

planeta.

- Transferência interplanetária propriamente dita. Como se considerou que a partida e a chegada acontecem em pontos esta transferência é uma manobra entre dois pontos, onde se localizam os planetas de partida e chegada. O raio das zonas de influência é desprezado e a velocidade de chegada é considerada a que se atinge exactamente quando se cruza a órbita dos planetas de partida e de chegada.
- Chegada, com captura para uma órbita ou continuação da viagem para outro planeta. Considera-se que a sonda vem de infinito e que passa para a zona de influência quando sua velocidade é (aproximadamente)  $v_\infty$  relativamente ao planeta e que se encontra (aproximadamente) sobre a assíntota da hipérbole, exactamente como a partida foi considerada.

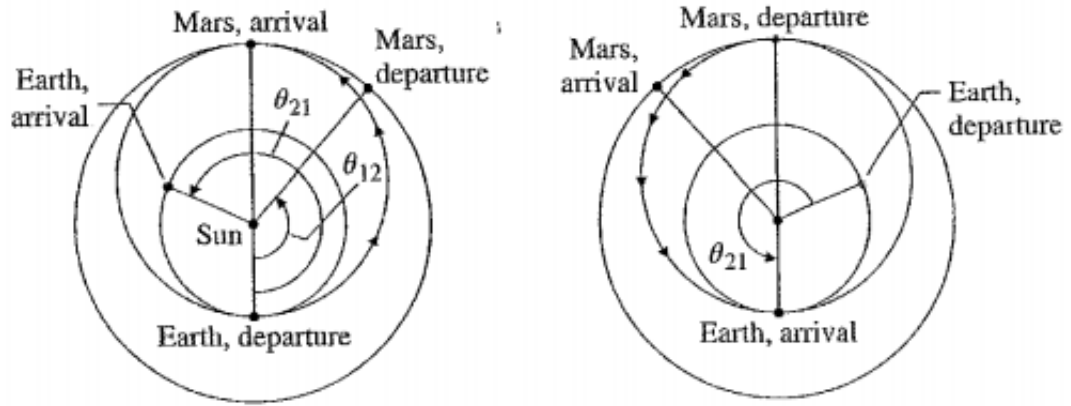
## 7.2 Fase de transferência interplanetária

### 7.2.1 Transferência de Hohmann

Consideremos uma aproximação muito simplificada em que:

- As órbitas dos planetas são consideradas circulares, o que significa que a geometria da transferência é sempre a mesma, bem como os ângulos heliocêntricos requeridos entre os planetas.
- Todos os planetas estão sobre a eclíptica i. e. o problema é 2D.

- Pretende-se sempre minimizar a energia requerida logo a transferência é de Hohmann.
- Para fixar ideias a fase heliocêntrica parte por exemplo da Terra e chega a Marte.



**Figura 7.3:** Transferência heliocêntrica com fases de ida e volta. Tem que esperar no planeta visitado que o ângulo heliocêntrico entre os planetas seja o adequado para voltar [60].

As características da órbita de transferência são triviais de calcular, o eixo maior é a soma dos raios das órbitas dos planetas envolvidos  $2a_t = r_1 + r_2$ , com a excentricidade a obter-se por exemplo de  $r_1 = a_t(1 - e_t)$ . O tempo que demora a transferência  $t_v$  é metade do período da órbita de Hohmann  $t_v = \pi\sqrt{a_t^3/\mu}$ , onde  $\mu$  é o parâmetro gravitacional do Sol. A velocidade relativamente ao Sol com que a sonda chega à fase heliocêntrica, após escapar da Terra, é conhecida: é a velocidade no periélio (neste caso) da órbita de transferência. É a velocidade que a sonda tem que atingir *infinito*, após ter escapado da Terra. A velocidade relativamente ao Sol com que chega ao planeta é a do afélio da órbita de transferência, e é a velocidade em *infinito*, relativamente ao planeta de chegada.

### 7.2.2 Considerações sobre as fases

Supondo que a sonda parte da terra num certo instante, após viajar num tempo  $t_t$  chega à órbita de Marte depois de ter avançado um ângulo heliocêntrico  $\pi$  e Marte tem que estar nesse ponto. No instante da partida Marte tem fazer um ângulo heliocêntrico com a Terra  $\theta_{12}$  tal que

$$\pi - \theta_{12} = n_M t_v, \quad (7.3)$$

onde  $n_M = 2\pi/T_M$  é a frequência de revolução de Marte à volta do Sol ou seja, no tempo que demora a viagem Marte tem que avançar o ângulo que falta para atingir o ponto onde vai chegar a sonda.

Durante a viagem a Terra foi avançando na sua órbita e quando a sonda chegou a Marte a terra tinha avançado  $\theta_{21}$ , passando o ângulo da chegada porque esta transferência é para um planeta exterior. Para a sonda voltar numa órbita idêntica para a Terra (de

duração igual  $t_t$ ) esta tem que estar num ângulo  $\theta_{21}$  para trás do ponto de chegada. Enquanto se espera para voltar  $t_e$ , a Terra tem que avançar para esta posição, avançando (ver Figura 7.3)

$$2\pi - 2(\theta_{21} - \pi) + \beta = 4\pi - 2\theta_{21} + \beta = n_T t_e, \quad (7.4)$$

relativamente a Marte, incluindo o ângulo  $\beta$  que Marte avança durante a espera

$$\beta = n_M t_e. \quad (7.5)$$

Substituindo (7.5) em (7.4) obtém-se<sup>2</sup>

$$t_e = \frac{4\pi - 2\theta_{21}}{n_T - n_M}. \quad (7.6)$$

Note que tudo muda se a transferência for de um planeta exterior para um interior (o inicial agora desloca-se mais devagar que o de destino) e para os casos de planetas mais longínquos em que o interior dá várias revoluções completas antes de a sonda chegar ao destino. Nesse caso as voltas completas têm que ser descontadas.

**Tabela 7.4:** Períodos sinódicos e tempos de viagem para vários planetas [60].

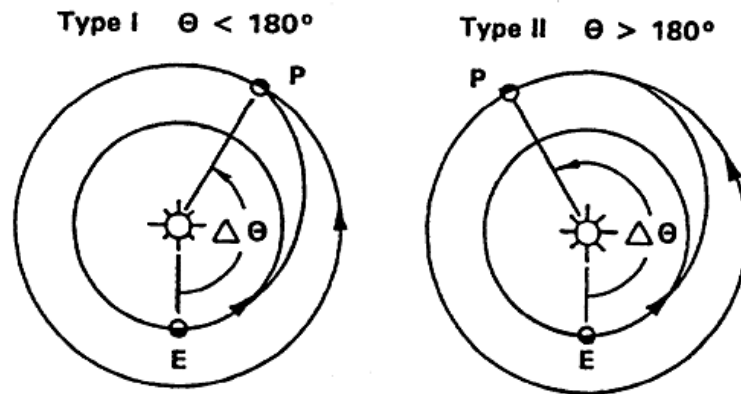
**Synodic periods and trip times (days) for planetary missions**

Planet	$T_{\text{syn}}$	$T_{12}$	$T_{\text{wait}}$	$T_{\text{trip}}$
Mercury	115.8	105.4	66.9	277.9
Venus	583.9	146.1	467.0	759.2
Mars	779.9	258.8	454.3	972.1
Jupiter	398.8	997.5	214.6	2209.6
Saturn	378.1	2209.1	363.2	4454.5

Finalmente, o intervalo de tempo que tem que passar até haver nova oportunidade de lançamento é simplesmente o período sinódico entre a Terra e Marte, já que basta que o ângulo heliocêntrico se repita. Valores dos períodos sinódicos, tempos de viagem de transferência, tempo de espera e duração total da missão de ida e volta podem ser observados na Tabela 7.4. Note que o período sinódico envolvendo a Terra diminui e tende para um ano, à medida que o outro planeta se encontra cada vez mais longe, no caso de a sua órbita ser exterior à da Terra<sup>3</sup>.

<sup>2</sup>Note que a fórmula em Wiesel, 2a edição [60] está errada relativamente à figura porque ele considerou o ângulo excedente relativamente a  $\pi$  i. e.  $\theta_{21} \rightarrow \theta_{21} - \pi$ . Corrigiu na 3a edição mas a fórmula continua a não ser geral. É importante fazer a dedução aqui feita porque há casos diferentes e a fórmula varia.

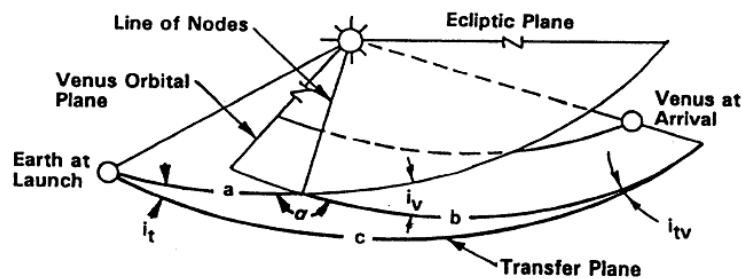
<sup>3</sup>Intuitivamente, porque acontece isto?



**Figura 7.4:** Trajectórias tipos I e II, necessárias porque as órbitas dos planetas não são exactamente co-planares [12]

### 7.2.3 Notas breves sobre casos mais realistas

Mais realisticamente, as órbitas planetárias não podem ser consideradas circulares nem co-planares. Não se pode fazer uma transferência de Hohmann porque isso exigiria fazer um ângulo muito grande com a velocidade dos planetas, deixando de tirar partido dessa ajuda crucial. A transferência têm então que ser menor que  $\pi$  (tipo I) ou maior que  $\pi$  (tipo II) — Figura 7.4 — havendo ainda outras alternativas (tipos III e IV)

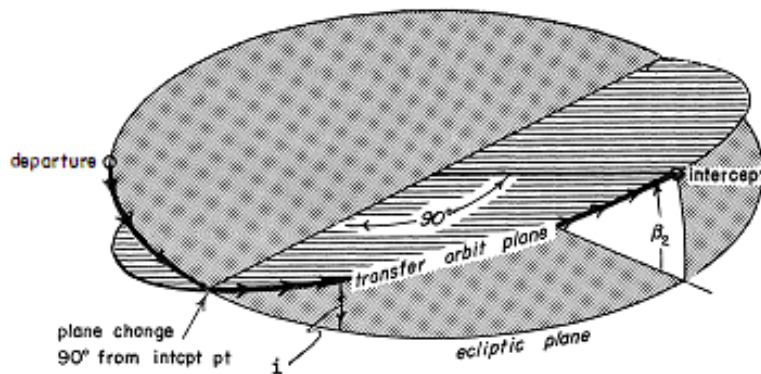


**Figura 7.5:** Transferência directa em 3D [12].

As transferências podem ser feitas directamente (Figura 7.5) ou podem ter uma mudança de plano a meio da viagem para minimizar o  $\Delta v$  requerido (Figura 7.6). Estas mudanças são mais difíceis porque um erro implica mais facilmente perder a intersecção do planeta de chegada.

**Transferência mais realista: o problema de Lambert.** O procedimento geral para obter soluções de transferência interplanetárias passa por:

- Saber onde se encontram os planetas em função do tempo i. e. as *efemérides* dos planetas. O problema tem  $n$  corpos e idealmente deve encontrar-se uma solução

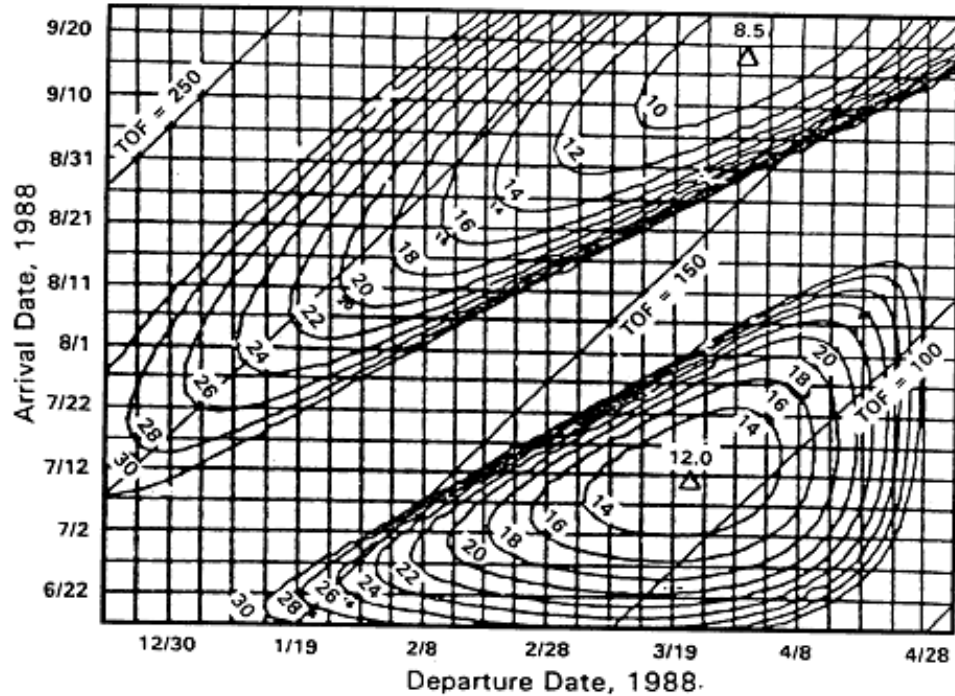


**Figura 7.6:** Transferência com mudança de plano, a meio caminho para minimizar o  $\Delta v$  [6].

mais aproximada que as aproximações que discutimos acima. As sondas não conseguem alterar o movimento planetário de modo que esse cálculo complexo pode ser feito apenas uma vez (e apenas refinado ou corrigido posteriormente). Há pessoas que ganham a vida a fazer esses cálculos e estão disponíveis para quem precisar deles. As *efemérides do JPL* estão disponíveis *online* e são o exemplo mais conhecido.

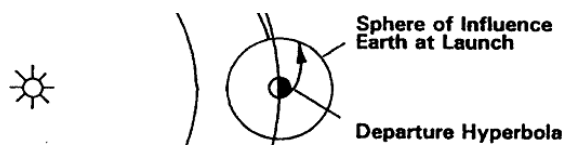
- Considerar um instante de partida. Determinar a posição do planeta de partida.
- Considerar uma duração possível de viagem ou, equivalentemente, uma data de chegada ao destino. Sabendo a data de chegada determinar onde se encontra o planeta de chegada nesse instante. É para aí que queremos ir.
- Temos dois pontos, o de partida e o de chegada. Por dois pontos no espaço passa um número infinito de curvas cónicas, mas só uma com a duração da viagem (problema de Lambert). Pode-se desprezar o efeito de  $n$  corpos nesta fase, mais tarde poder-se-á corrigir a solução resolvendo o problema completo numericamente. A cónica implica velocidades determinadas nos pontos de partida e de chegada (relativamente ao astro central, o Sol). São as velocidades a atingir após o escape do planeta de partida e na aproximação ao planeta de chegada, e que têm uma relação com o combustível necessário para a viagem. Calcula-se o  $\Delta v_T$  total, medida do custo da viagem. Pode haver variações dos critérios desejados, por exemplo haver uma oportunidade boa pouco depois, caso a construção da sonda atrase.
- Repete-se o cálculo para outras durações de viagem e outras datas de partida possíveis de modo a otimizar o  $\Delta v_T$  gasto, dentro dos constrangimentos. É um problema de otimização, vários métodos podem ser utilizados.
- Desenha-se o diagrama da costeleta: um gráfico de curvas de nível, com as datas de partida e chegada, que nos dá a informação visual das melhores soluções (ver Figura 7.7).

- Depois pode-se refinar os cálculos mas este é o procedimento básico.



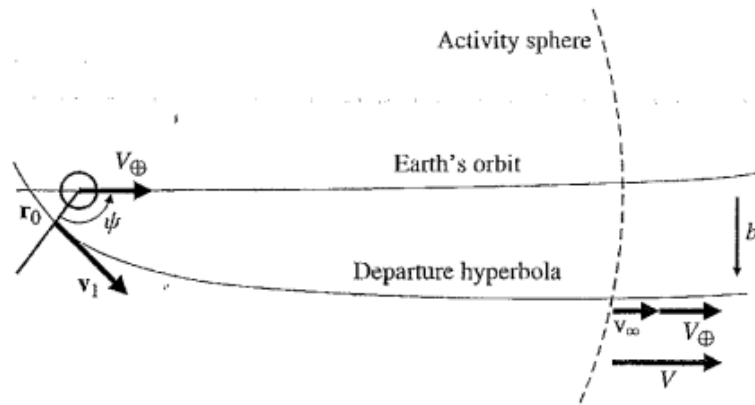
**Figura 7.7:** Diagrama da costeleta fornecendo o  $\Delta v_T$  total gasto em função das datas de partida e chegada [12]. As linhas TOF são as de igual tempo de voo (*time of flight*).

### 7.3 Partida

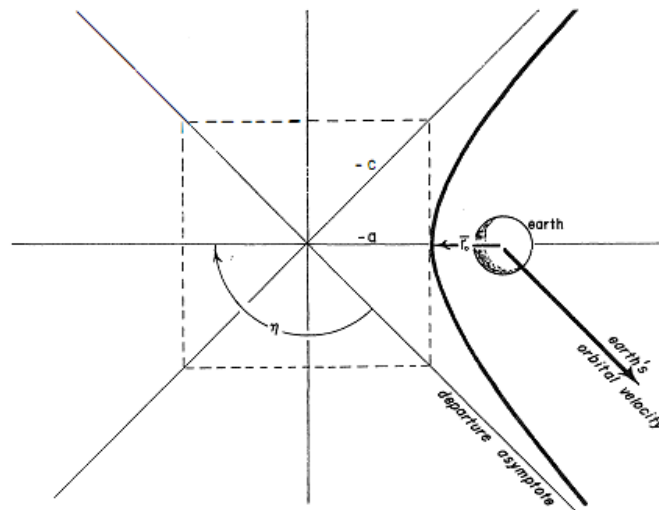


**Figura 7.8:** 23

Voltando ao exemplo simplificado da transferência de Hohmann, façamos um zoom sobre o que acontece na partida (Figura 7.8). Inicialmente a sonda está numa órbita de estacionamento e os motores são accionados para escapar do planeta e realizar a transferência. Tipicamente (é mais eficaz e mais simples de calcular) a sonda entra numa órbita hiperbólica de escape, relativamente ao planeta, e quando sai da zona de influência considera-se que já está *em infinito* relativamente ao planeta, i. e. sobre a assíptota e com velocidade relativamente ao planeta  $v_\infty$ . Esta velocidade, com direcção definida



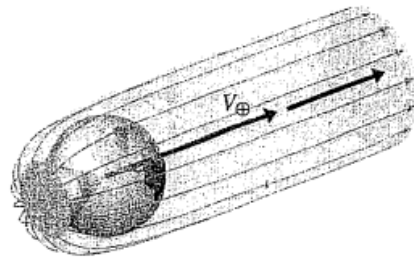
**Figura 7.9:** Hipérbole de escape que resulta, somada a velocidade do planeta, na velocidade heliocêntrica inicial [60].



**Figura 7.10:** Outra visão da partida, com mais ênfase na geometria da órbita [6].

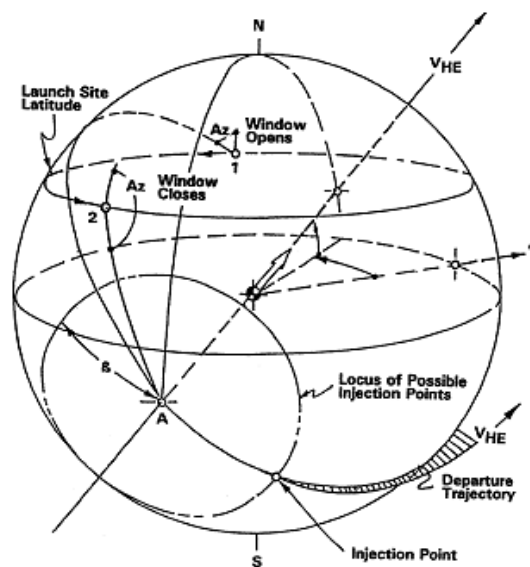
pela escolha de direcção da assíntota, vai somar-se à velocidade do planeta resultando na velocidade heliocêntrica de partida da sonda, i. e. na velocidade do periélio da órbita de Hohmann de transferência. O caso mais favorável é ambas estarem alinhadas (na prática isso em geral não acontece exactamente). Do ponto de vista da fase de transferência isto acontece tudo no ponto de partida (Figura 7.9 e Figura 7.10).

Não é importante o plano orbital escolhido porque as diferenças são desprezáveis do ponto de vista da viagem total. Pode-se seleccionar o mais adequado do ponto de vista do lançamento. (Figura 7.11).



**Figura 7.11:** Hipérbolas de escape possíveis, as diferenças de posição são irrelevantes pois pequenas correcções podem facilmente corrigir essas diferenças [60].

A geometria da partida pode ser observada na Figura 7.12; tem que se levar em atenção a órbita de parque ou local de lançamento, locais para a manobra de escape, direcção da velocidade do planeta, etc.



**Figura 7.12:** Geometria da partida [12].

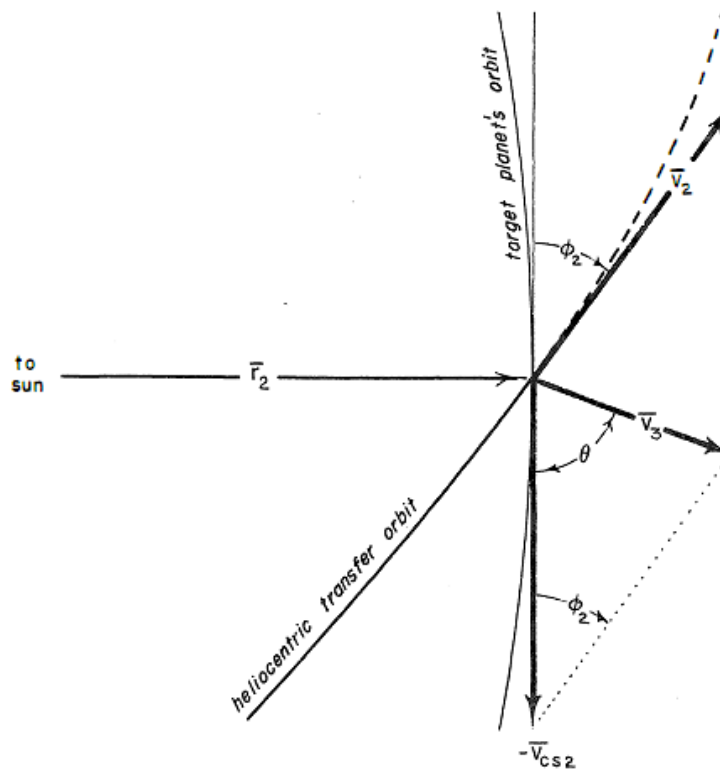


## 7.4 Chegada



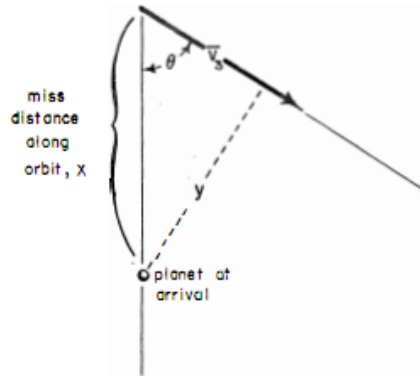
**Figura 7.13:** Chegada, tal como na partida, vai fazer-se um zoom para observar o que acontece [16].

A chegada é similar à partida mas ao contrário (Figura 7.13). Do ponto de vista heliocêntrico pode-se considerar que se está a passar pelo planeta, desprezando distâncias ao planeta e variações de velocidade induzidas pela (pequena) variação de distância ao Sol. À velocidade heliocêntrica da sonda tem que se subtrair (vectorialmente) a velocidade do planeta de chegada, para obter a velocidade da sonda relativamente ao planeta (o caso geral pode ser visto na Figura 7.14; no caso de uma transferência de Hohmann as velocidades serão paralelas).

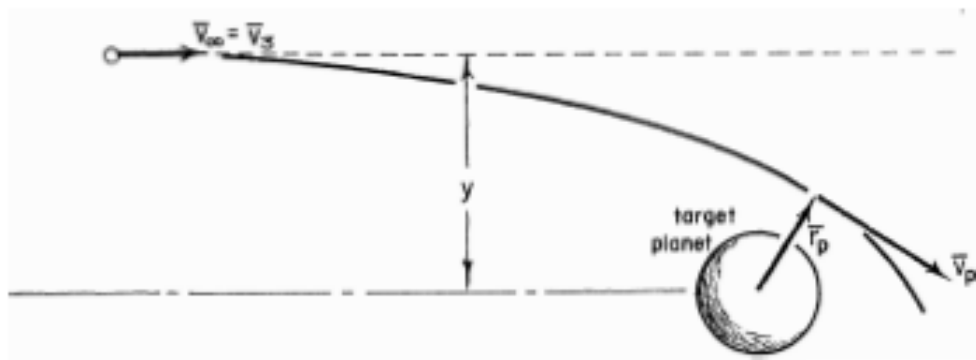


**Figura 7.14:** Subtraindo a velocidade do planeta à velocidade heliocêntrica da sonda obtém-se a velocidade da sonda relativamente ao planeta e obtém-se o ângulo que este vector faz com a direcção da velocidade do planeta [6].

Quando a sonda atinge as imediações do planeta está sobre a assíntota logo a direcção da velocidade relativamente ao planeta define a direcção da assíntota. Se por exemplo a sonda passa  $x$  à frente do planeta, pode-se calcular facilmente a distância  $y$  (Figura 7.15) da assíntota à linha paralela que passa pelo planeta (Figura 7.16).



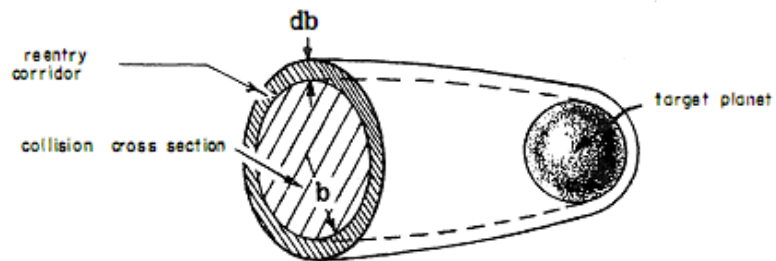
**Figura 7.15:** Determinação da distância  $y$  da assíntota à linha paralela que passa pelo planeta.



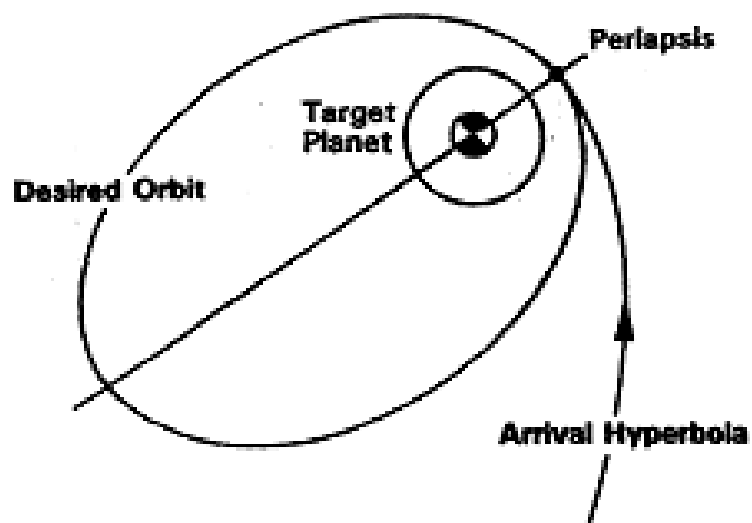
**Figura 7.16:** Hipérbole de chegada com a distância  $y$  marcada [12].

O valor de  $y$  determina o raio do perépsis da órbita. É necessário assegurar que é suficientemente elevado para evitar colisões com o planeta (ou com a atmosfera, caso haja uma, embora nesse caso se possa vir a arriscar uma manobra de *aerobraking*). O valor mínimo de  $y$ ,  $b$ , determina o raio da secção eficaz de colisão com planeta, normalmente a evitar (Figura 7.17).

Para haver captura tem que se realizar uma manobra, tipicamente na periápside da órbita hiperbólica de aproximação onde é mais eficaz, de modo a transformar a órbita hiperbólica em elíptica (Figura 7.18). Se tal não acontecer a sonda fará um voo rasante (*fly-by*) ao planeta e escapará deste, realizando uma manobra de voo rasante, recomeçando tudo.



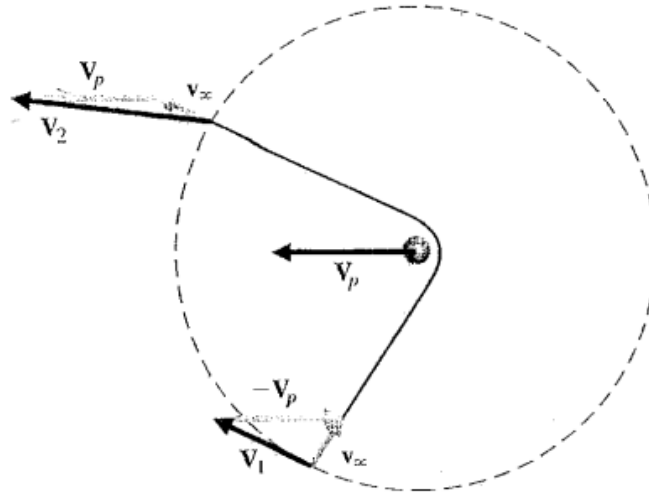
**Figura 7.17:** Seção eficaz de colisão com o planeta. Em geral pretende-se que a sonda entre em órbita e não que se dirija directamente para a superfície [12].



**Figura 7.18:** Captura para uma órbita elíptica realizando o  $\Delta v$  no periápsis das órbita para maior eficácia [12].

## 7.5 Fly-by

No caso de manobra de *fly-by*, em que a sonda não é capturada, é possível que a sonda ganhe ou perca velocidade, dependendo de como passa pelo planeta — se de um lado ou de outro e qual a sua velocidade. O modo como pode ganhar velocidade está esquematizado na Figura 7.19. Note-se que no racional de cónicas ajustadas não se pode fazer considerações de energia porque partes diferentes da aproximação são feitas com aproximações diferentes e em referenciais diferentes.



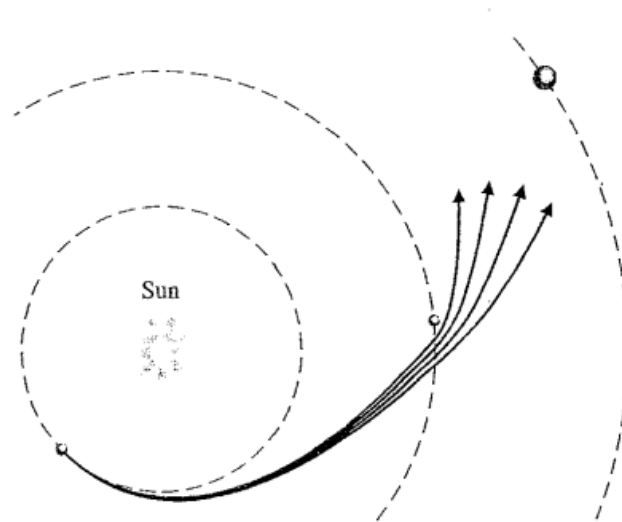
**Figura 7.19:** Ilustração da manobra de voo rasante, ou *fly-by*, com ganho de velocidade [60].

Se a manobra e o instante forem bem executados pode-se usar *fly-bys* para atingir outros planetas (Figura 7.20), alterando a trajectória, e ganhando velocidade que não se tinha antes. Todas as sonda que se dirigiram para o espaço profundo ganharam velocidade e atingiram a velocidade de escape do sistema solar deste modo.

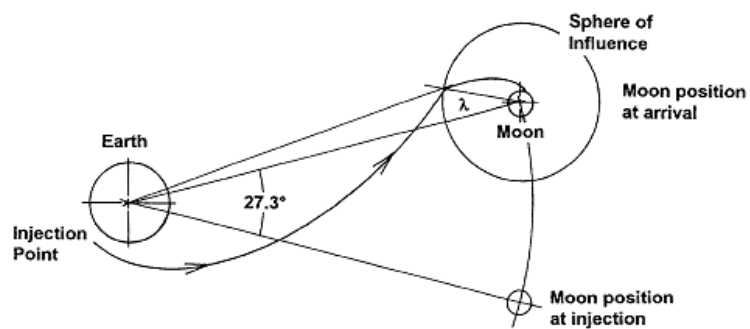
## 7.6 O caso da Lua

No caso do sistema Terra-Lua a aproximação das cónicas ajustadas não funciona tão bem porque a massa da Lua é muito grande, resultando numa região de influência que é cerca de 1/6 da distância Terra-Lua. Isto implica que a zona onde ambas as forças são importantes é extensa e já não se pode fazer a aproximação de considerar a transformação das velocidades na Lua, mas sim onde a zona de influência se inicia (Figura 7.21).

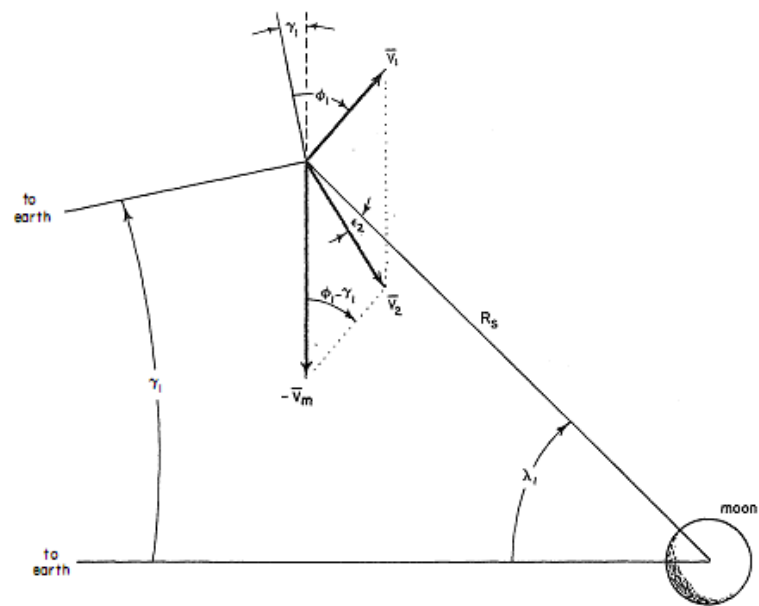
A transformação da velocidade agora exige muito mais álgebra (cf. Figura 7.22 para uma ideia do que tem de considerar).



**Figura 7.20:** Graças a um fly-by poder-se-á atingir planetas que de outro modo seria impossível [60].



**Figura 7.21:** Transferência Terra-Lua com zona de influência indicada [6].



**Figura 7.22:** Transformação da velocidade da sonda para o referencial da Lua [6].

## Capítulo 8

# Dinâmica de Atitude de Satélites

### 8.1 Equações do movimento

Vamos só apresentar os resultados deduzidos nas aulas sem dedução. As deduções destes resultados já foram realizadas em várias cadeiras anteriores, aqui apenas focaremos alguns pontos importante.

#### 8.1.1 Corpos rígidos

Quando necessário os corpos extensos são tratados como contínuos, i. e. que existem em cada ponto do espaço contínuo numa certa região delimitada e têm associada a cada ponto um elemento de volume infinitesimal e uma massa específica<sup>1</sup>

Os *corpos rígidos*, são corpos contínuos em que todos os seus pontos mantêm as distâncias relativas entre si i. e. não podem existir deformações.

Prova-se facilmente que um corpo rígido só pode ter no máximo seis graus de liberdade: pense-se numa partícula de um corpo rígido. Ela *a priori* pode mover-se como quiser nas três direcções espaciais, logo tem três graus de liberdade. Pense-se numa segunda partícula. Dado o movimento da primeira, esta tem que manter a distância relativamente a esta, logo só pode deslocar-se numa bola de raio igual a essa distância. Tem então dois graus de liberdade (latitude e longitude na superfície dessa bola). Um terceira partícula, para manter as distâncias às primeiras duas só poderá orbitar em torno do eixo que passa por estas — um grau de liberdade. A partir daí, exceptuando casos anómalos que podemos desprezar, acrescentando mais partículas não aumenta o número de graus de liberdade. Logo o número de graus de liberdade de qualquer corpo rígido é  $3 + 2 + 1 = 6$ .

Este facto simplifica muito as equações do movimento do miríade número de partículas que constituem cada corpo rígido. Demonstra-se [9] que o movimento se pode reduzir sempre à composição de um movimento de translação (curvo, i. e. as trajectórias de cada partícula podem ser curvas mas são iguais e portanto a orientação ou atitude do

---

<sup>1</sup>Massa específica é a massa por unidade de volume calculada em cada elemento de volume infinitesimal. Lembre-se que a quantidade correspondente e língua inglesa é *density*; em português a densidade é uma quantidade adimensional.

corpo no espaço mantém-se) e com um movimento de rotação relativamente a um ponto de referência. Cada um destes movimentos tem três componentes: o de translação é um ponto no espaço com três coordenadas e qualquer rotação, i. e. passagem de uma orientação do corpo no espaço para outra se pode conseguir com um máximo de três rotações sucessivas.

### 8.1.2 Momento angular e momento das forças de um corpo rígido

Vamos restringir a discussão ao caso em que temos um ponto fixo num referencial de inércia (por exemplo a origem  $O$  desse referencial) e consideramos um ponto, o centro de massa  $C$ , no referencial em que o corpo está sempre parado, o *referencial do corpo* que, como o corpo pode ter qualquer movimento, em geral não é referencial de inércia.

O momento angular de um corpo rígido  $\vec{H}_0$  relativamente ao ponto  $O$  é a soma (integral) sobre todos os elementos de volume com massa  $dm$  dos momentos angulares relativamente ao mesmo ponto  $O$  dos elementos de volume individuais

$$\vec{H} = \int_C \vec{r} \times \vec{v} dm, \quad (8.1)$$

em que  $\vec{r}$  é o vector posição relativamente a  $O$  e  $\vec{v}$  é a velocidade de cada partícula do corpo rígido. A não ser que especificado em contrário só vamos tratar do caso de velocidade num referencial de inércia ou seja a velocidade é *medida* num referencial de inércia e portanto este momento angular é *medido* num referencial de inércia, mesmo que  $O$  se desloque.

Demonstra-se que a soma dos momentos de todas as forças externas (incluindo as que fazem parte de binários) aplicadas num corpo rígido, relativamente a um ponto parado num referencial de inércia,  $O$ , ou relativamente ao centro de massa do corpo,  $C$  é igual a:

$$\sum \vec{M}_0 = \frac{{}^i d\vec{H}_0}{dt}, \quad (8.2a)$$

$$\sum \vec{M}_C = \frac{{}^i d\vec{H}_C}{dt}, \quad (8.2b)$$

onde não deve ser esquecido que na definição do momento angular aparece a velocidade *medida* relativamente ao referencial de inércia.

Pode também obter-se uma relação entre a soma dos momentos calculada relativamente a  $O$  e a  $C$ ,

$$\sum \vec{M}_0 = \sum \vec{M}_C + \vec{r}_C \times \vec{R}, \quad (8.3)$$

onde  $\vec{r}_C$  é a posição de centro de massa  $C$  relativamente a  $O$  e  $\vec{R}$  é a soma de todas as forças externas aplicadas no corpo i. e. é a resultante. Usando (8.2) e  $\sum \vec{F} = m\vec{a}_C$  segue-se que

$$\sum \vec{M}_0 = \frac{{}^i d\vec{H}_C}{dt} + \vec{r}_C \times m\vec{a}_C, \quad (8.4)$$



onde  $\vec{a}_C$  é a aceleração do centro de massa. O problema pode sempre resumir-se ao que acontece relativamente a este ponto. Utilizando (8.2) e (8.4) e após alguma álgebra chega-se a

$$\vec{H}_0 = \vec{H}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C, \quad (8.5)$$

onde  $\vec{v}_C$  é a velocidade do centro de massa.

### 8.1.3 Momento angular de rotação e tensor de inércia

É possível demonstrar que o momento angular de um corpo rígido relativamente ao centro de massa se pode escrever como

$$\vec{H}_C = (\vec{H}_C)_i \vec{e}_i = I_{ij} \omega_j \vec{e}_i \quad \Rightarrow \quad (\vec{H}_C)_i = I_{ij} \omega_j, \quad (8.6)$$

em que  $I_{ij}$  é o tensor de inércia,  $\omega_i$  a velocidade angular e a convenção da soma de Einstein de que índices repetidos são entendidos como estando a ser somados de 1 a 3 (ou em  $x, y, z$ ). Este momento angular só é diferente de zero quando há rotação do corpo i. e. quando a velocidade angular é diferente de zero logo pode ser interpretado como momento angular de rotação. Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{xy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad (8.7)$$

O tensor de inércia

$$I_{ij} = \int_C (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) dm, \quad (8.8)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, tem muitas propriedades interessantes:

- Os termos da diagonal principal são sempre positivos e denominam-se *momentos de inércia*,  $I_i = \int (r^2 - r_i^2) dm$  e. g.  $I_x = \int (y^2 + z^2) dm$ . O momento de inércia relativamente ao eixo  $i$  é uma medida da inércia da rotação relativamente a esse eixo
- Os termos fora da diagonal principal são os produtos de inércia,  $I_{ij} = - \int x_i x_j dm$ , e. g.  $I_{xy} = - \int xy dm$ ; os produtos de inércia são uma medida do desequilíbrio provocado pela inércia (massa distribuída assimetricamente) quando o corpo roda em torno de um dos eixos envolvidos,  $i$  ou  $j$ ; o desequilíbrio faz com que o eixo de rotação mude de orientação no espaço
- É uma matriz real e simétrica, logo é hermítica, logo é sempre diagonalizável: escolhida a origem, neste caso o centro de massa, existe sempre um referencial ortonormado com a mesma origem rodado relativamente ao original em que o tensor de inércia é diagonal.
- O referencial em que o tensor de inércia é diagonal denomina-se *referencial principal*

de inércia e os elementos da diagonal principal *momentos principais de inércia*, também denominados  $A, B, C$ ; os produtos de inércia são zero logo a rotação em torno dos eixos principais de inércia está equilibrada — não há desequilíbrio provocado pela inércia e (8.9) simplifica-se para

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\omega_x \\ B\omega_y \\ C\omega_z \end{bmatrix}, \quad (8.9)$$

- Se a origem for o centro de massa o referencial diz-se *central*; isto não tem nada que ver com ser ou não principal de inércia.

Relembre a sua Álgebra para saber como se obtém o referencial principal de inércia e o que significa e acontece quando há 2 ou 3 momentos principais de inércia iguais.

#### 8.1.4 Energia cinética de um corpo rígido

É possível demonstrar que a energia cinética de um corpo rígido se pode escrever, num referencial com origem no centro de massa do corpo, como

$$E_c = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_{ij}\omega_i\omega_j, \quad (8.10)$$

onde mais uma vez a convenção da soma é usada em índices repetidos. O segundo termo é interpretado como energia cinética de rotação, já que será zero se  $\omega = 0$ ; este termo é uma forma bilinear e pode ser escrito na forma matricial como

$$E_C^{\text{rot}} \equiv T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2), \quad (8.11)$$

onde sem perda de generalidade se usou o referencial principal de inércia

#### 8.1.5 A equação do movimento

Relembrando (8.2b) e usando a transformação das derivadas em ordem ao tempo para um referencial em rotação

$$\frac{{}^i d(\quad)}{dt} = \frac{{}^s d(\quad)}{dt} + \vec{\Omega} \times (\quad), \quad (8.12)$$

podemos finalmente escrever a Equação de Euler vectorial

$$\sum M_C = \frac{{}^s d\vec{H}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{H}, \quad (8.13)$$

onde  $\Omega$  é a velocidade angular do referencial em rotação (não necessariamente o do corpo). Note-se que  $(\vec{H})_i = I_{ij}\omega_j$  e substituindo obtém-se as equações mais gerais. Se

o referencial for escolhido de modo a que o tensor do inércia seja principal de inércia e não varie com o tempo, por exemplo o do corpo em que  $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$  e podemos escrever as equações de Euler:

$$M_x = A\dot{\omega}_x - (B - C)\omega_y\omega_z, \tag{8.14}$$

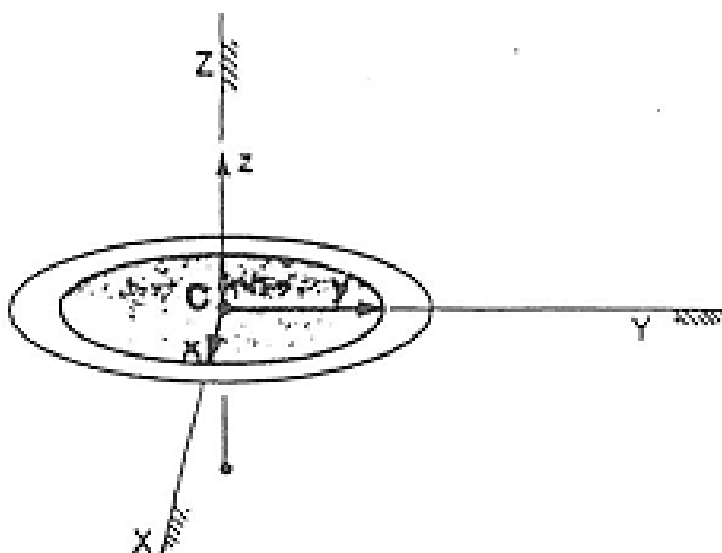
$$M_y = B\dot{\omega}_y - (C - A)\omega_z\omega_x, \tag{8.15}$$

$$M_z = C\dot{\omega}_z - (A - B)\omega_x\omega_y. \tag{8.16}$$

Também se podia escrever algo semelhante se  $\vec{\Omega} \neq \vec{\omega}$  desde que o tensor de inércia não varie nesse referencial (de outro modo a derivada em ordem ao tempo no referencial *s* afectará o tensor e será tudo muito difícil).

As equações de Euler são não lineares, logo muito difíceis de resolver.

## 8.2 Ângulos de Euler

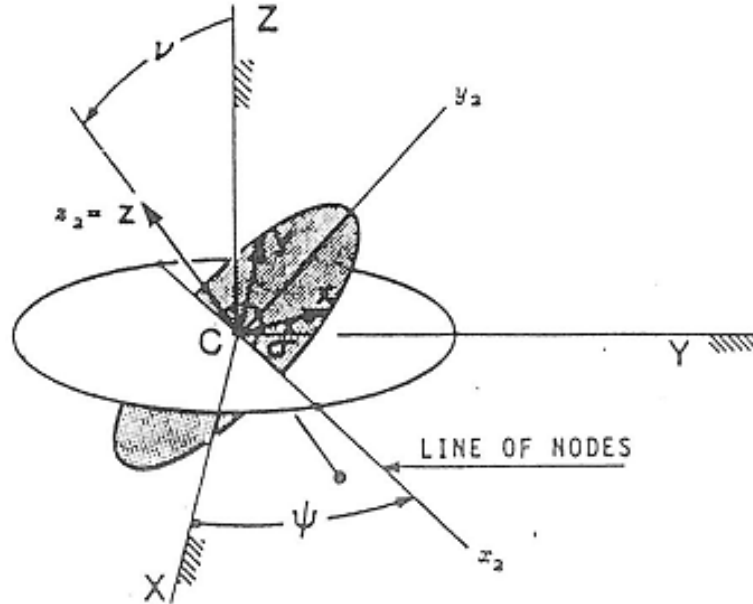


**Figura 8.1:** Uma transformação vai transformar o referencial de inércia XYZ no referencial rodado xyz [49].

Poder-se-ia pensar que se poderia em princípio integrar a velocidade angular nas equações de Euler (8.13) ou (8.14) para obter os ângulos mas os ângulos não são vectores, i. e. não respeitam as propriedades que os elementos dos espaços lineares têm que respeitar. Assim tem que se arranjar uma descrição alternativa que são os ângulos de Euler: 3 rotações sucessivas sempre em torno dos mesmos eixos coordenados instantâneos, que transformam o referencial de inércia XYZ no referencial que roda xyz. Este referencial pode ou não ser o do corpo, já que o que interessa é que o tensor de inércia seja constante,

mas muitas vezes é. Se soubermos o que cada um destes ângulos vale em cada instante, sabemos a orientação do referencial em rotação e logo a do corpo.

### 8.2.1 Rotações Sucessivas $\psi$ , $\nu$ , $\sigma$ em torno dos eixos $z$ , $x$ e $z$



**Figura 8.2:** O disco definido pelo plano  $XY$  original roda com o ângulo de precessão  $\psi$ , inclina-se com o ângulo de nutação  $\nu$ , mudando de plano, e gira novamente com o ângulo de rotação própria  $\sigma$  [49]

Ignorando a translacção pode-se passar do referencial que não roda para o do corpo rígido (ou intermédio) através de 3 rotações sucessivas em torno dos eixos coordenados (Figura 8.2):

$$(X, Y, Z) \equiv (x_0, y_0, z_0) \xrightarrow{R_3(\psi)} (x_1, y_1, z_1) \xrightarrow{R_1(\nu)} (x_2, y_2, z_2) \xrightarrow{R_3(\sigma)} (x_3, y_3, z_3) \equiv (x, y, z) \quad (8.17)$$

A primeira transformação de coordenadas transforma componentes de vectores escritos em  $(x_0, y_0, z_0)$  em componentes escritas em  $(x_1, y_1, z_1)$

$$\{\vec{r}\}_1 = [T]_{1 \leftarrow 0} \{\vec{r}\}_0 \quad (8.18)$$

e assim sucessivamente

$$\{\vec{r}\}_3 = [T]_{3 \leftarrow 2} [T]_{2 \leftarrow 1} [T]_{1 \leftarrow 0} \{\vec{r}\}_0 \quad (8.19)$$

com matrizes de transformação das coordenadas dadas respectivamente por rotação em

torno do eixo dos  $ZZ \equiv z_0z_0 \equiv z_1z_1$

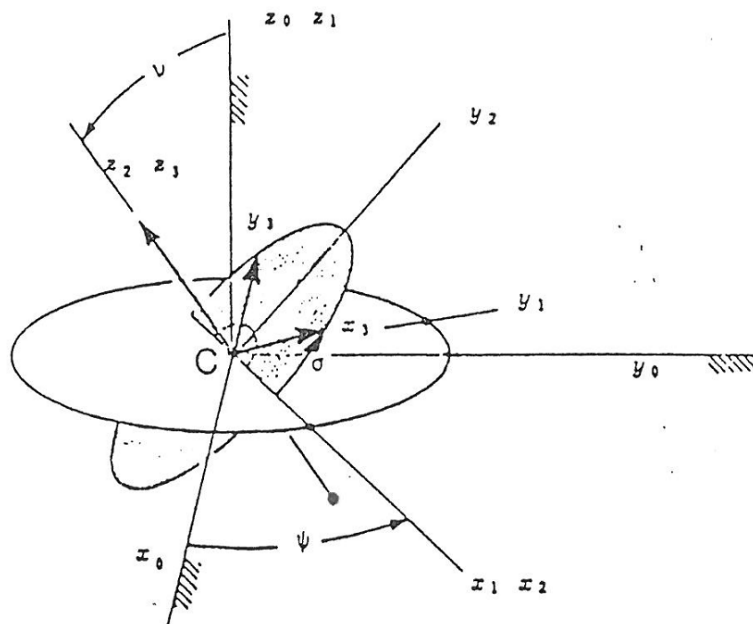
$$[T]_{1 \leftarrow 0} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8.20)$$

rotação em torno do eixo dos  $x_1x_1 \equiv x_2x_2$

$$[T]_{2 \leftarrow 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \nu & \sin \nu \\ 0 & -\sin \nu & \cos \nu \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

e finalmente rotação em torno do eixo dos  $z_2z_2 \equiv z_3z_3 \equiv zz$

$$[T]_{3 \leftarrow 2} = \begin{bmatrix} \cos \sigma & \sin \sigma & 0 \\ -\sin \sigma & \cos \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.22)$$



**Figura 8.3:** Transformações sucessivas de coordenadas,  $\psi$  em torno do  $Z$ ,  $\nu$  em torno do novo eixo  $x$  obtido após rotação  $\psi$  e  $\sigma$  em torno do novo  $z$  após rotação de  $\nu$  [49].

A composição das 3 transformações conduz à matriz de rotação rígida:

$$\begin{aligned}
 [T]_{3 \leftarrow 0} &= [T]_{3 \leftarrow 2} [T]_{2 \leftarrow 1} [T]_{1 \leftarrow 0} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \sigma - \sin \psi \cos \nu \sin \sigma & \sin \psi \cos \sigma + \cos \psi \cos \nu \sin \sigma & \sin \nu \sin \sigma \\ -\cos \psi \sin \sigma - \sin \psi \cos \nu \cos \sigma & -\sin \psi \sin \sigma + \cos \psi \cos \nu \cos \sigma & \sin \nu \cos \sigma \\ \sin \psi \sin \nu & -\cos \psi \sin \nu & \cos \nu \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{8.23}$$

A relação inversa é

$$\{\vec{r}\}_0 = [T]_{0 \leftarrow 3} \{\vec{r}\}_3 \tag{8.24}$$

com  $[T]_{0 \leftarrow 3} = [T]_{3 \leftarrow 0}^{-1} = [T]_{3 \leftarrow 0}^T$  *i. e.*

$$\begin{aligned}
 &[T]_{0 \leftarrow 3} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \sigma - \sin \psi \cos \nu \sin \sigma & -\cos \psi \sin \sigma - \sin \psi \cos \nu \cos \sigma & \sin \psi \sin \nu \\ \sin \psi \cos \sigma + \cos \psi \cos \nu \sin \sigma & -\sin \psi \sin \sigma + \cos \psi \cos \nu \cos \sigma & -\cos \psi \sin \nu \\ \sin \nu \sin \sigma & \sin \nu \cos \sigma & \cos \nu \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{8.25}$$

### 8.2.2 Velocidade Angular em Função dos Ângulos de Euler

Os ângulos não são vectores mas as suas derivadas sim (e estas podem portanto ser somadas); além disso podem ser escritas tanto no referencial do corpo rígido (ou no referencial em rotação utilizado) como no referencial de inércia. De acordo com a figura pode-se escrever:

Precessão:

$$\vec{\dot{\psi}} = \dot{\psi} \vec{e}_Z = \begin{bmatrix} \vec{e}_X & \vec{e}_Y & \vec{e}_Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \tag{8.26a}$$

$$\begin{aligned}
 &= \dot{\psi} [\sin \nu (\sin \sigma \vec{e}_x + \cos \sigma \vec{e}_y) + \cos \nu \vec{e}_z] \\
 &= \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \sin \nu \sin \sigma \\ \dot{\psi} \sin \nu \cos \sigma \\ \dot{\psi} \cos \nu \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{8.26b}$$

Nutação:

$$\vec{\nu} = \dot{\nu} \vec{e}_{x_1} = \dot{\nu} (\cos \sigma \vec{e}_x - \sin \sigma \vec{e}_y) = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\nu} \cos \sigma \\ -\dot{\nu} \sin \sigma \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.27a)$$

$$= \dot{\nu} (\cos \psi \vec{e}_X + \sin \psi \vec{e}_Y) = \begin{bmatrix} \vec{e}_X & \vec{e}_Y & \vec{e}_Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\nu} \cos \psi \\ \dot{\nu} \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.27b)$$

Rotação própria:

$$\vec{\sigma} = \dot{\sigma} \vec{e}_z = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} \quad (8.28a)$$

$$= \dot{\sigma} \sin \nu [\cos (90^\circ - \psi) \vec{e}_X - \sin (90^\circ - \psi) \vec{e}_Y] + \cos \nu \vec{e}_Z$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{e}_X & \vec{e}_Y & \vec{e}_Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\sigma} \sin \nu \sin \psi \\ -\dot{\sigma} \sin \nu \cos \psi \\ \dot{\sigma} \cos \nu \end{bmatrix} \quad (8.28b)$$

Como os ângulos de Euler permitem passar do referencial de inércia para o do corpo a soma das derivadas dos ângulos de Euler é igual à velocidade angular do corpo rígido:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} + \vec{\nu} + \vec{\sigma} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{e}_Z & \vec{e}_{x_2} & \vec{e}_z \end{bmatrix}}_{\text{não é ref. ortogonal}} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\nu} \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} \quad (8.29a)$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \sin \nu \sin \sigma + \dot{\nu} \cos \sigma \\ \dot{\psi} \sin \nu \cos \sigma - \dot{\nu} \sin \sigma \\ \dot{\psi} \cos \nu + \dot{\sigma} \end{bmatrix} \quad (8.29b)$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{e}_X & \vec{e}_Y & \vec{e}_Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\sigma} \sin \nu \sin \psi + \dot{\nu} \cos \psi \\ -\dot{\sigma} \sin \nu \cos \psi + \dot{\nu} \sin \psi \\ \dot{\sigma} \cos \nu + \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (8.29c)$$

Assim

$$\{\vec{\omega}\}_{xyz} \equiv \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \sin \nu \sin \sigma + \dot{\nu} \cos \sigma \\ \dot{\psi} \sin \nu \cos \sigma - \dot{\nu} \sin \sigma \\ \dot{\psi} \cos \nu + \dot{\sigma} \end{bmatrix}, \quad (8.30a)$$

$$\{\vec{\omega}\}_{XYZ} \equiv \begin{bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\sigma} \sin \nu \sin \psi + \dot{\nu} \cos \psi \\ -\dot{\sigma} \sin \nu \cos \psi + \dot{\nu} \sin \psi \\ \dot{\sigma} \cos \nu + \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (8.30b)$$

Pode-se escrever as componentes de  $\vec{\omega}$  em qualquer referencial à custa das frequências de Euler e vice-versa

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \nu \sin \sigma & \cos \sigma & 0 \\ \sin \nu \cos \sigma & -\sin \sigma & 0 \\ \cos \nu & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\nu} \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} \quad (8.31a)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\nu} \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sin \sigma}{\sin \nu} & \frac{\cos \sigma}{\sin \nu} & 0 \\ \cos \sigma & -\sin \sigma & 0 \\ -\frac{\sin \sigma}{\tan \nu} & -\frac{\cos \sigma}{\tan \nu} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (8.31b)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \psi & \sin \nu \sin \psi \\ 0 & \sin \psi & -\sin \nu \cos \psi \\ 1 & 0 & \cos \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\nu} \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} \quad (8.31c)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\nu} \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sin \psi}{\tan \nu} & \frac{\cos \psi}{\tan \nu} & 1 \\ \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ \frac{\sin \psi}{\sin \nu} & -\frac{\cos \psi}{\sin \nu} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix} \quad (8.31d)$$

### 8.3 Satélite axissimétrico

#### 8.3.1 Velocidade do referencial em movimento e do corpo rígido em função das frequências de Euler

No caso de um corpo axissimétrico não é necessário fazer a última rotação e a expressão da velocidade angular do referencial em rotação, que agora não coincide com a velocidade angular do corpo, simplifica-se para (Figura 8.4)

$$\left\{ \vec{\Omega} \right\}_{x_2 y_2 z_2 \equiv xyz} = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\nu}} = \begin{bmatrix} \dot{\nu} \\ \dot{\psi} \sin \nu \\ \dot{\psi} \cos \nu \end{bmatrix} \quad (8.32)$$

e a velocidade angular

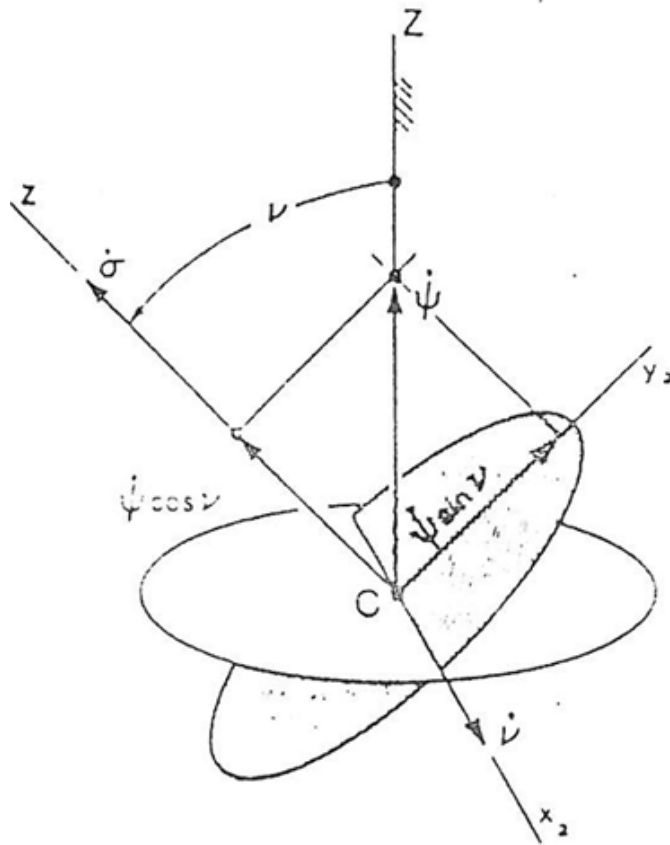
$$\left\{ \vec{\omega} \right\}_{x_2 y_2 z_2 \equiv xyz} = \left\{ \vec{\Omega} \right\}_{x_2 y_2 z_2 \equiv xyz} + \vec{\dot{\sigma}} = \begin{bmatrix} \dot{\nu} \\ \dot{\psi} \sin \nu \\ \dot{\psi} \cos \nu + \dot{\sigma} \end{bmatrix} \quad (8.33)$$

#### 8.3.2 O corpo axissimétrico livre

Estamos agora em condições de analisar o caso do corpo livre, i. e. em que a soma dos momentos das forças aplicadas relativamente ao centro de massa é nula. De (8.2b) sabemos que, do ponto de vista do referencial de inércia,

$$\vec{M}_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_c = \text{cte.} \quad (8.34)$$





**Figura 8.4:** As três frequências de Euler no referencial intermediário no caso do corpo axissimétrico que se obtém não realizando a última rotação que o corpo faz  $\sigma$  [49].

Podemos então escolher sem perda de generalidade o referencial sem rotação  $CXYZ$  de modo a que o momento angular esteja alinhado com o eixo  $Z$ . Nesse caso, no referencial em rotação o momento angular escreve-se como

$$\vec{H}_c = H \sin \nu \vec{e}_y + H \cos \nu \vec{e}_z. \quad (8.35)$$

Por outro lado, de (8.8) e (8.33) as componentes do momento angular são

$$(\vec{H}_c)_i = \begin{bmatrix} A\dot{\nu} \\ A\dot{\psi} \sin \nu \\ C(\dot{\psi} \cos \nu + \dot{\sigma}) \end{bmatrix}. \quad (8.36)$$

Comparando (8.35) e (8.36) componente a componente

$$0 = A\dot{\nu} \quad \Rightarrow \quad \nu = \text{cte}, \quad (8.37a)$$

$$H \sin \nu = A\dot{\psi} \sin \nu \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = H/A = \text{cte}, \quad (8.37b)$$

$$H \cos \nu = C(\dot{\sigma} + \dot{\psi} \cos \nu), \quad (8.37c)$$

ou seja (8.37a) implica que  $\nu = \text{cte}$ , (8.37b), com  $\nu = \text{cte}$  implica que  $\dot{\psi} = H/A = \text{cte}$  (a não ser que  $\nu = 0$ , caso trivial de tratar — movimento em torno de um eixo principal de inércia). Finalmente, utilizando  $H = A\dot{\psi}$  de (8.37b) e substituindo em (8.37c) obtém-se a relação entre a precessão e a rotação própria no caso do corpo axissimétrico livre,

$$\dot{\psi} = \frac{C}{(A - C) \cos \nu} \dot{\sigma}. \quad (8.38)$$

De (8.38) podemos observar que a precessão será directa ou retrógrada, i. e. terá o mesmo sinal ou sinal contrário ao da rotação própria, se corpo for *alongado* ( $A > C$ ) ou *achatado* ( $A < C$ ), respectivamente. Podemos observar a velocidade angular como a soma das frequências de Euler no caso de um corpo alongado na Figura 8.5. A velocidade angular encontra-se sempre no plano  $yz$  e faz um ângulo  $\gamma$  com o eixo de simetria do corpo  $z$  notando que,

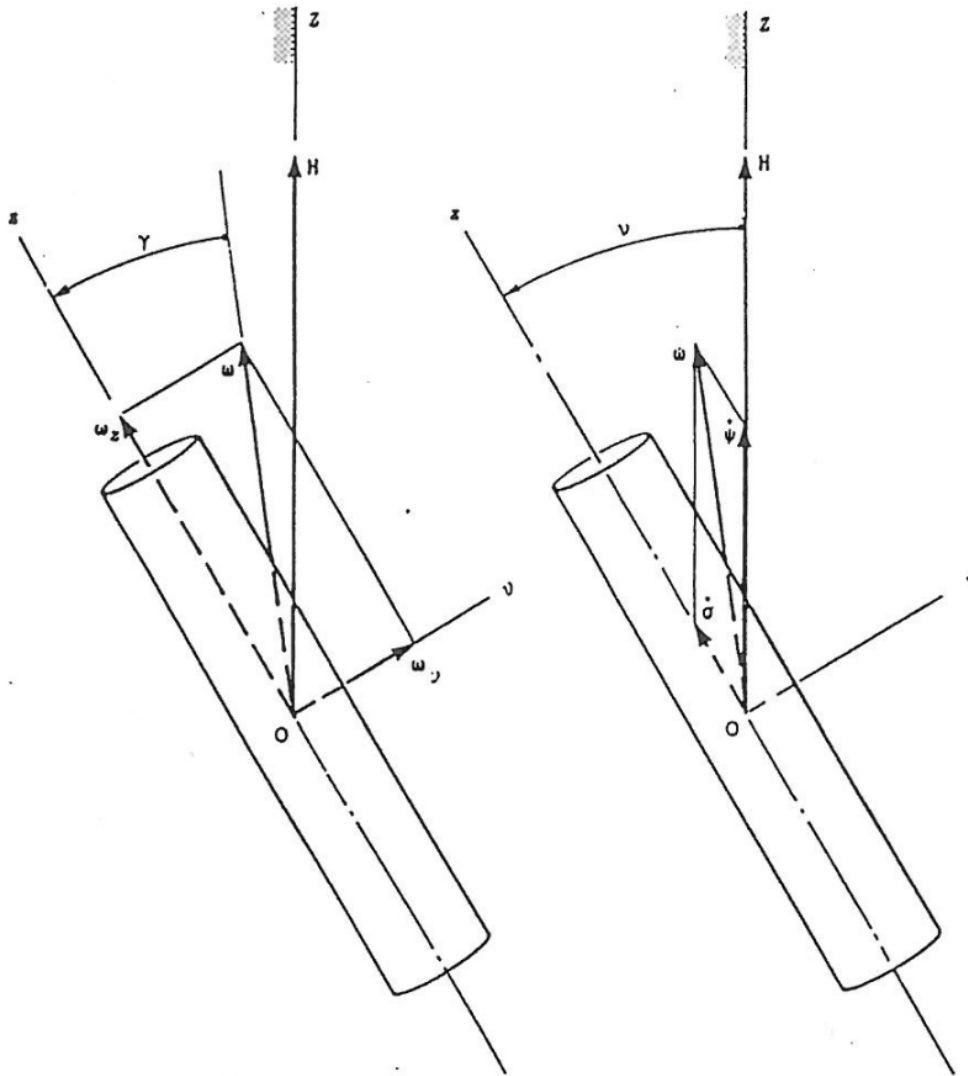
$$\tan \gamma = \frac{\omega_y}{\omega_z} = \frac{\dot{\psi} \sin \nu}{\dot{\psi} \cos \nu + \dot{\sigma}} \quad (8.39)$$

onde se utilizou (8.33). Utilizando agora (8.38) chegamos finalmente a

$$\tan \gamma = \frac{C}{A} \tan \nu. \quad (8.40)$$

O módulo da velocidade angular  $\vec{\omega}$  do corpo é constante e, do ponto de vista tanto do referencial que não roda como do referencial em rotação descreve cones, o *cone do espaço*, em torno do eixo  $Z$ , e o cone do corpo, em torno do eixo de simetria de massa

<sup>2</sup>Note que é conveniente alinhar o sentido do momento angular com o da precessão; no caso da precessão retrógrada a rotação própria, e não a precessão, fica *para baixo*; é mais fácil fazer o desenho.



**Figura 8.5:** No caso do corpo axissimétrico, podemos alinhar o momento angular  $\vec{H}_c$  com o eixo  $Z$  e a velocidade angular é simplesmente a soma vectorial da precessão  $\vec{\psi}$  com a rotação própria  $\vec{\sigma}$ , que se encontram sempre no plano  $yz$  [49].

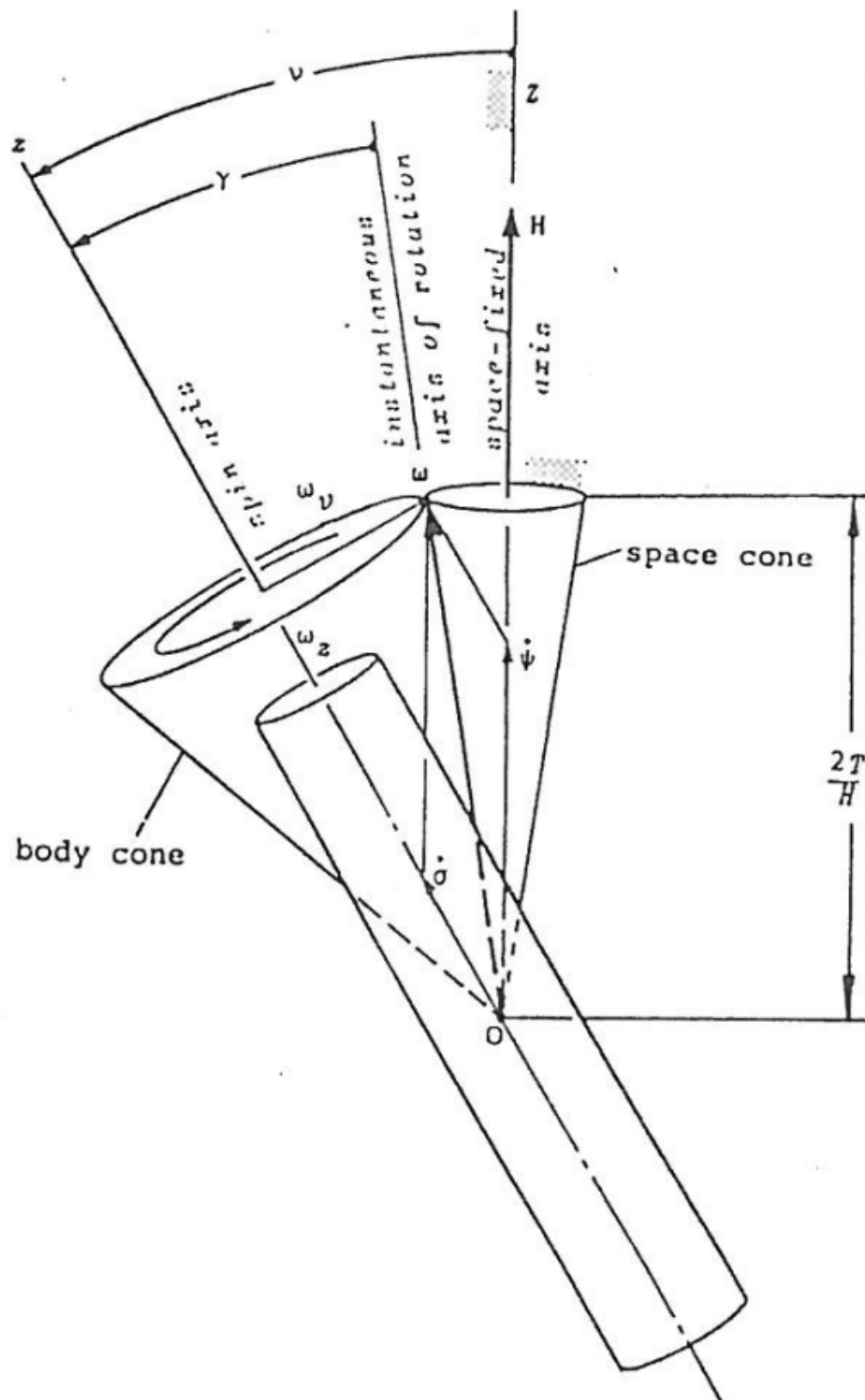
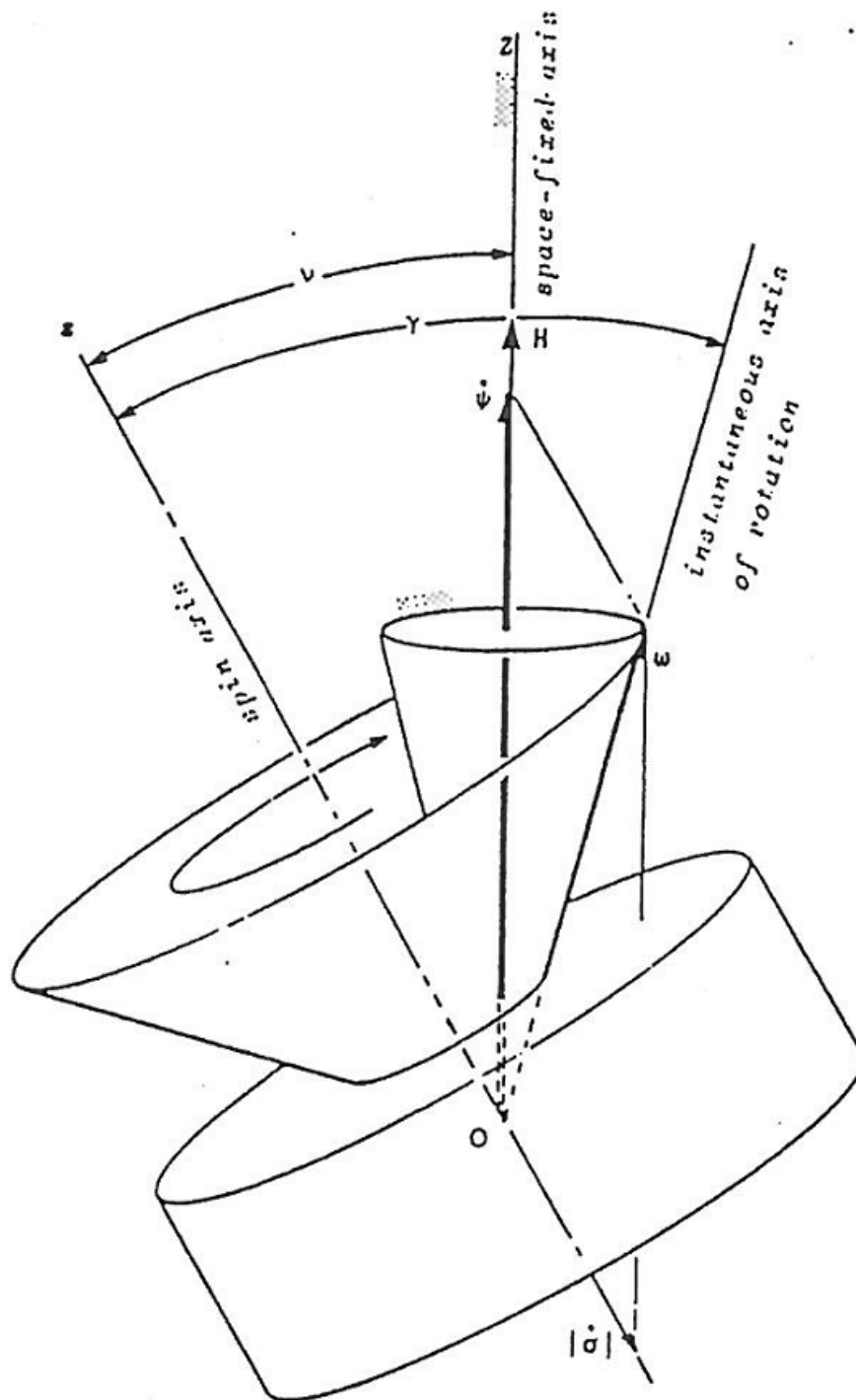


Figura 8.6: Cones do espaço e do corpo no caso do corpo alongado [49].



**Figura 8.7:** Cones do espaço e do corpo no caso do corpo achatado. Note-se como a direcção e sentido de  $\vec{H}_C$  e de  $\vec{\sigma}$  alteram a geometria pois  $\gamma > \nu$  e  $\omega$  passa para o outro lado relativamente a  $Z$  [49].

do corpo  $z$ . A geometria do sistema será diferente para os corpos alongado (Figura 8.6) e achatado (Figura 8.7) devido à mudança de sinal relativo entre a precessão e a rotação própria<sup>2</sup>. No caso do corpo alongado os cones do espaço e do corpo rodam exteriormente enquanto que no caso do corpo achatado (precessão retrógrada)  $\gamma > \nu$ ; a velocidade angular vai para o outro lado do eixo  $Z$  e o cone do espaço fica no interior do cone do corpo, sendo mais difícil de visualizar.

## 8.4 Estabilidade do satélite genérico em voo livre

### 8.4.1 Elipsóides de Poinot e do momento angular

Como dito anteriormente, as equações de Euler são muito difíceis de resolver no caso de um corpo rígido genérico mas isso não significa que não possamos obter informação do sistema. Relembrando (8.11), podemos reescrevê-la na forma da equação de um elipsóide

$$\frac{\omega_x^2}{2T/A} + \frac{\omega_y^2}{2T/B} + \frac{\omega_z^2}{2T/C} = 1, \quad (8.41)$$

de semi-eixos

$$\sqrt{2T/A}, \quad \sqrt{2T/B}, \quad \sqrt{2T/C}, \quad (8.42)$$

verificado pelo vector velocidade angular. Este elipsóide é conhecido por *elipsóide de Poinot* ou *elipsóide da energia cinética* e significa que a extremidade do vector velocidade angular está sempre sobre ele.

Por outro lado, realizando o produto interno de  $\vec{H}_C$  com a equação de Euler (8.13) com  $\sum M_C = 0$  resulta imediatamente que  $|\vec{H}_C| \equiv H = \text{cte}$ . Usando (8.8) no referencial principal de inércia,  $H^2 = A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2 + C^2\omega_z^2$ , ou seja,

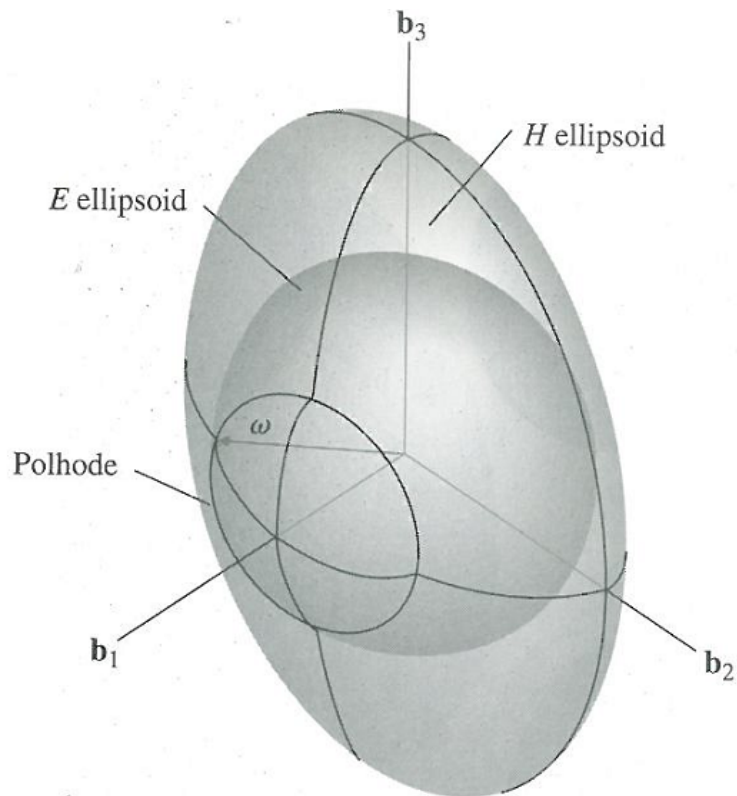
$$\frac{\omega_x^2}{(H/A)^2} + \frac{\omega_y^2}{(H/B)^2} + \frac{\omega_z^2}{(H/C)^2} = 1, \quad (8.43)$$

de semi-eixos

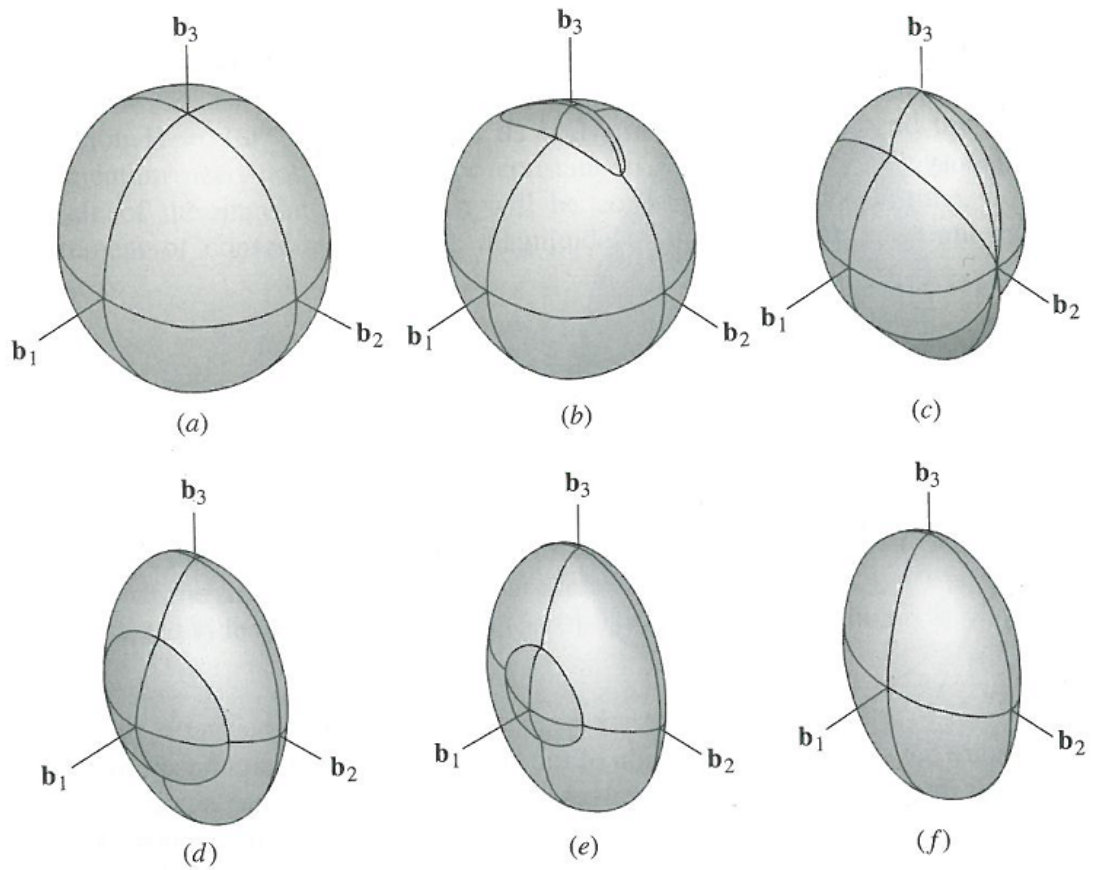
$$H/A, \quad H/B, \quad H/C, \quad (8.44)$$

conhecido por *elipsóide do momento angular*. A velocidade angular também tem que verificar este elipsóide logo a ponta do vector tem que estar sobre a intersecção dos dois elipsóides (Figura 8.8). Note-se que o referencial é o do corpo (neste caso geral não se pode usar um intermédio onde  $I_{ij}$  seja constante). O corpo roda de tal modo que a velocidade angular, que do ponto de vista do referencial que não roda também se move segue as linhas de intersecção dos dois elipsóides.

Dependendo do tamanho relativo dos elipsóides (Figura 8.9) assim a velocidade angular terá caminhos diferentes.



**Figura 8.8:** Intersecção dos elipsóides de Poinsot e do momento angular, que a velocidade angular tem que verificar [60].



**FIGURE 5.4**  
Polhodes for different kinetic energies.

**Figura 8.9:** Intersecção dos elipsóides de Poincaré e do momento angular em vários casos possíveis [60].



### 8.4.2 Casos limite da relação entre os elipsóides

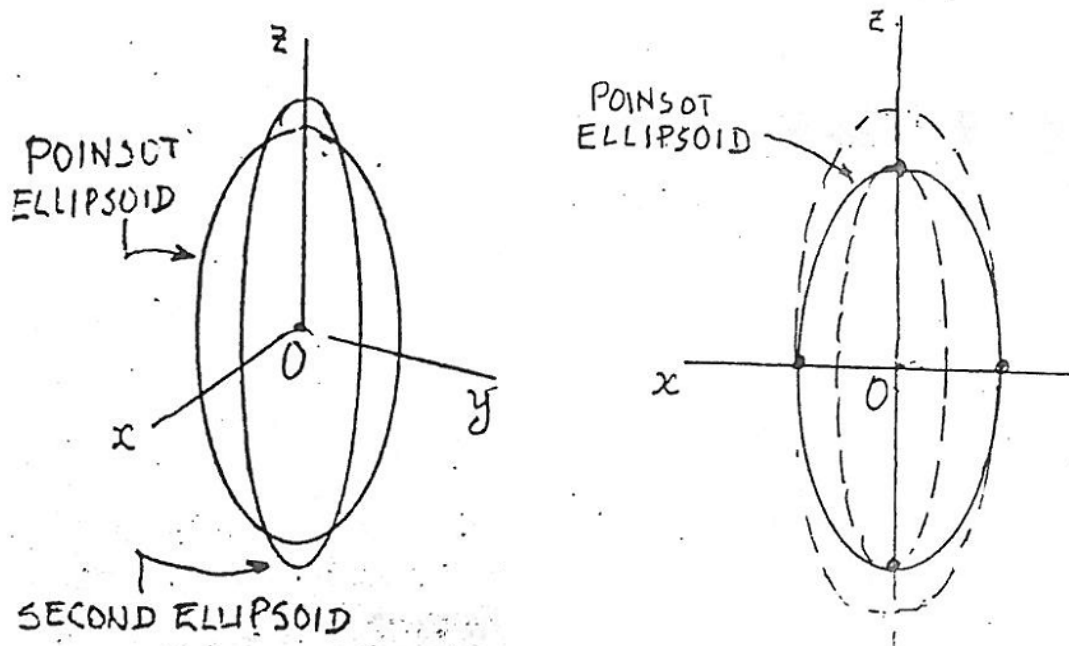
Supondo, sem perda de generalidade que

$$A < B < C, \quad (8.45)$$

as razões entre o maior semi-eixo e o menor semi-eixo dos elipsóides do momento angular e da energia cinética, respectivamente  $H/I_i$  e  $\sqrt{2T/I_i}$ , estão relacionadas por

$$\frac{H/A}{H/C} = \frac{C}{A} > \sqrt{\frac{C}{A}} = \frac{\sqrt{2T/A}}{\sqrt{2T/C}}, \quad (8.46)$$

pois  $C/A > 1$  por (8.45). Note que em ambos os casos o semi-eixo é máximo quando o respectivo momento de inércia é mínimo e vice-versa. O referencial é principal de inércia logo os eixos coordenados são eixos principais de inércia e os momentos são os principais de inércia. A relação (8.46) significa que o elipsóide do momento angular é sempre mais afilado ou, ao contrário, o de Poincot mais arredondado, independentemente do tamanho relativo (que só depende das constantes do movimento  $T$  e  $H$  determinadas pelas condições iniciais).



**Figura 8.10:** (a) Intersecção dos elipsóides e (b) casos limite [9]. O elipsóide da energia cinética (Poincot) é sempre mais arredondado e no limite o do momento angular poderá ficar completamente no seu exterior ou no seu interior.

Nos casos limite o elipsóide do momento angular estará completamente no exterior ou no interior do elipsóide de Poincot. No interior quando o ponto de intersecção for o

maior semi-eixo dos elipsóides, correspondente ao menor momento principal de inércia, e no exterior quando o ponto de intersecção for o menor semi-eixo, correspondente ao maior momento principal de inércia (ver Figura 8.10b).

Em geral, se a velocidade angular inicial de um corpo rígido livre não tiver a direcção de um eixo principal de inércia o movimento do corpo terá precessão, rotação própria e nutação. Mas como é fácil de obter das equações do movimento, se um corpo rígido livre estiver a rodar em torno de um eixo principal de inércia (i. e. só uma componente da velocidade angular no referencial principal de inércia), então ele manter-se-á a rodar em torno desse eixo pois a inércia de rotação está equilibrada por definição de eixo principal de inércia. É o que acontece nos dois casos limite de intersecção dos elipsóides, em que as curvas seguidas pela velocidade angular se reduzem a pontos (Figura 8.11, eixos  $\vec{b}_1$  e  $\vec{b}_3$ ), mas também no eixo principal intermédio  $\vec{b}_2$ .

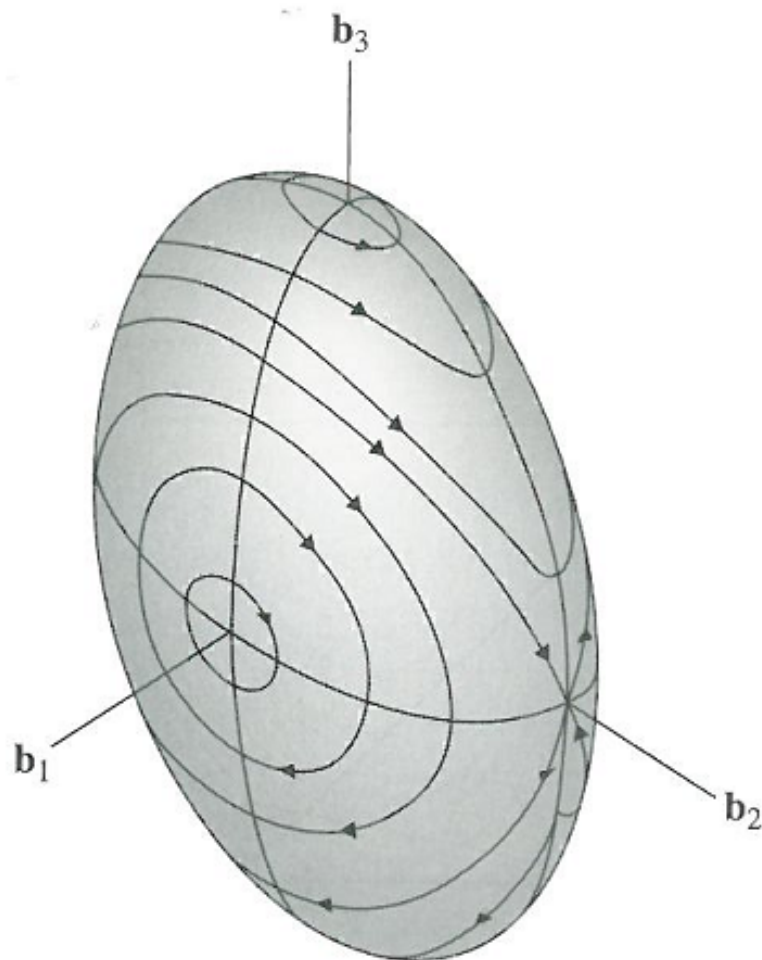
### 8.4.3 Estabilidade da rotação em torno de eixos principais de inércia

Apesar do descrito em § 8.4.2 a solução matemática exacta não é tudo pois na prática há sempre perturbações. É necessário avaliar a estabilidade do equilíbrio quando a velocidade angular  $\vec{\omega}$  quase tem a direcção de um eixo principal de inércia mas não exactamente. Como se vê pelas linhas que descrevem as trajectórias possíveis de  $\vec{\omega}$  nas imediações dos eixos na Figura 8.11, no caso do maior e menor semi-eixo, correspondente respectivamente ao menor e maior momentos principais de inércia, a trajectória circunda o ponto de equilíbrio, logo a rotação é estável, i. e., à parte uma pequena oscilação o corpo continua a rodar aproximadamente em torno do eixo principal de inércia. Diferente é a situação no eixo intermédio onde um pequeno desvio coloca  $\vec{\omega}$  numa trajectória que o afasta do eixo — na realidade é o eixo que se afasta da velocidade angular quando visto do referencial que não roda, levando o corpo a fazer *piruetas* invertendo a atitude deste. É fácil fazer uma experiência com um paralelepípedo, por exemplo uma caixa, em que os eixos principais são facilmente identificáveis. Quando se atira a caixa ao ar a rodar em torno das direcções normais às superfícies — os eixos principais de inércia — verifica-se que no caso do eixo intermédio ela volta às nossas mãos na posição invertida.

Em conclusão, há em princípio três eixos de equilíbrio mas só dois — o de maior e o de menor inércia — são estáveis.

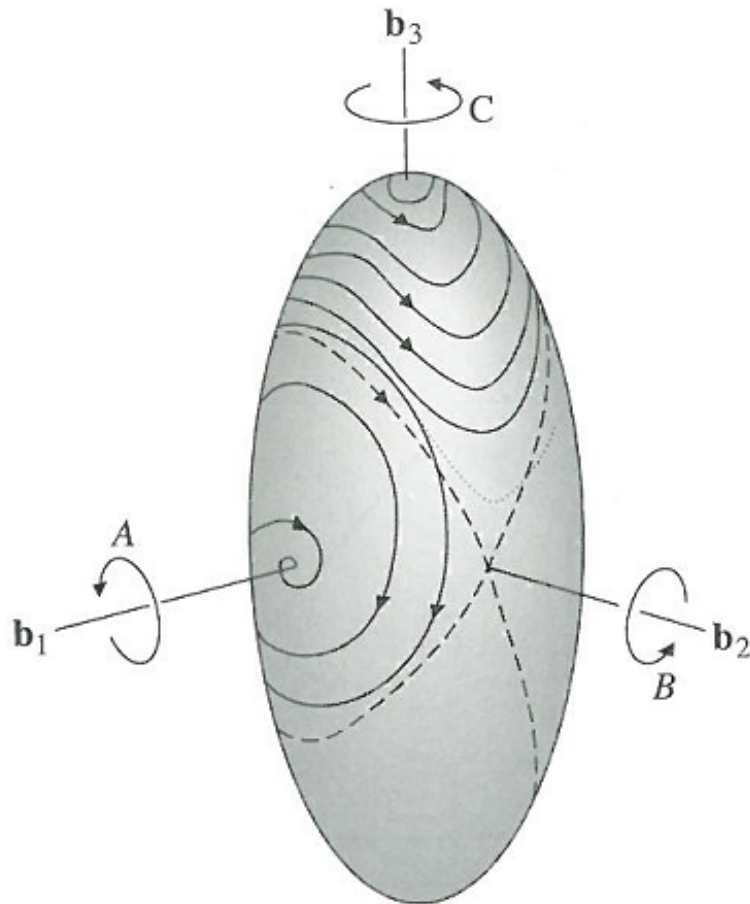
### 8.4.4 Caso com variação de energia cinética

Na realidade o conceito de corpo rígido é uma idealização abstracta: não há corpos completamente rígidos, apenas que em determinadas circunstâncias podem ser consideradas como tal. De muitos pontos de vista os satélites podem ser considerados rígidos na realidade muitos deles incluem elementos pouco rígidos, como por exemplo painéis solares ou antenas, que vibram com a rotação e acabam por provocar dissipação de energia cinética de rotação pois as vibrações nunca são completamente elásticas. O momento angular mantém-se constante já que as forças internas são pares acção/reacção. Isto significa que ao longo do tempo os semi-eixos do elipsóide de Poinot,  $\sqrt{2T/I_i}$ , diminuem ao longo do tempo, fazendo este diminuir de tamanho. A consequência é que este processo, i. e.



**Figura 8.11:** Se a velocidade angular tiver exactamente uma das direcções principais de inércia  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$  a linha descrita reduz-se a um ponto e há equilíbrio no sentido em que o eixo de rotação se mantém fixo no corpo e no espaço. Mas  $\vec{b}_2$  é instável pois um pequeno desvio faz a trajectória de  $\vec{\omega}$  (ou seja do corpo) ser muito diferente [60].

o estado de movimento, acaba sempre no caso limite em que o elipsóide de Poincaré se encontra completamente no interior do elipsóide do momento angular, sendo o ponto de contacto no menor semi-eixo, correspondente ao eixo de *maior* inércia, mesmo que originalmente o ponto de contacto fosse o eixo de menor inércia, supostamente estável. A velocidade angular acaba por passar por todos os estados intermédios entre o original e o final sendo que a sua trajectória pode ser observada na Figura 8.12 no caso e que se iniciou no outro extremo, agora já não estável, do eixo de menor inércia.



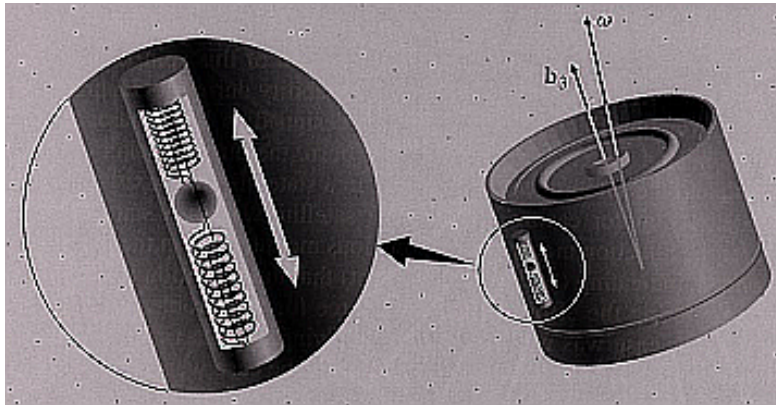
**Figura 8.12:** Caso de um corpo a rodar com dissipação de energia cinética. Inicialmente ele estava a rodar em torno do eixo  $\vec{b}_3$ , supostamente estável. Mas a diminuição do tamanho do elipsóide de Poincaré eliminou esta estabilidade e levou a velocidade angular a alinhar-se com o eixo de maior inércia, o único estável nesta situação [60].

Quando há dissipação de energia cinética, dos dois eixos originalmente estáveis apenas o de maior inércia o é verdadeiramente. No caso de satélites que são estabilizados por rotação, eles têm que ser desenhados de modo a que o eixo que é suposto ser o de rotação seja o de máxima inércia, caso contrário eles invariavelmente terminarão a rodar em

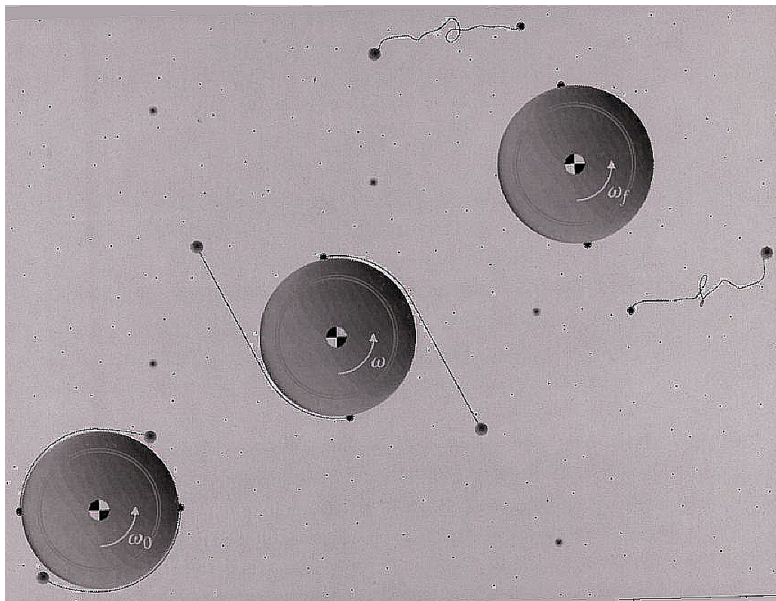
torno do eixo errado.

## 8.5 Exemplos de mecanismos de controlo de atitude

Neta fase, apenas as figuras mostradas nas aulas, para referência (cf. [60]).



**Figura 8.13:** Um mecanismo de amortecimento de nutação [60].



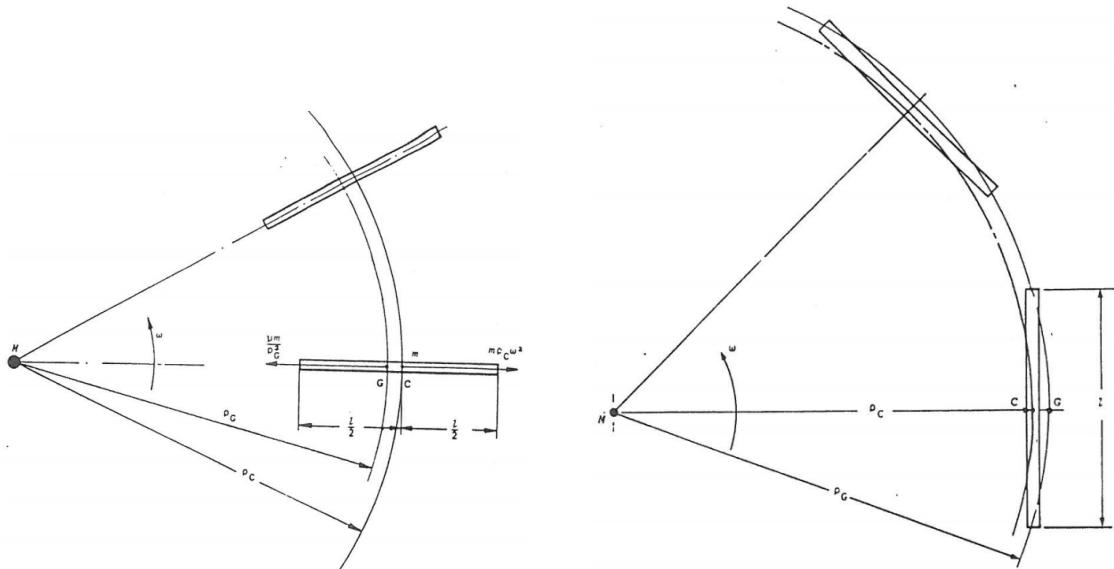
**Figura 8.14:** Um mecanismo de yo-yo para diminuir a rotação (despin) imposta para assegurar a estabilidade durante a manobra de injeção em órbita [60].

## 8.6 Gradiente de gravidade

Apenas considerações qualitativas e as figuras das aulas (ver [49] e [60] para mais informação):

- O centro de gravidade  $CG$  não coincide com o centro de massa  $C$ .
- Por definição o  $CG$  é o ponto onde deve ser colocada a resultante da força gravítica de modo a que o seu momento relativamente a  $C$  seja o mesmo da força gravítica distribuída original, que está aplicada em cada elemento de massa do corpo. Quando o campo gravítico é uniforme este momento é nulo, ou seja,  $CG$  coincide com  $C$  que é a aproximação usual à superfície da Terra.
- No entanto no espaço não há outras forças (por exemplo de reacção devido ao contacto com suportes que pode inibir o movimento) e o facto de o campo gravítico não ser exactamente uniforme acaba por ter um efeito visível na atitude dos satélites.

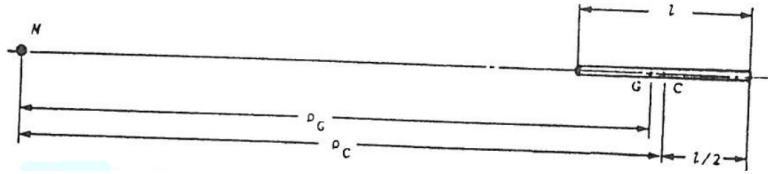
### 8.6.1 Satélite em forma de barra em órbita circular



**Figura 8.15:** Barras finas em co-rotação, nos dois casos extremos de atitudes longitudinal e transversal, respectivamente [49].

- Para fixar ideias pode-se estudar o caso simplificado de uma barra fina homogénea de comprimento  $l$  e massa  $m$  em órbita circular.
- Se a barra estiver em co-rotação i. e. rodar com velocidade angular igual à frequência de revolução orbital, a configuração relativamente ao planeta central (considerado

pontual — e isso é uma aproximação razoável!) é invariante e será mais fácil estudar o que acontece.



**Figura 8.16:** Barra homogênea em atitude longitudinal relativamente ao planeta central [49].

No caso da configuração longitudinal (Figura 8.16), demonstra-se que, se  $\vec{\rho}_C$  e  $\vec{\rho}_G$  forem as posições de centro de massa e do centro de gravidade relativamente á origem da força gravítica — o centro do planeta — então:

- O centro de gravidade está um pouco abaixo do centro de massa

$$\rho_G = \rho_C \sqrt{1 - \frac{\ell^2}{4\rho_C^2}} \quad (8.47)$$

- Qualquer desvio de atitude faz aparecer um momento da força gravítica relativamente a  $C$  que tende a restituir a posição original: a configuração é estável.
- Por causa da posição do centro de gravidade, o equilíbrio de forças para uma órbita circular escreve-se  $mn^2\rho_C = m\mu/\rho_G^2$ , onde  $n$  é a frequência de revolução, e usando (8.47), o período orbital é alterado de  $2\pi\sqrt{\rho_C^3/\mu}$  para

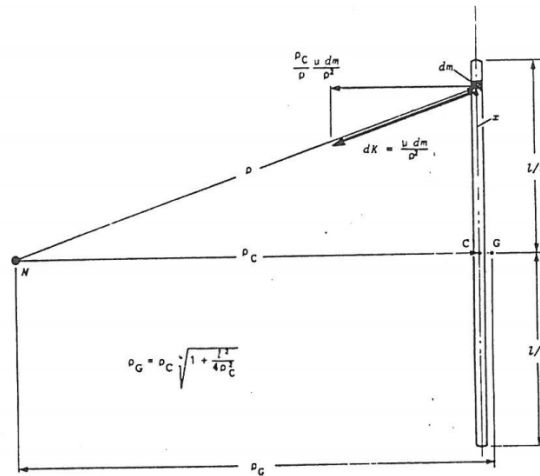
$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_C\rho_G^2}{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_C^3}{\mu}\frac{\rho_G}{\rho_C}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_C^3}{\mu}\sqrt{1 - \frac{\ell^2}{4\rho_C^2}}} \quad (8.48)$$

No caso da configuração transversal (Figura 8.17), então:

- Os cálculos ainda são fáceis de fazer porque as componentes na direcção da barra anulam-se.
- O centro de gravidade está agora acima do centro de massa

$$\rho_G = \rho_C \sqrt{1 + \frac{\ell^2}{4\rho_C^2}} \quad (8.49)$$

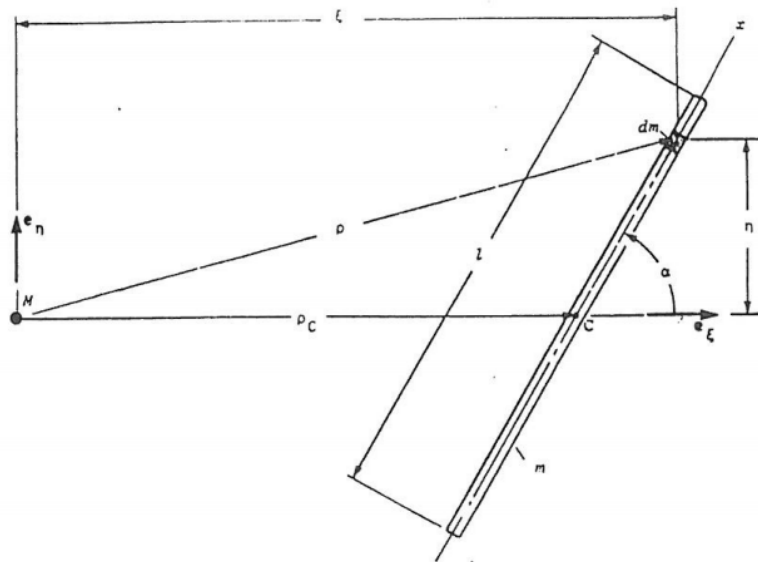
- Qualquer desvio de atitude faz aparecer um momento da força gravítica relativamente a  $C$  que tende a aumentar o desvio relativamente à posição original: a configuração é instável.



**Figura 8.17:** O mesmo que na Figura 8.16 mas com a barra em configuração transversal [49].

- O período orbital é agora alterado de  $2\pi\sqrt{\rho_C^3/\mu}$  para

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_C^3}{\mu}} \sqrt[4]{1 + \frac{l^2}{4\rho_C^2}} \tag{8.50}$$



**Figura 8.18:** No caso com ângulo arbitrário as equações começam a complicar [49].

No caso de atitude com ângulo arbitrário  $\alpha$  (Figura 8.18), se  $\vec{\rho}$  e  $\vec{\rho}_G$  têm componentes



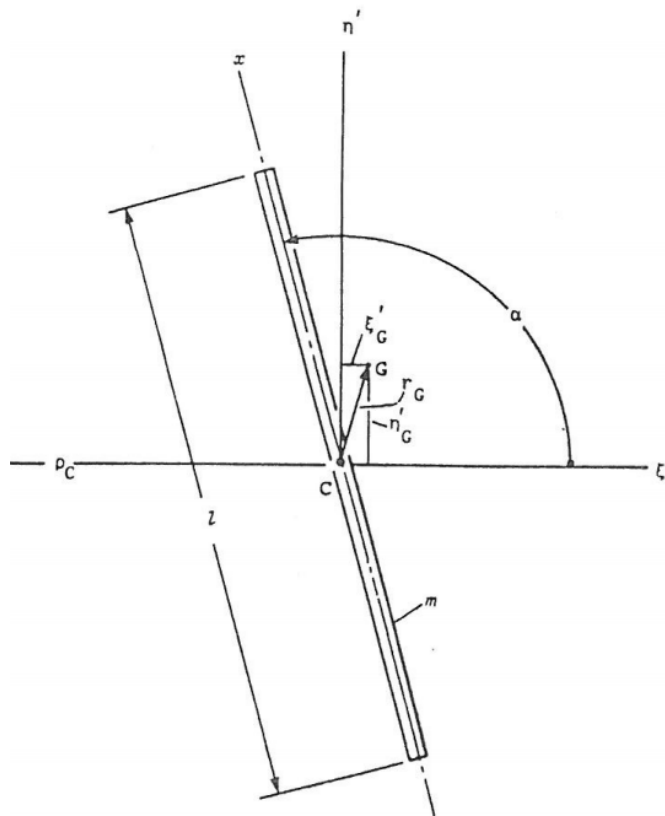
$$\vec{\rho} = \xi \vec{e}_\xi + \eta \vec{e}_\eta, \quad (8.51a)$$

$$\vec{\rho}_G = \xi_G \vec{e}_\xi + \eta_G \vec{e}_\eta, \quad (8.51b)$$

então

$$\frac{\xi_G}{\rho_G^3} = \frac{1}{2\rho_C^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\ell}{\rho_C} \cos \alpha + \frac{\ell^2}{4\rho_C^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\ell}{\rho_C} \cos \alpha + \frac{\ell^2}{4\rho_C^2}}} \right\}, \quad (8.52a)$$

$$\frac{\eta_G}{\rho_G^3} = -\frac{1}{\ell \rho_C \sin \alpha} \left\{ \frac{1 + \frac{\ell}{2\rho_C} \cos \alpha}{\sqrt{1 + \frac{\ell}{\rho_C} \cos \alpha + \frac{\ell^2}{4\rho_C^2}}} - \frac{1 - \frac{\ell}{2\rho_C} \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{\ell}{\rho_C} \cos \alpha + \frac{\ell^2}{4\rho_C^2}}} \right\}, \quad (8.52b)$$



**Figura 8.19:** Posição do centro de gravidade relativamente ao centro de massa [49].

### 8.6.2 Caso de satélites pequenos

No caso de satélites de forma arbitrária mas com dimensões pequenas face às distâncias ao astro central (ou seja, não se aplica a elevadores espaciais...) demonstra-se [60] que,

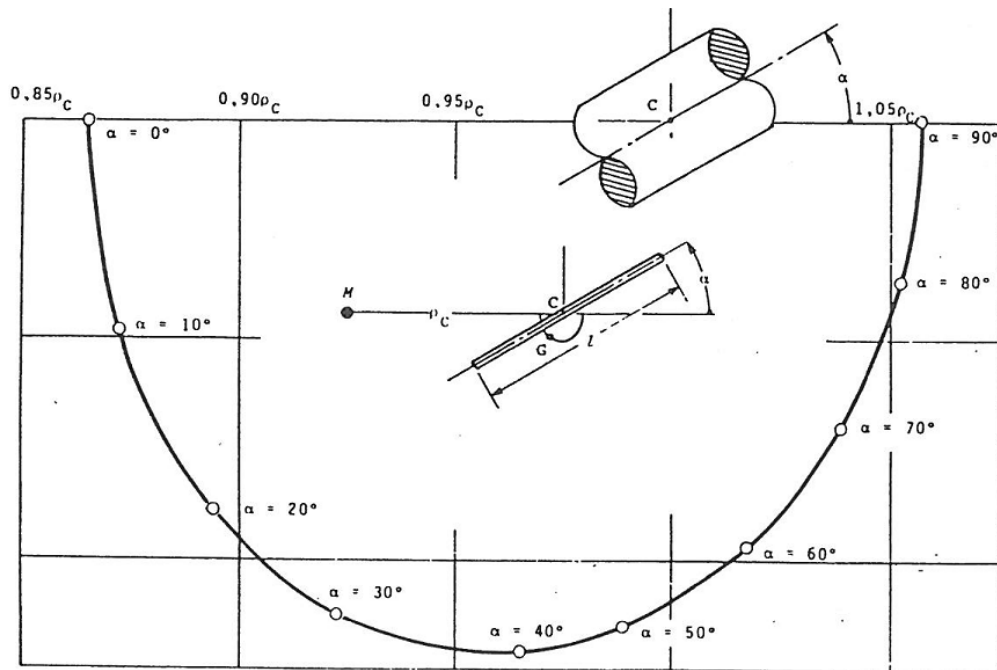


Figura 8.20: Localização do centro de massa em função do ângulo  $\alpha$  de atitude [49].

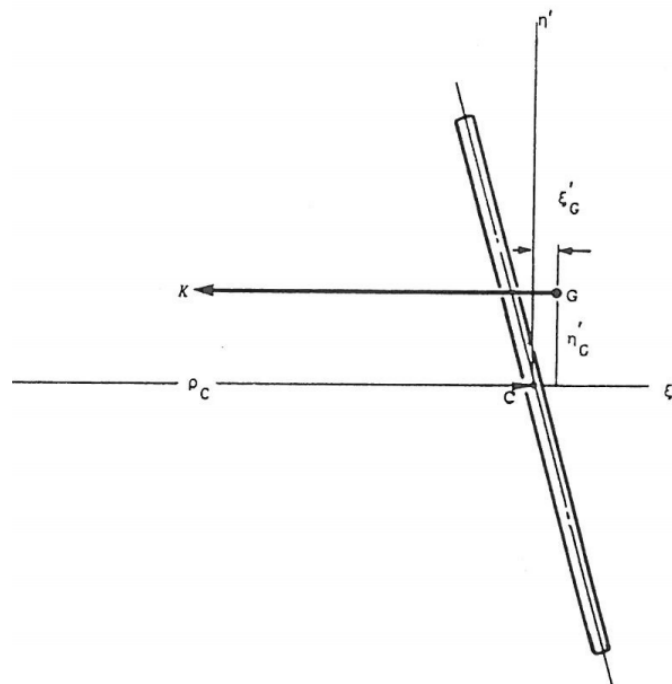


Figura 8.21: Resultante da força gravítica aplicada em  $G$  e fazendo rodar o satélite para a direcção longitudinal de equilíbrio estável [49].

se o satélite tiver eixo principal de inércia (EPI)  $x$  alinhado na direcção radial e EPI  $z$  normal ao plano,

- Haverá estabilidade se os momentos principais de inércia verificarem a relação

$$A < B < C. \quad (8.53)$$

- O período orbital é dado por

$$\tau = 2\pi \frac{\rho_C^3}{\mu} \left[ 1 + \frac{3}{4m\rho_C^2} (2A - B - C) \right]. \quad (8.54)$$



# Bibliografia

- [1] Abramowitz, Milton e Irene A. Stegun (editores): *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 1970.
- [2] Allen, W. H.: *Dictionary of Technical Terms for Aerospace Use*. NASA SP-7. NASA Special Publication, 7, 1965.
- [3] Anderson, Jr, John D.: *Fundamentals of Aerodynamics*. Aerospace Science Series. McGraw-Hill, 2ª edição, 1991.
- [4] Aris, Rutherford: *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. International Series in the Physical and Chemical Engineering Sciences. Prentice-Hall, 1962.
- [5] Asimov, Isaac: *The Relativity of Wrong: Essays on Science*. Doubleday, New York, 1988.
- [6] Bate, R. R., D. D. Mueller e J. E. White: *Fundamentals of Astrodynamics*. Dover, 1971.
- [7] Battin, Richard H.: *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics, Revised Edition*. AIAA Education Series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 1999.
- [8] Beer, F. P. e E. R. Johnston, Jr: *Mecânica Vectorial Para Engenheiros, Vol 1: Estática*. McGraw-Hill, 6ª edição, 1998.
- [9] Beer, F. P. e E. R. Johnston, Jr: *Mecânica Vectorial Para Engenheiros, Vol 2: Dinâmica*. McGraw-Hill, 6ª edição, 1998.
- [10] Bender, C. M. e S. A. Orszag: *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. International Student Edition. McGraw-Hill, 1978.
- [11] Bond, Victor R. e Mark C. Allman: *Modern Astrodynamics*. Princeton University Press, 1996.
- [12] Brown, Charles D.: *Spacecraft Mission Design*. AIAA Education Series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Reston, VA, 2ª edição, 1998.

- 
- [13] Brown, Charles D.: *Elements of Spacecraft Design*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Reston, VA, 2002.
- [14] Chebotarev, G. A.: *Analytical and Numerical Methods of Celestial Mechanics*. Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics, Vol. 9. Elsevier, 1967.
- [15] Chobotov, Vladimir A.: *Spacecraft Attitude Dynamics and Control*. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, U.S.A, 1991.
- [16] Curtis, Howard D.: *Orbital Mechanics For Engineering Students*. Butterworth-Heinemann, Amsterdam, 2ª edição, 2010, ISBN 9780123747785.
- [17] Danby, J. M. A., R. Kouzes e C. Whitney: *Astrophysics Simulations*. The Consortium for Upper-Level Physics Software. Wiley, 1995.
- [18] Dias Agudo, F. R.: *Lições de Análise Infinitesimal I. Cálculo Diferencial Em  $R^n$* . Livraria Escolar Editora, Lisboa, 1969.
- [19] Dias Agudo, F. R.: *Lições de Análise Infinitesimal II. Cálculo Integral Em  $R^n$* . Livraria Escolar Editora, Lisboa, 1973.
- [20] Dreyer, John L. E.: *A history of astronomy from Thales to Kepler*. Courier Corporation, 1953.
- [21] Dugas, René: *A history of mechanics*. Dover classics of science and mathematics. Dover Publications, 1988.
- [22] Emme, Eugene M.: *A History of Space Flight*. Holt Library of Science Series III. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1965.
- [23] Feynman, R. P., R. B. Leighton e M. Sands: *The Feynman Lectures on Physics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1963.
- [24] Fischer, I.: *Another Look at Eratosthenes' and Posidonius' Determinations of the Earth's Circumference*. Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society, 16:152, junho 1975.
- [25] Goldstein, Bernard R.: *Eratosthenes on the "Measurement" of the Earth*. Historia Mathematica, 11(4):411.
- [26] Goldstein, H.: *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1980.
- [27] Gradshteyn, I. S. e I. M. Ryzhik: *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, 1980.
- [28] Griffin, M. D. e J. R. French: *Space Vehicle Design*. AIAA Education Series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 1991.

- [29] Gurzadyan, G. A.: *Theory of interplanetary flights*. Theory of interplanetary flights, Publisher: Amsterdam: Gordon and Breach, 1996, ISBN: 2884490744, 1996.
- [30] Hale, Francis: *Introduction to Space Flight*. Prentice-Hall, 1994.
- [31] Jackson, John David: *Classical Electrodynamics*. Wiley, N. Y., 2ª edição, 1975.
- [32] Kuipers, J. B.: *Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace and Virtual Reality*. Princeton University Press, 1999.
- [33] Landau, L. D. e E. M. Lifshitz: *The classical theory of fields*. Course of Theoretical Physics. Pergamon, 4ª edição, 1975.
- [34] Larson, Wiley J. e James Richard Wertz: *Space mission analysis and design*. 3ª edição, 1992.
- [35] Lawden, D. F.: *Optimal Trajectories for Space Navigation*. Butterworths, London, 1963.
- [36] Logsdon, T.: *Orbital Mechanics: Theory and Applications*. Wiley-Interscience, 1998.
- [37] McCormick, Barnes W.: *Aerodynamics, Aeronautics and Flight Mechanics*. Wiley, 2ª edição, 1995.
- [38] Meriam, J. L. e L. J. Kraige: *Engineering Mechanics, Vol. 1: Statics*. Wiley, 4ª edição, 1998.
- [39] Meriam, J. L. e L. J. Kraige: *Engineering Mechanics, Vol. 2: Dynamics*. Wiley, 4ª edição, 1998.
- [40] Montenbruck, O. e E. Gill: *Satellite Orbits: Models, Methods, and Applications*. Springer, 2000.
- [41] Moon, Perry e Domina Eberle Spencer: *Field Theory Handbook*. Springer-Verlag, 1961.
- [42] Murray, Carl D. e Stanley F. Dermott: *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- [43] Musielak, Z. E. e B. Quarles: *The three-body problem*. Reports on Progress in Physics, 77(6):065901, 2014. <http://stacks.iop.org/0034-4885/77/i=6/a=065901>.
- [44] Pannekoek, A.: *A History of Astronomy*. Dover Publications, 1989.
- [45] Pedersen, Olaf e Mogens Pihl: *Early Physics and Astronomy: A Historical Introduction*. Neale Watson Academic Publications, Inc., New York.
- [46] Pólia, George: *Mathematical methods in science*. New Mathematical Library. The Mathematical Association of America, 1977.

- [47] Press, W. H., B. P. Flannery e S. A. Teukolsky: *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge Univ. Press, 1986.
- [48] Prussing, John E. e Bruce A. Conway: *Orbital Mechanics*. Oxford U. P., 1993.
- [49] Rimrott, F. P. J.: *Introductory Attitude Dynamics*. Springer, 1989.
- [50] Schaub, Hanspeter e John L. Junkins: *Analytical mechanics of space systems*. AIAA, 2003.
- [51] Smart, W. M.: *Celestial Mechanics*. Longmans, 1953.
- [52] Sokolnikoff, I. S.: *Tensor Analysis*. Wiley, 1964.
- [53] Spiegel, M. R.: *Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis*. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill, 1959.
- [54] Sutton, Richard M.: *The Physics of Space*. Holt Library of Science Series III. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1965.
- [55] Szebehely, Victor: *Theory of Orbits : The Restricted Problem of Three Bodies*. Academic Press, 1967.
- [56] Szebehely, Victor G.: *Adventures in Celestial Mechanics : A First Course in the Theory of Orbits*. University of Texas Press, 1989.
- [57] Taff, L. G.: *Celestial Mechanics: A Computational Guide for the Practitioner*. Wiley-Interscience, 1985.
- [58] Thomson, William Tyrrell: *Introduction to Space Dynamics*. Dover, 1986.
- [59] Watson, G. N.: *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge Univ. Press, 2ª edição, 1944.
- [60] Wiesel, William E.: *Spaceflight Dynamics*. McGraw-Hill, 2ª edição, 1997.
- [61] Williamson, Mark: *Spacecraft technology: the early years*. History of Technology Series.
- [62] Wolfram, S.: *The Mathematica book*. Cambridge Univ. Press, 3ª edição, 1996.
- [63] Zwillinger, Daniel: *Handbook of Differential Equations*. Academic Press, London, 2ª edição, 1989.
- [64] Zwillinger, Daniel: *Handbook of Differential Equations*. Academic Press, 3ª edição, 1998.