Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

2° teste

Nome:_____
Número:_____ Curso:_____

Prob.	A	B	C	D	Classificação
1.			X		
2.	X				
3.	X				
4.			X		

5.	
6.	
Nota Final	

- A prova que vai realizar tem a duração de 45 minutos.
- **Desligue completamente o seu telemóvel.**
- As perguntas de escolha múltipla devem ser respondidas no quadro acima, assinalando uma única resposta. As cotações de cada pergunta de escolha múltipla são:

  Certa: **0.6 val.** Errada: - **0.1val.** Branco: **0.0 val.**

- As perguntas que não são de escolha múltipla devem ser respondidas neste caderno de folhas nos espaço em branco após o enunciado da respectiva pergunta.
- Se precisar de folhas de rascunho, as última páginas deste caderno podem ser usadas para esse efeito.

1. Considere as matrizes **[0.6]**

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 & 30 \\ 5 & 3 & 6 & -4 \\ 5 & 3 & 7 & 20 \\ 5 & 3 & 7 & 12 \end{bmatrix} \qquad B = -\frac{1}{2}A$$

A afirmação verdadeira é:

A) $\det A = 128$ e $\det B = -64$

B) $\det A = 160$ e $\det B = -80$

C) $\det A = 160$ e $\det B = 10$

D) $\det A = 128$ e $\det B = 8$

---

2. Indique qual dos conjuntos seguintes é um subespaço linear de $\mathbb{R}^4$ de dimensão igual a 2. **[0.6]**

A) $V = \mathcal{L}\{(1,1,0,0),(0,0,1,0),(1,1,-1,0)\}$

B) $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : z + 2w = 0 \wedge y - x = 1 \wedge x = 0\}$

C) $S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y - x + z + 2w = 0\}$

D) $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y = x = z = w\}$

---

3. Seja $B = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ tal que **[0.6]**

$$\boldsymbol{e}_1 = (0,1,0) \qquad \boldsymbol{e}_2 = (1,2,1) \qquad \boldsymbol{e}_3 = (-1,0,0)\ .$$

Considere as afirmações seguintes:

I) O vector $\boldsymbol{v}_B = (0,2,1)$ é o vector das coordenadas de $\boldsymbol{v} = (1,4,2)$ na base B

II) O vector das coordenadas de $\boldsymbol{e}_3$ na base B é $(\boldsymbol{e}_3)_B = (0,0,1)$

III) O vector das coordenadas de $\boldsymbol{w} = (2,0,0)$ na base B é $\boldsymbol{w}_B = (0,0,-2)$

IV) O vector das coordenadas de $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ na base B é $\boldsymbol{u}_B = (0,3,1)$

A lista completa das afirmações correctas é:
A) I e II e III B) II e III C) II e IV D) I e IV

---

4. Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ e as afirmações seguintes: **[0.6]**

I) Os vectores $(\pi, 1, 0), (1, \frac{1}{5}, 3), (-3, 1, 1)$ e $(0, 32, 2)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$

II) Os vectores $(2, 4, 1)$ e $(3, 4, 3)$ são linearmente independentes

III) Os vectores $(1, 2, 0), (6, 12, 0)$ e $(1, 1, 1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$

IV) O vector $(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ é combinação linear dos vectores $(1, 1, 1)$ e $(0, 2, 0)$

A lista completa das afirmações correctas é:
A) I e II B) I e III C) II e IV D) II e III e IV

Apresente os cálculos nas questões seguintes

5. Considere a matriz **[1.5]**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

e suponha que $\boldsymbol{x}_1 = (-3, -2, 2, -1)$ é uma solução particular do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$. Complete de modo a obter afirmações verdadeiras

a) A dimensão do núcleo $N(A)$ da matriz A é _____ (solução: 2) e uma base de $N(A)$ é **[0.5]**
Solução: $\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$

b) Equações cartesianas para o espaço das colunas $C(A)$ da matriz A são **[0.5]**
Solução: $-x - y + z = 0$

c) A solução geral do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é **[0.3]**
Solução: A solução geral é o conjunto dos elementos $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ da forma

$$(x, y, z, w) = (-3, -2, 2, -1) + t(-1, 1, 0, 0) + s(0, 0, 1, 1)\},$$

com $t, s \in \mathbb{R}$.

d) A natureza do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (refira o grau de indeterminação, se aplicável) é **[0.2]**
Solução: sistema possível e indeterminado com grau de interminação 2.

Apresente os cálculos nas questões seguintes

6. Sejam B_1 e $B_2 = \big((1, -1, 0), (1, 2, 0), (0, 0, 1)\big)$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ tais que a matriz de mudança de base de B_1 para B_2 é **[1.1]**

$$M_{B_2 \leftarrow B_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Se $\boldsymbol{x}_{B_1} = (2, 1, -1)$ é o vector das coordenadas na base B_1 do vector $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^3$, então **[0.5]**

$$\boldsymbol{x} = \qquad \text{Solução:}(-1, 7, 1)$$

b) A matriz $M_{B_1 \leftarrow B_2}$ de mudança de base de B_2 para B_1 é **[0.6]**
Solução:

$$M_{B_1 \leftarrow B_2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$