Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

1° teste

Nome:_____
Número:_____ Curso:_____

Prob.	A	B	C	D	Classificação
1.		X			
2.				X	
3.			X		
4.		X			

5.	
6.	
Nota Final	

- A prova que vai realizar tem a duração de 45 minutos.
- **Desligue completamente o seu telemóvel.**
- As perguntas de escolha múltipla devem ser respondidas no quadro acima, assinalando uma única resposta. As cotações de cada pergunta de escolha múltipla são:

  Certa: **0.6 val.** Errada: - **0.1val.** Branco: **0.0 val.**

- As perguntas que não são de escolha múltipla devem ser respondidas neste caderno de folhas nos espaço em branco após o enunciado da respectiva pergunta.
- Se precisar de folha de rascunho, a última página deste caderno pode ser usada para esse efeito.

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$. **[0.6]**

A solução do sistema $AB\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é:

A) $(1, 7)$ B) $(1, -7)$ C) $(7, 1)$ D) $(-1, 7)$

---

2. Considere matrizes A, B, C e D tais que: **[0.6]**

$$A \text{ é uma matriz } 1 \times 3 \qquad B \text{ é uma matriz } 3 \times 1$$
$$C \text{ é uma matriz } 1 \times 3 \qquad D \text{ é uma matriz } 3 \times 3$$

A afirmação correta é:

A) O tipo da matriz $(A + C)A$ é 1×3.
B) O traço da matriz A pode ser nulo.
C) $(5CB)^T = 5C^T B^T$.
D) $D(CBA + C)^T$ é 3×1.

---

3. Sejam A e R matrizes tais que **[0.6]**

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad R = E_{21}(-1)P_{23}D_1\left(\frac{1}{2}\right)A.$$

A afirmação correta é:

A) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

B) A matriz R é a forma canónica de escada de linhas da matriz A.

C) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

D) Os sistemas $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ têm graus de indeterminação diferentes.

---

4. Sejam A, B e C matrizes 3×3 tais que $A^2 = 0$ e as matrizes B e C são invertíveis. **[0.6]**
Considere as afirmações seguintes:

I. A característica da matriz $B + C$ tem que ser 3
II. $A + B$ pode ser uma matriz invertível.
III. A matriz ABC não pode ser a matriz identidade.
IV. A matriz A tem que ser a matriz nula.

A lista <u>completa</u> das afirmações correctas é:

A) II e IV B) II e III C) I, II e III D) III e IV

---

5. Considere a seguinte matriz dependente do parâmetro real α

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ -\alpha & -\alpha & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 2\alpha^2 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Suponha ainda que A_α é a matriz **<u>aumentada</u>** de um sistema de equações lineares.

Complete, indicando todos os valores possíveis, de modo a obter afirmações verdadeiras.

a) $\mathrm{car}(A_\alpha) = 3$ para _____ (Solução: $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -1$) **[0.2]**

b) $\mathrm{car}(A_\alpha) = 2$ para _____ (Solução: $\alpha = -1$) **[0.2]**

c) $\mathrm{car}(A_\alpha) = 1$ para _____ (Solução: $\alpha = 0$) **[0.2]**

d) O sistema é impossível para _____ (Solução: $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -1$) **[0.2]**

e) O sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação 2 quando **[0.2]**
α _____ (Solução: $\alpha = 0$)

f) O sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação 1 quando **[0.6]**
α _____(Solução: $\alpha = -1$) e a solução geral é:
(Solução: $\{(-y+1, y, -\frac{1}{2}) : y \in \mathbb{R}\}$)

---

6. Determine a matriz $A = [a_{ij}]_{\ i,j\,=\,1,2,3,4}$ <u>anti-simétrica</u> que satisfaz: **[1]**

$$a_{ij} = i + j - 2 \qquad \text{se} \quad i < j$$

Solução:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 0 & 5 \\ -3 & -4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$