DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Probabilidades e Estatística

TODOS OS CURSOS

2º semestre – 2018/2019
05/07/2019 – **11:30**

Duração: 90 minutos **1º Teste C**

Justifique convenientemente todas as respostas

Grupo I 10 valores

1. Um banco divide os seus clientes em três classes de risco de incumprimento ao contrair um empréstimo bancário: A, B e C. De acordo com registos recentes desse banco, 20%, 50% e 30% dos clientes pertencem às classes A, B e C, respetivamente. Para além disso, as probabilidades de incumprimento ao contrair um empréstimo bancário entre os clientes pertencentes às classes A, B e C são iguais a 0.05, 0.15 e 0.3, respetivamente.

(a) Calcule a probabilidade de um cliente escolhido ao acaso incumprir ao contrair um empréstimo bancário. (2.5)

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	Probabilidade
$A=\{$cliente na classe $A\}$	$P(A)=0.2$
$B=\{$cliente na classe $B\}$	$P(B)=0.5$
$C=\{$cliente na classe $C\}$	$P(C)=0.3$
$I=\{$incumprimento do cliente ao contrair um empréstimo bancário$\}$	$P(I)=?$
	$P(I \mid A)=0.05$
	$P(I \mid B)=0.15$
	$P(I \mid C)=0.3$

- **Probabilidade pedida**
  Recorrendo à lei da probabilidade total, tem-se

$$\begin{aligned} P(I) &= P(I \mid A)\times P(A)+P(I \mid B)\times P(B)+P(I \mid C)\times P(C) \\ &= 0.05\times 0.2+0.15\times 0.5+0.3\times 0.3 \\ &= 0.175. \end{aligned}$$

(b) Qual é a probabilidade de um cliente selecionado aleatoriamente pertencer à classe A, sabendo que incumpriu ao contrair um empréstimo bancário? (2.5)

- **Prob. pedida**
  Tirando partido do teorema de Bayes, segue-se

$$\begin{aligned} P(A \mid I) &= \frac{P(I \mid A)\times P(A)}{P(I)} \\ &\overset{(a)}{=} \frac{0.05\times 0.2}{0.175} \\ &\simeq 0.057143. \end{aligned}$$

2. O plano de amostragem envolvendo lotes de 50 componentes eletrónicas pressupõe a seleção, ao acaso e sem reposição, de 5 componentes do lote para inspeção. O lote é aceite se se constatar que nenhuma das 5 componentes inspecionadas é defeituosa.

(a) Qual é a probabilidade de um lote com 3 componentes eletrónicas defeituosas vir a ser rejeitado? (3.0)

- **Variável aleatória de interesse**
  X = no. de componentes defeituosas entre as 5 selecionadas, ao acaso e SEM reposição, de um lote contendo 3 componentes defeituosas

- **Distribuição de X**
  $X \sim \text{Hipergeométrica}(N, M, n)$
  com:
  $N = 3 + 47 = 50$ (componentes no lote);
  $M = 3$ (componentes defeituosas existentes no lote);
  $n = 5$ (componentes selecionadas ao acaso e SEM reposição).

- **F.p. de X**

$$P(X = x) \stackrel{form.}{=} \begin{cases} \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & x = \max\{0, n-(N-M)\}, \ldots, \min\{n, M\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\binom{3}{x}\binom{50-3}{5-x}}{\binom{50}{5}}, & x = 0, 1, 2, 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{50-3}{5-0}}{\binom{50}{5}} \\ &= 1 - \frac{\frac{3!}{0!\,(3-0)!} \times \frac{47!}{5!\,(47-5)!}}{\frac{50!}{5!\,(50-5)!}} \\ &= 1 - \frac{47 \times 46 \times 45 \times 44 \times 43}{50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46} \\ &= 1 - \frac{1533939}{2118760} \\ &= 1 - \frac{1419}{1960} \\ &\simeq 0.276020. \end{aligned}$$

(b) Obtenha o valor esperado, a variância e o primeiro quartil do número de componentes eletrónicas defeituosas entre as 5 componentes inspecionadas de um lote com 3 componentes defeituosas. (2.0)

- **Valor esperado e variância de X**

$$\begin{aligned} E(X) &\stackrel{form}{=} n\,\frac{M}{N} \\ &= 5 \times \frac{3}{50} \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &\stackrel{form}{=} n\,\frac{M}{N}\,\frac{N-M}{N}\,\frac{N-n}{N-1} \\ &= 5 \times \frac{3}{50}\,\frac{50-3}{50}\,\frac{50-5}{50-1} \\ &= \frac{1269}{4900} \\ &\simeq 0.258979. \end{aligned}$$

- **1o. quartil de X**
  Represente-se o 1º quartil de X por ξ. Então

$$\xi \quad : \quad 0.25 \leq F_X(\xi) \leq 0.25 + P(X = \xi) \qquad (1)$$

$$0.25 \leq F_X(\xi) \leq 0.25 + [F_X(\xi) - F_X(\xi^-)]$$

$$F_X(\xi^-) \leq 0.25 \leq F_X(\xi). \qquad (2)$$

  Tirando partido da definição de 1º quartil em (2) e do resultado de (a), concluímos que

$$0 = F_X(-1) = F_X(0^-) \leq 0.25 \leq F_X(0) = P(X = 0) \stackrel{(a)}{=} \frac{1419}{1960} \simeq 0.723980$$

  e que $\xi = 0$. [A prova da sua unicidade é deixada como exercício.]

[Em alternativa, note-se que

$$0.25 \leq F_X(0) \stackrel{(a)}{=} 0.723980 \leq 0.25 + P(X=0) = 0.25 + F_X(0).$$

Logo o resultado (1) leva-nos a concluir que $\xi = 0$; a prova da sua unicidade é deixada como exercício.]

Grupo II	10 valores

1. Considere que a variável aleatória X representa a duração das válvulas usadas em determinado radiorrecetor e admita que X possui distribuição exponencial de valor esperado 10 dias.

(a) Calcule a probabilidade de a duração de uma válvula escolhida ao acaso ser superior a 25 dias, sabendo que esta válvula está em funcionamento há 15 dias. (2.0)

- **V.a. de interesse**
  X = duração de uma válvula
- **Distribuição de** X
  $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$
- **Parâmetro**

$$\begin{aligned} \lambda > 0 \quad : \quad & E(X) = 10 \\ & \frac{1}{\lambda} = 10 \\ & \lambda = 0.1 \end{aligned}$$

- **Prob. pedida**
  Tendo em conta que a f.d. de X é dada por

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-0.1x}, & x \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

pode concluir-se que

$$\begin{aligned} P(X > 25 \mid X > 15) &= \frac{P(X > 25, X > 15)}{P(X > 15)} \\ &= \frac{P(X > 25)}{P(X > 15)} \\ &= \frac{1 - F_X(25)}{1 - F_X(15)} \\ &= \frac{1 - \left(1 - e^{-0.1 \times 25}\right)}{1 - \left(1 - e^{-0.1 \times 15}\right)} \\ &= e^{-0.1 \times 10} \\ &\simeq 0.367879. \end{aligned}$$

[Em alternativa, pode invocar-se a propriedade de falta de memória da distribuição Exponencial e concluir que

$$\begin{aligned} P(X > 15 + 10 \mid X > 15) &= P(X > 10) \\ &= 1 - F_X(10) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-0.1 \times 10}\right) \\ &= e^{-1} \\ &\simeq 0.367879.] \end{aligned}$$

(b) Assumindo que as durações de diferentes válvulas são variáveis aleatórias independentes, calcule um valor aproximado da probabilidade de a soma das durações de 40 dessas válvulas ultrapassar 450 dias. (3.0)

- **V.a.**
  $X_i =$ duração da válvula i, $\quad i = 1, \ldots, n$
  $n = 40$

- **Distribuição, valor esperado e variância comuns**
  $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X \sim \text{Exponencial}(0.1), \quad i = 1, \ldots, n$
  $E(X_i) = E(X) = \mu = \frac{1}{0.1} = 10, \quad i = 1, \ldots, n$
  $V(X_i) = V(X) = \sigma^2 = \frac{1}{0.1^2} = 100, \quad i = 1, \ldots, n$

- **V.a. de interesse**
  $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i =$ soma das durações de n válvulas

- **Valor esperado e variância de S_n**
  $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} nE(X) = n\mu$
  $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{X_i\, indep.}{=} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} nV(X) = n\sigma^2$

- **Distribuição aproximada de S_n**
  Pelo teorema do limite central (TLC) pode escrever-se

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \overset{a}{\sim} \text{Normal}(0,1).$$

- **Valor aproximado da probabilidade pedida**

$$\begin{aligned}
P(S_n > 450) &= 1 - P(S_n \leq 450) \\
&= 1 - P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq \frac{450 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \\
&\overset{TLC}{\simeq} 1 - \Phi\left(\frac{450 - 40 \times 10}{\sqrt{40 \times 100}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{450 - 400}{\sqrt{4000}}\right) \\
&\simeq 1 - \Phi(0.79) \\
&\overset{tabela/calc}{=} 1 - 0.7852 \\
&= 0.2148
\end{aligned}$$

2. Numa execução de um jogo para *smartphone*, o utilizador escolhe ao acaso uma de três opções e a aplicação do *smartphone* responde escolhendo ao acaso uma de outras três opções. Admita que X e Y representam as opções do utilizador e da aplicação (respetivamente) e que o par aleatório (X, Y) possui função de probabilidade conjunta na tabela abaixo.

	Y		
X	0	1	2
-1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$

(a) Averigúe se X e Y são variáveis aleatórias dependentes. (1.0)

- **Par aleatório** (X, Y)
  $X =$ opção do utilizador
  $Y =$ opção da aplicação

- **F.p. conjunta e f.p. marginais**
  $P(X = x, Y = y)$, $P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$ e $P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y)$ encontram-se sumariadas na tabela seguinte:

	Y			
X	0	1	2	$P(X = x)$
-1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$P(Y = y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

- **Dependência entre X e Y**
  X e Y são v.a. DEPENDENTES sse

$$P(X = x, Y = y) \neq P(X = x) \times P(Y = y), \quad \text{para algum } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ora, por um lado

$$P(X = -1, Y = 0) = \frac{1}{18},$$

por outro lado

$$\begin{aligned} P(X = -1) \times P(Y = 0) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Deste modo conclui-se que

$$P(X = -1, Y = 0) \neq P(X = -1) \times P(Y = 0),$$

pelo que X e Y são v.a. DEPENDENTES.

(b) Obtenha a função de probabilidade da variável aleatória $Z = XY$, que representa a pontuação obtida numa execução do jogo. (2.0)

- **V.a. de interesse**
  $Z = XY$

- **F.p. pedida**

$$P(Z = z) = \begin{cases} P(X = -1, Y = 2) = \frac{1}{9}, & z = -2 \\ P(X = -1, Y = 1) = \frac{1}{6}, & z = -1 \\ P(X = 0 \text{ ou } Y = 0) & \\ \quad = P(X = 0) + P(Y = 0) - P(X = 0, Y = 0) & \\ \quad = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}, & z = 0 \\ P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{9}, & z = 1 \\ P(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{6}, & z = 2 \\ 0, & \text{outros valores de } z \end{cases}$$

(c) Calcule $E(Z \mid X = 1)$. (2.0)

- **F.p. de $Z \mid X = 1$**

$$\begin{aligned} P(Z = z \mid X = 1) &= \frac{P(XY = z, X = 1)}{P(X = 1)} \\ &= \frac{P(1 \times Y = z, X = 1)}{P(X = 1)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(Z=z \mid X=1) &= \frac{P(X=1, Y=z)}{P(X=1)} \\
&= \begin{cases} \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}, & z=0 \\ \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}, & z=1 \\ \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}, & z=2 \\ 0, & \text{restantes valores de } z \end{cases}
\end{aligned}
$$

- **Valor esperado pedido**

$$
\begin{aligned}
E(Z \mid X=1) &= \sum_{z=0}^{2} z \times P(Z=z \mid X=1) \\
&= 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$