Probabilidades e Estatística

LEGM, LEIC-A, LEIC-T, MA, MEMec

2º semestre – 2018/2019
04/05/2019 – **9:00**

Duração: 90 minutos **1º Teste A**

Justifique convenientemente todas as respostas

Grupo I	10 valores

1. As amostras de *betão pronto* produzidas por uma cimenteira são sujeitas a três testes (A, B e C) cujos resultados são mutuamente independentes. Suponha que a probabilidade de se obter um resultado positivo é igual a 0.4, 0.8 e 0.7, para os testes A, B e C (respetivamente).

(a) Determine a probabilidade de pelo menos um dos três testes conduzir a um resultado positivo. (3.0)

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	**Probabilidade**
$A = \{\text{teste A positivo}\}$	$P(A) = 0.4$
$B = \{\text{teste B positivo}\}$	$P(B) = 0.8$
$C = \{\text{teste C positivo}\}$	$P(C) = 0.7$

- **Probabilidade pedida**

Uma vez que os eventos A, B e C são mutuamente independentes, tem-se

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \times P(B) \\ P(A \cap C) &= P(A) \times P(C) \\ P(B \cap C) &= P(B) \times P(C) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A) \times P(B) \times P(C). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A) \times P(B) - P(A) \times P(C) - P(B) \times P(C) \\ &\quad + P(A) \times P(B) \times P(C) \\ &= 0.4 + 0.8 + 0.7 - 0.4 \times 0.8 - 0.4 \times 0.7 - 0.8 \times 0.7 + 0.4 \times 0.8 \times 0.7 \\ &= 0.964. \end{aligned}$$

(b) Calcule a probabilidade de se obter resultado positivo no teste A sabendo que o resultado foi positivo no teste B ou no teste C. (2.0)

- **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned} P[A \mid (B \cup C)] &= \frac{P[A \cap (B \cup C)]}{P(B \cup C)} \\ &= \frac{P[(A \cap B) \cup (A \cap C)]}{P(B) + P(C) - P(B \cap C)} \\ &= \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[(A \cap B) \cap (A \cap C)]}{P(B) + P(C) - P(B \cap C)} \\ &= \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(B) + P(C) - P(B \cap C)} \\ &\overset{indep.\,mútua}{=} \frac{P(A) \times P(B) + P(A) \times P(C) - P(A) \times P(B) \times P(C)}{P(B) + P(C) - P(B) \times P(C)} \\ &= \frac{P(A) \times [P(B) + P(C) - P(B) \times P(C)]}{P(B) + P(C) - P(B) \times P(C)} \\ &= P(A) \\ &= 0.4. \end{aligned}$$

[Alternativamente: ao admitir-se que os eventos A, B e C são mutuamente independentes, A e $(B \cup C)$ são também eventos independentes, logo $P[A \mid (B \cup C)] = P(A) = 0.4$.]

2. A variável aleatória X, que representa o primeiro algarismo do tempo (em segundo) que decorre entre dois eventos sísmicos consecutivos em determinada região europeia, possui a seguinte função de probabilidade:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(X=x)$	0.30	0.18	0.12	0.10	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04

(a) Qual é a probabilidade de este primeiro algarismo ser igual a um, sabendo que não excede três? (1.5)

- **Variável aleatória de interesse**
  $X =$ 1o. algarismo do tempo entre dois eventos sísmicos consecutivos
- **F.p. de** X
  Ver tabela do enunciado.
- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X=1 \mid X \leq 3) &= \frac{P(X=1, X \leq 3)}{P(X \leq 3)} \\ &= \frac{P(X=1)}{\sum_{x=1}^{3} P(X=x)} \\ &= \frac{0.30}{0.30+0.18+0.12} \\ &= \frac{0.30}{0.60} \\ &= 0.5. \end{aligned}$$

(b) Obtenha a mediana de X. (1.5)

- **Mediana de** X
  Represente-se a mediana de X por me. Então

$$\begin{aligned} me \quad : \quad & \frac{1}{2} \leq F_X(me) \leq \frac{1}{2} + P(X=me) && (1) \\ & \frac{1}{2} \leq F_X(me) \leq \frac{1}{2} + [F_X(me) - F_X(me^-)) \\ & F_X(me^-) \leq \frac{1}{2} \leq F_X(me). && (2) \end{aligned}$$

Tirando partido da definição de mediana em (1) e de

$$\frac{1}{2} \leq F_X(3) \stackrel{(a)}{=} 0.6 \quad \leq \quad \frac{1}{2} + P(X=3) = \frac{1}{2} + 0.12 = 0.62$$

concluímos que $me = 3$. [A prova da sua unicidade é deixada como exercício.]
[Em alternativa, notemos que $F_X(3) = P(X \leq 3) \stackrel{(a)}{=} 0.60 \geq \frac{1}{2}$; mais, $F_X(2) = F_X(3^-) \stackrel{(a)}{=} 0.30 + 0.18 = 0.48 \leq \frac{1}{2}$. Logo o resultado (2) leva-nos a concluir que $me = 3$.]

(c) Calcule a probabilidade de, em 20 registos efetuados de modo independente nessa mesma região europeia, o número total de registos de tempo com primeiro algarismo igual a 1 exceder 4. (2.0)

- **Variável aleatória de interesse**
  $Y =$ no. de registos de tempo com 1o. algarismo igual a 1, em 20 registos independentes
- **Distribuição de** Y
  $Y \sim \text{binomial}(n, p)$, com $n = 20$ e $p = P(X=1) = 0.30$.
- **F.p. de** X
  $P(Y=y) = \binom{20}{y} \times 0.30^y \times (1-0.30)^{20-y}, \quad y = 0, 1, \ldots, 20$

- **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned} P(Y>4) &= 1-P(Y\le 4) \\ &= 1-\sum_{y=0}^{4}\binom{20}{y}\times 0.30^{y}\times(1-0.30)^{20-y} \\ &= 1-F_{binomial(20,0.30)}(4) \\ &\overset{tabela/calc.}{=} 1-0.2375 \\ &= 0.7625. \end{aligned}$$

Grupo II	10 valores

1. A rede informática interna de um banco funciona permanentemente. Considere que o tempo (em minuto) de utilização desta rede por um utilizador autenticado é uma variável aleatória X com função de distribuição dada por:

$$F_X(x)=\begin{cases} 1-e^{-\sqrt{\frac{x}{75}}}, & x>0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Obtenha a probabilidade de o tempo de utilização X ser superior a 30 minutos e inferior a 3 horas. (1.5)

- **V.a.**
  X = tempo de utilização da rede informática por utilizador autenticado
- **F.d. de X**
  $$F_X(x)=\begin{cases} 1-e^{-\sqrt{\frac{x}{75}}}, & x>0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$
- **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned} P(30<X<180) &= F_X(180)-F_X(30) \\ &= \left(1-e^{-\sqrt{\frac{180}{75}}}\right)-\left(1-e^{-\sqrt{\frac{30}{75}}}\right) \\ &= e^{-\sqrt{0.4}}-e^{-\sqrt{2.4}} \\ &\simeq 0.318866. \end{aligned}$$

(b) Tendo em conta que $E(X)=150$ e $V(X)=112500$, obtenha um valor aproximado para a probabilidade de o tempo médio de utilização da rede por 36 utilizadores autenticados ser superior a 2 horas. (3.0)

- **V.a.**
  X_i = tempo de utilização da rede informática pelo utilizador autenticado i, $\quad i=1,\ldots,n$
  $n=36$
- **Distribuição, valor esperado e variância comuns**
  $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X, \quad i=1,\ldots,n$
  $E(X_i)=E(X)=\mu=150, \quad i=1,\ldots,n$
  $V(X_i)=V(X)=\sigma^2=112\,500, \quad i=1,\ldots,n$
- **V.a. de interesse**
  $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ = tempo médio de utilização da rede por n utilizadores autenticados
- **Valor esperado e variância de $\bar{X}$**
  $E(\bar{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\overset{X_i\sim X}{=}\frac{1}{n}\times nE(X)=E(X)=\mu$
  $V(\bar{X})=V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\overset{X_i\ indep.}{=}\frac{1}{n^2}\times\sum_{i=1}^{n}V(X_i)\overset{X_i\sim X}{=}\frac{1}{n^2}\times nV(X)=\frac{V(X)}{n}=\frac{\sigma^2}{n}$

- **Distribuição aproximada de $\bar{X}$**
  Pelo teorema do limite central (TLC) pode escrever-se
  $$\frac{\bar{X}-E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \stackrel{a}{\sim} \text{Normal}(0,1).$$
- **Valor aproximado da prob. pedida**
  $$\begin{aligned}
  P(\bar{X}>120) &= 1-P(\bar{X}\leq 120) \\
  &= 1-P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{120-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
  &\stackrel{TLC}{\simeq} 1-\Phi\left(\frac{120-150}{\sqrt{\frac{112\,500}{36}}}\right) \\
  &\simeq 1-\Phi(-0.54) \\
  &= \Phi(0.54) \\
  &\stackrel{tabela/calc.}{\simeq} 0.7054.
  \end{aligned}$$

2. No processo de obtenção da cor desejada para uma tinta, definem-se as seguintes variáveis aleatórias: o número de acertos finais levados a cabo por um computador (X) e o número de acertos finais efetuados manualmente por um operário especializado (Y). Na tabela seguinte apresenta-se de forma incompleta a função de probabilidade conjunta de X e Y:

	Y	
X	0	1
1	a	0.48
2	0	0.18
3	b	0.1

(a) Sabendo que $P(Y=0\mid X=1)=0.2$, mostre que $a=b=0.12$. (1.5)

- **Par aleatório (X,Y)**
  X = no. de acertos finais levados a cabo por computador
  Y = no. de acertos finais efetuados manualmente por operário especializado
- **F.p. conjunta e f.p. marginais**
  $P(X=x,Y=y)$, $P(X=x)=\sum_y P(X=x,Y=y)$ e $P(Y=y)=\sum_x P(X=x,Y=y)$ encontram-se sumariadas na tabela seguinte:

	Y		
X	0	1	$P(X=x)$
1	a	0.48	$a+0.48$
2	0	0.18	0.18
3	b	0.1	$b+0.1$
$P(Y=y)$	$a+b$	0.76	1

- **Obtenção de a e b**
  $$(a,b) \quad : \quad \begin{cases} \sum_x\sum_y P(X=x,Y=y)=1 \\ P(Y=0\mid X=1)=0.2 \end{cases}$$
  $$\begin{cases} a+b+0.76=1 \\ \frac{P(X=1,Y=0)}{P(X=1)}=0.2 \end{cases}$$
  $$\begin{cases} - \\ \frac{a}{a+0.48}=0.2 \end{cases}$$
  $$\begin{cases} b=1-0.76-a \\ a=\frac{0.2\times 0.48}{0.8} \end{cases}$$

$$(a,b) \quad : \quad \begin{cases} a = 0.12 \\ b = 1 - 0.76 - 0.12 = 0.12 \end{cases}$$

(b) Calcule a probabilidade de o número total de acertos finais exceder 2. (1.5)

- **V.a. de interesse**
  $X + Y =$ número total de acertos finais

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X+Y>2) &= P(X=2,Y=1)+P(X=3,Y=0)+P(X=3,Y=1) \\ &= 0.18+b+0.1 \\ &= 0.4. \end{aligned}$$

(c) Obtenha a variância do número total de acertos finais. (2.5)

- **Variância pedida**
  Pretende calcular-se

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= V(X)+V(Y)+2\times cov(X,Y) \\ &= V(X)+V(Y)+2\times[E(XY)-E(X)\times E(Y)]\,. \end{aligned}$$

Logo são necessários alguns cálculos auxiliares que envolverão as f.p. conjunta de (X,Y) e marginais de X e Y obtidas na alínea (a).

	Y		
X	0	1	$P(X=x)$
1	0.12	0.48	0.6
2	0	0.18	0.18
3	0.12	0.1	0.22
$P(Y=y)$	0.24	0.76	1

- **Valor esperado e variância de** X

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^{3} x\,P(X=x) \\ &= 1\times0.6+2\times0.18+3\times0.22 \\ &= 1.62 \\ V(X) &= E(X^2)-E^2(X) \\ &= \sum_{x=1}^{3} x^2\,P(X=x)-E^2(X) \\ &= \left(1^2\times0.6+2^2\times0.18+3^2\times0.22\right)-1.62^2 \\ &= 0.6756 \end{aligned}$$

- **Valor esperado e variância de** Y

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y=0}^{1} y\,P(Y=y) \\ &= 0\times0.24+1\times0.76 \\ &= 0.76 \\ V(Y) &= E(Y^2)-E^2(Y) \\ &= \sum_{y=0}^{1} y^2\,P(Y=y)-E^2(Y) \\ &= \left(0^2\times0.24+1^2\times0.76\right)-0.76^2 \\ &= 0.76-0.76^2 \\ &= 0.1824 \end{aligned}$$

[Ou então: $Y \sim$ Bernoulli(0.76) logo $E(Y) \overset{form}{=} 0.76$ e $V(Y) \overset{form}{=} 0.76 \times (1-0.76) = 0.1824$.]

- **Valor esperado de** XY

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=0}^{1} x\,y\,P(X=x, Y=y) \\ &= 1\times 1\times 0.48 + 2\times 1\times 0.18 + 3\times 1\times 0.1 \\ &= 1.14 \end{aligned}$$

- **Covariância**

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)\times E(Y) \\ &= 1.14 - 1.62\times 0.76 \\ &= -0.0912 \end{aligned}$$

- **Variância pedida** (cont.)

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= V(X) + V(Y) + 2\times cov(X,Y) \\ &= 0.6756 + 0.1824 + 2\times(-0.0912) \\ &= 0.6756. \end{aligned}$$