FICHA DE TRABALHO 7 **Derivadas de funções reais de variável real e aplicações**

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

1 **Determine a função derivada das funções seguintes:**

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 8x$

b) $f(x) = \frac{4}{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

d) $f(x) = 7x - 3$

e) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 1$

f) $f(x) = 5x^3 + 2x$

g) $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$

h) $f(x) = \frac{x + 1}{x}$

i) $f(x) = \frac{6 - x}{x^2 - 1}$

j) $f(x) = \frac{\sqrt{2}\,x}{1 - \sqrt{2}\,x}$

k) $f(x) = (1 + 2x^3)^4$

l) $f(x) = (x^3 + 3x + 1)^3$

2 **Mostre que as seguintes funções não são diferenciáveis no seu domínio e indique o domínio da função derivada:**

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

b) $f(x) = |x^2 - 6x|$

3 **Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & \text{se } x < 3 \\ x^2 - 9 & \text{se } x \geqslant 3 \end{cases}$**

3.1 Determine os valores de a e de b, de modo que a função f seja contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.

3.2 Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f nos pontos de abcissa 3 e $\frac{1}{2}$.

4 **Usando métodos exclusivamente analíticos, determine $f''(x)$ e o sentido da concavidade do gráfico das funções no intervalo indicado:**

a) $f(x) = x^2 - 4x$ em $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ em $]-3, -2[$.

c) $f(x) = \frac{x}{x + 2}$ em $]-5, -3[$.

d) $f(x) = x^3 - 4x + 1$ em $]-3, 0[$.

e) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x$ em $]0, 1[$.

f) $f(x) = (x^2 - 4)^3$ em $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$.

g) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2}$ em $]-2, -1[$.

5 **Usando métodos exclusivamente analíticos, determine $f''(x)$, indique as concavidades e os pontos de inflexão no gráfico das funções no intervalo indicado e, caso estes existam, determine as abcissas desses pontos:**

a) $f(x) = x^2 + 2x$ em $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = -\frac{4}{x}$ em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$ em $\mathbb{R}$.

d) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$ em $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

e) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 1$ em $\mathbb{R}$.

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 2 \\ \sqrt{x - 2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$ em $\mathbb{R}$.

6 **Considere a função f de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} ax^2 - bx & \text{se } x \geqslant 2 \\ 2x - x^3 & \text{se } x < 2 \end{cases}$**

6.1 Determine os valores de a e de b, de modo que f seja contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.

6.2 Usando métodos exclusivamente analíticos, estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e existência de pontos de inflexão.

7 **Use a derivada de segunda ordem para concluir se os gráficos das funções seguintes apresentam extremos relativos e pontos de inflexão e apresente os quadros de variação de sinal de f' e de f'' para confirmar os seus resultados:**

a) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 1$ **b)** $f(x) = 6x^4 - 8x^3$ **c)** $f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$

8 **Esboce o gráfico de f tendo como base o estudo da mesma no que se refere, à existência de zeros, paridade, existência de assíntotas ao seu gráfico, monotonia e existência de extremos, sentido das concavidades do seu gráfico e existência de pontos de inflexão:**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ **b)** $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

9 **Numa experiência laboratorial de Física, observou-se que o espaço percorrido, em metros, em relação a um ponto fixo, por uma partícula que se desloca com movimento retilíneo é dado em função do tempo, em segundos, a partir do instante em que inicia a observação por:**

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 12t$$

9.1 Determine:

a) o valor da velocidade da partícula, em m/s, no instante $t = 3$.

b) o valor da aceleração da partícula, em m/s^2, no instante $t = 3$.

c) as condições iniciais da experiência.

d) a velocidade média da partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 5$.

9.2 Supondo que a partícula esteve em movimento entre o instante $t = 0$ e $t = 10$, determine em que instante atingiu a velocidade mínima e o seu valor.

10 **Dois pontos móveis, M_1 e M_2, movem-se numa reta numérica cuja unidade de medida é o metro, sendo a função posição de cada um, descrita em função do tempo t, em segundos, por:**

$$x_1(t) = 2t^2 - t$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 9t$$

respetivamente.
Determine o instante em que os dois objetos têm a mesma velocidade e determine a velocidade e a distância entre eles, nesse instante.

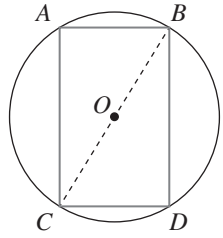
11 **Uma bola é lançada verticalmente para cima e a sua distância, em metros, relativamente ao solo, é dada, em cada segundo após o lançamento, por:**

$$s(t) = 21t - 4{,}9t^2$$

11.1 Determine a velocidade da bola no instante $t = 2$.

11.2 Qual é a velocidade da bola no instante em que toca no solo?

12 **De todos os retângulos inscritos num círculo de raio $r = 1$, qual é aquele que tem perímetro máximo?**



13 **Num referencial o.n. xOy, considere a reta de equação $y = -2x + 5$. Determine as coordenadas do ponto P da reta cuja distância à origem seja mínima e indique essa distância.**

14 **Qual é o conjunto de valores que o número real k pode ter, de modo que a função**

$$f(x) = -x^3 + (2k - 1)x$$

seja sempre decrescente em $\mathbb{R}$?

15 **Determine os valores de a, b, c e d em $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sabendo que:**

- **o gráfico de f contém o ponto $(0, -8)$;**
- **o gráfico de f tem um ponto de inflexão de coordenadas $(2, 0)$;**
- **a reta tangente ao gráfico de f em $x = 3$ tem equação $y = 3x - 8$.**