FICHA DE TRABALHO 9 Limites de funções reais de variável real. Indeterminações

NOME: _____ N.º: _____ TURMA: _____ DATA: _____

1 **Dados $A = \{-2\} \cup]3, 5]$ e $B = [-3, 5[\cup \{6\}$, indique o conjunto dos pontos aderentes ao conjunto:**

a) A **c)** $A \cap B$ **e)** $\overline{A}$

b) B **d)** $A \cup B$ **f)** $A \backslash B$

2 **Mostre, usando a definição de limite, que a função real de variável real definida por**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2x^2 + 2) & \text{se } x \leqslant 1 \\ 3 - 2x & \text{se } 1 < x < 3 \\ 1 - x^2 & \text{se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

tem limite em $x = 1$ e não tem limite em $x = 3$.

3 **Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{x + 4}{x - 4}$.**

3.1 Prove, usando a definição de limite de uma função, que:

a) $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$

3.2 Conclua sobre a existência de $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

3.3 Considere agora a função g real de variável real, definida por $g(x) = [f(x)]^2$. Averigue a existência de $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$.

4 **Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & \text{se } x \leqslant -1 \\ ax^3 - 7 & \text{se } x > -1 \end{cases}$.**

Determine o valor de a de modo que $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ exista e indique o seu valor.

5 **Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{2x - 2}{5x + 3}$ e as sucessões (a_n) e (b_n) de termos gerais $a_n = 3n$ e $b_n = -\frac{1}{n}$.**

5.1 Justifique que $\lim a_n = +\infty$ e $\lim b_n = 0$.

5.2 Calcule $\lim f(a_n)$ e $\lim f(b_n)$.

5.3 Considere agora uma sucessão qualquer (x_n) com todos os termos não nulos, tal que $x_n \to -\infty$. Determine $\lim f(x_n)$.

6 **Determine:**

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(x^2 + 1 - \frac{1}{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 + 1 - \frac{1}{x}\right)$

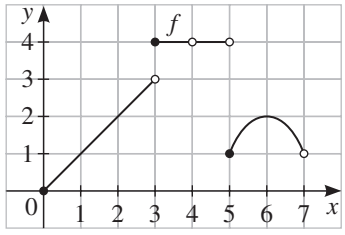
c) $\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{x + 3}{x + 2}$

d) $\lim\limits_{x \to 5^-} \frac{1 - x}{(x - 5)^2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2 - x}{x + 4}$

f) $\lim\limits_{x \to -4^+} \frac{x^2 + 3x}{x + 4}$

7 **Na figura está representada parte do gráfico de uma função f de domínio $[0, 7[\setminus\{4\}$.**



De acordo com os dados da figura indique, caso exista:

a) $f(3)$

b) $f(5)$

c) $f(0)$

d) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 7^-} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$

h) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

i) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

j) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$

k) $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$

l) $\lim\limits_{x \to 7^+} f(x)$

m) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

n) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

o) $\lim\limits_{x \to 7} f(x)$

p) $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

q) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

8 **Considere duas funções reais de variável real, f e g, definidas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2 - 2x - 3$. Determine, caso existam, os seguintes limites:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \left(3f(x) - 2g(x)\right)$

d) $\lim\limits_{x \to -2} \left(\left[f(x)\right]^2 - \dfrac{g(x)}{2}\right)$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \left(f(x) - g(x)\right)$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

g) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

h) $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{f(x)}$

i) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{g(x)}$

j) $\lim\limits_{x \to -2} (g \circ f)(x)$

9 **Considere as funções reais de variável real definidas por $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$, $g(x) = 3 + x^2$ e $h(x) = 3 - x$. Calcule, caso existam, os limites seguintes:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} (f \circ g)(x)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} (f \circ h)(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 3^+} (h \circ f)(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 2\sqrt{2}} (h \circ g)(x)$

10 **Determine, caso seja possível, os limites indicados:**

a) $\lim\limits_{x \to -1} (3x^3 - 4x + 2)$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^2 - 3x}{5x^3 - 25}$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} (\cos x - \sin x)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^2 - 3x + 1)$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x^2 + x^3 - 2x^5)$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 8x}\right)$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}\right)$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2} - 1}$

i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4}$

j) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - x^2 - 5x - 3}$

k) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

l) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$

m) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$

n) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{4x + 5} - 3}$

o) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2 - \sqrt{x}}{x - 4}$

p) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{2}{1 - x^2} + \dfrac{1}{x - 1}\right)$

q) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 7x}{5x}$

r) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7x^3 - 5x}{4x^2 - 3x + 6}$

s) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 4}{|x - 2|}$

t) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{2}{x} - 1}{\frac{3}{x} + 4}$

11 **Um tanque cilíndrico com 10 metros de altura contém água para rega. No instante $t = 0$ é aberta uma torneira no fundo do tanque e a água começa a sair. A altura, a, da água no tanque, passados t minutos após a abertura da torneira, é dada por $a(t) = (3 - 0{,}0075t)^2$, em que $0 \leqslant t \leqslant 400$. Determine:**

a) a altura da água no tanque no momento de abertura da torneira.

b) ao fim de quanto tempo, em horas e minutos, arredondado às unidades, o tanque está meio cheio de água.

c) $\lim\limits_{t \to 400} a(t)$ e interprete o resultado no contexto do problema.

12 **Num hospital é administrado um medicamento a um paciente. Admita que a concentração do medicamento, em mg/L, no sangue do paciente é dada, ao longo do tempo t, em horas, por $C(t) = \dfrac{4t}{t^2 + 1}$. Use a representação gráfica da função C obtida na calculadora gráfica para resolver as questões seguintes.**

12.1 Determine o valor da concentração máxima do medicamento no sangue do paciente e o tempo, em horas, ao fim do qual ocorreu.

12.2 Com o passar do tempo, o que acontece à concentração do medicamento no sangue do doente?

12.3 Suponha que é necessário administrar nova dose do medicamento quando a concentração atingir os 0,5 mg/L. Determine ao fim de quanto tempo, em horas e minutos, arredondado às unidades, é que se tem de administrar nova dose.