Probabilidades e Estatística

LEAN, LEE, LEGI, LERC, LMAC, MEAer, MEAmbi, MEBiol, MEBiom, MEEC, MEFT, MEMat, MEQ

2º semestre – 2017/2018
05/05/2018 – **11:00**

Duração: 90 minutos **1º Teste B**

Justifique convenientemente todas as respostas

Grupo I	10 valores

1. Uma companhia seguradora distribui os segurados pelas classes A, B e C. As frações de segurados nas classes A, B e C são 0.35, 0.50 e 0.15, respetivamente. A probabilidade de um segurado ter pelo menos um acidente durante um ano é 0.01, 0.05 e 0.10, caso pertença à classe A, B e C, respetivamente.

(a) Qual é a probabilidade de um segurado, escolhido ao acaso, não ter acidentes durante um ano? (2.5)

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	**Probabilidade**
$A =$ {segurado na classe A}	$P(A) = 0.35$
$B =$ {segurado na classe B}	$P(B) = 0.50$
$C =$ {segurado na classe C}	$P(C) = 0.15$
$D =$ {segurado ter acidente durante um ano}	$P(D) = ?$
	$P(D \mid A) = 0.01$
	$P(D \mid B) = 0.05$
	$P(D \mid C) = 0.10$

- **Probabilidade pedida**
  Recorrendo à lei da probabilidade total, tem-se

$$\begin{aligned}
P(\bar{D}) &= 1 - P(D) \\
&= 1 - [P(D \mid A) \times P(A) + P(D \mid B) \times P(B) + P(D \mid C) \times P(C)] \\
&= 1 - (0.01 \times 0.35 + 0.05 \times 0.5 + 0.10 \times 0.15) \\
&= 1 - 0.0435 \\
&= 0.9565.
\end{aligned}$$

(b) Obtenha a probabilidade de um segurado escolhido ao acaso pertencer à classe B sabendo que teve pelo menos um acidente durante um ano. (2.5)

- **Prob. pedida**
  Tirando partido do teorema de Bayes, segue-se

$$\begin{aligned}
P(B \mid D) &= \frac{P(D \mid B) \times P(B)}{P(D)} \\
&= \frac{0.05 \times 0.50}{0.0435} \\
&\simeq 0.574713.
\end{aligned}$$

2. Um mecânico de automóveis tem 6 fusíveis numa caixa, mas só 4 desses 6 fusíveis são adequados para o automóvel que está a reparar. Admita que o mecânico seleciona os fusíveis aleatoriamente da caixa até encontrar um fusível adequado para o automóvel.

(a) Supondo que o mecânico seleciona os fusíveis com reposição, determine o valor esperado do número de fusíveis selecionados e a probabilidade de serem selecionados pelo menos 3 fusíveis. (3.0)

- **Variável aleatória de interesse**
  X = no. de fusíveis selecionados com reposição até encontrar-se um fusível adequado
- **Distribuição de X**
  $X \sim \text{Geométrica}(p)$, com $p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
- **Valor esperado de X**
  Como $X \sim \text{Geométrica}(p)$ temos
  $$\begin{aligned} E(X) &\stackrel{form.}{=} \frac{1}{p} \\ &= \frac{1}{\frac{2}{3}} \\ &= 1.5 \end{aligned}$$
- **F.p. de X**
  $P(X = x) = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{x-1} \times \frac{2}{3}$, $x = 1, 2, \ldots$
- **Prob. pedida**
  $$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - \sum_{x=1}^{2} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{x-1} \times \frac{2}{3} \\ &= 1 - \left[\frac{2}{3} + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{2}{3}\right] \\ &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

(b) Admitindo agora que o mecânico seleciona os fusíveis sem reposição, obtenha a probabilidade de serem selecionados 3 fusíveis. (2.0)

- **V.a. de interesse**
  Y = no. de fusíveis extraídos sem reposição até encontrar-se um fusível adequado
- **Prob. pedida**
  Considere-se que A_i representa o evento *fusível adequado na extração i*. Basta invocar a lei da probabilidade composta para obter a prob. pedida:
  $$\begin{aligned} P(Y = 3) &= P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) \\ &= P(\overline{A_1}) \times P(\overline{A_2} \mid \overline{A_1}) \times P(A_3 \mid \overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \\ &= \frac{2}{6} \times \frac{2-1}{6-1} \times \frac{4}{6-1-1} \\ &= \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Grupo II	10 valores

1. A largura, X (em milímetro), de um *slot* para o forjamento de duralumínio possui distribuição normal com valor esperado 23 mm e desvio padrão 0.1 mm. Os limites de especificação para a largura desses *slots* são 23±0.15 mm.

(a) Qual é a probabilidade de a largura de um *slot* para o forjamento de duralumínio não cumprir os limites de especificação? (1.5)

- **V.a.**
  X = largura (em milímetro) de um *slot* para o forjamento de duralumínio
- **Distribuição de X**
  $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$
  onde $\mu = 23$ e $\sigma^2 = 0.1^2$.

- **Prob. pedida**
  A probabilidade de a largura de um *slot* para o forjamento de duralumínio não cumprir os limites de especificação é igual a

$$\begin{aligned}
P(X < 23 - 0.15 \text{ ou } X > 23 + 0.15) &= P(X < 23 - 0.15) + P(X > 23 + 0.15) \\
&= P\left[\frac{X-23}{0.1} \equiv \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{(23-0.15)-23}{0.1}\right] \\
&\quad +1 - P\left[\frac{X-23}{0.1} \equiv \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{(23+0.15)-23}{0.1}\right] \\
&= \Phi(-1.5) + 1 - \Phi(1.5) \\
&= 2 \times [1 - \Phi(1.5)] \\
&\overset{tabela/calc.}{=} 2 \times (1 - 0.9332) \\
&= 0.1336.
\end{aligned}$$

(b) Determine o quantil de ordem 0.95 de X. (1.0)

- **Quantil pedido**

$$\begin{aligned}
\chi_{0.95} \quad : \quad & P(X \leq \chi_{0.95}) = 0.95 \\
& P\left(\frac{X-23}{0.1} \equiv \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\chi_{0.95}-23}{0.1}\right) = 0.95 \\
& \Phi\left(\frac{\chi_{0.95}-23}{0.1}\right) = 0.95 \\
& \frac{\chi_{0.95}-23}{0.1} = \Phi^{-1}(0.95) \\
& \chi_{0.95} = 23 + 0.1 \times \Phi^{-1}(0.95) \\
& \chi_{0.95} = 23 + 0.1 \times 1.6449 \\
& \chi_{0.95} = 23.16449.
\end{aligned}$$

(c) Calcule o valor exato da probabilidade de a média das larguras de 16 *slots* para o forjamento de duralumínio exceder 23.05 mm. Admita que tais larguras são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a X. (3.0)

- **V.a.**
  X_i = largura do *slot* i para o forjamento de duralumínio, $\quad i = 1, \ldots, n$
  $n = 16$

- **Distribuição, valor esperado e variância comuns**
  $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X, \quad i = 1, \ldots, n$
  $E(X_i) = E(X) = \mu = 23, \quad i = 1, \ldots, n$
  $V(X_i) = V(X) = \sigma^2 = 0.1^2, \quad i = 1, \ldots, n$

- **V.a. de interesse**
  $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ = média das larguras de n *slots* para o forjamento de duralumínio

- **Distribuição exacta de $\bar{X}_n$**
  $\bar{X}_n$ é uma combinação linear de n v.a. independentes com distribuição normal, logo $\bar{X}_n$ possui também distribuição normal. De facto,

$$\bar{X}_n \sim \text{Normal}(E(\bar{X}_n), V(\bar{X}_n)),$$

  onde

$$\begin{aligned}
E(\bar{X}_n) &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} \frac{1}{n}\, n\, E(X) = \mu = 23 \\
V(\bar{X}_n) &= V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{X_i \, indep.}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} \frac{1}{n^2}\, n\, V(X) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{0.1^2}{16} = 0.000625
\end{aligned}$$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_n > 23.05) &= 1 - P\left[\frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}} \le \frac{23.05 - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}}\right] \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{23.05 - 23}{\sqrt{0.000625}}\right) \\ &= 1 - \Phi(2) \\ &\overset{tabela/calc}{=} 1 - 0.9772 \\ &= 0.0228. \end{aligned}$$

2. Um pequeno *ferryboat* transporta veículos de tipos A e B. Considere que X e Y representam o número de veículos de tipos A e B transportados por viagem (respetivamente). Admita que o par aleatório (X, Y) possui função de probabilidade conjunta:

X \ Y	0	1	2
0	0.02	0.21	0.02
1	0.24	0.02	0.24
2	0.02	0.23	0

(a) Calcule a variância de $Y \mid X = 1$. (2.0)

- **Par aleatório** (X, Y)
  $X =$ o número de veículos de tipo A transportados por viagem
  $Y =$ o número de veículos de tipo B transportados por viagem

- **F.p. conjunta e f.p. marginais**
  $P(X = x, Y = y)$, $P(X = x) = \sum_{y=0}^{2} P(X = x, Y = y)$ e $P(Y = y) = \sum_{x=0}^{2} P(X = x, Y = y)$ encontram-se sumariadas na tabela seguinte:

X	Y = 0	1	2	$P(X = x)$
0	0.02	0.21	0.02	0.25
1	0.24	0.02	0.24	0.50
2	0.02	0.23	0	0.25
$P(Y = y)$	0.28	0.46	0.26	1

- **F.p. de** $Y \mid X = 1$

$$\begin{aligned} P(Y = y \mid X = 1) &= \frac{P(X = 1, Y = y)}{P(X = 1)} \\ &= \begin{cases} \frac{0.24}{0.50} = 0.48, & y = 0 \\ \frac{0.02}{0.50} = 0.04, & y = 1 \\ \frac{0.24}{0.50} = 0.48, & y = 2 \\ 0, & \text{restantes valores de } y \end{cases} \end{aligned}$$

- **Valor esperado de** $Y \mid X = 1$

$$\begin{aligned} E(Y \mid X = 1) &= \sum_{y=0}^{2} y \times P(Y = y \mid X = 1) \\ &= 0 \times 0.48 + 1 \times 0.04 + 2 \times 0.48 \\ &= 1 \end{aligned}$$

- **2o. momento de** $Y \mid X=1$

$$\begin{aligned} E(Y^2 \mid X=1) &= \sum_{y=0}^{2} y^2 \times P(Y=y \mid X=1) \\ &= 0 \times 0.48 + 1^2 \times 0.04 + 2^2 \times 0.48 \\ &= 1.96 \end{aligned}$$

- **Variância de** $Y \mid X=1$

$$\begin{aligned} V(Y \mid X=1) &= E(Y^2 \mid X=1) - E^2(Y \mid X=1) \\ &= 1.96 - 1^2 \\ &= 0.96. \end{aligned}$$

(b) Obtenha o valor esperado do número total de veículos transportados por viagem. (1.5)

- **V.a. de interesse**
  $Z = X + Y =$ número total de veículos transportados por viagem

- **Valor esperado de** X

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{2} x \times P(X=x) \\ &= 0 \times 0.25 + 1 \times 0.50 + 2 \times 0.25 \\ &= 1 \end{aligned}$$

- **Valor esperado de** Y

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y=-1}^{2} y \times P(Y=y) \\ &= 0 \times 0.28 + 1 \times 0.46 + 2 \times 0.26 \\ &= 0.98 \end{aligned}$$

- **Valor esperado pedido**

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(X) + E(Y) \\ &= 1 + 0.98 \\ &= 1.98. \end{aligned}$$

(c) Averigúe se X e Y são variáveis aleatórias dependentes. (1.0)

- **Dependência entre** X **e** Y
  X e Y são v.a. DEPENDENTES sse

$$P(X=x, Y=y) \neq P(X=x) \times P(Y=y), \quad \text{para algum } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ora, por um lado

$$P(X=0, Y=0) = 0.02,$$

por outro

$$\begin{aligned} P(X=0) \times P(Y=0) &= 0.28 \times 0.25 \\ &= 0.07. \end{aligned}$$

Deste modo conclui-se que

$$P(X=0, Y=0) \neq P(X=0) \times P(Y=0),$$

pelo que X e Y são efectivamente v.a. DEPENDENTES.