



**Método inverso de identificação de forças e dano estrutural  
em regime estacionário**

**João Miguel Freitas da Silva**

Dissertação para a obtenção do Grau de Mestre em  
**Engenharia Aeroespacial**

Orientadores: Prof. Miguel António Lopes de Matos Neves  
Prof. Nuno Manuel Mendes Maia

**Júri**

Presidente: Prof. Fernando José Parracho Lau  
Orientador: Prof. Miguel António Lopes de Matos Neves  
Vogal: Prof. António Paulo Vale Urgueira

**Novembro 2019**

## **Agradecimentos**

Gostaria de exprimir o meu sincero agradecimento ao Professor Miguel de Matos Neves por me guiar e motivar ao longo deste trabalho, demonstrando sempre uma incessante disponibilidade.

## Resumo

Nesta trabalho analisa-se o método inverso de identificação de forças e dano estrutural, que resulta da aplicação do conceito de transmissibilidade para sistemas com múltiplos graus de liberdade. O objetivo do método proposto é determinar a localização de forças exteriores e de modificações estruturais através de respostas dinâmicas da estrutura a analisar. Uma vez localizadas as forças ou as possíveis modificações estruturais segue-se a determinação das amplitudes das forças aplicadas ou a quantificação do dano estrutural. Um dos principais objetivos deste trabalho é definir-se com clareza uma metodologia eficaz para o método proposto e demonstrar-se a aplicabilidade numérica do mesmo. Com este intuito estuda-se a identificação numérica de forças e modificações estruturais numa viga de Bernoulli-Euler e numa placa de Kirchhoff-Love. As modificações estruturais analisadas ao longo da trabalho são: adição de uma massa pontual, redução de rigidez localizada e formação de uma fissura aberta. Os resultados obtidos para todos os casos estudados são muito satisfatórios, uma vez que a localização das forças ou modificações estruturais determina-se com sucesso e o cálculo da amplitude das forças exteriores ou a quantificação do dano estrutural revela-se praticamente exato. Sendo assim, demonstra-se a aplicabilidade numérica do método inverso de identificação de forças e dano estrutural. A aplicação numérica do método permitiu descortinar algumas das suas limitações, que se analisam com o propósito de se elaborarem soluções que viabilizem a aplicação do método proposto de forma mais eficaz.

**Palavras-chave:** método inverso, transmissibilidade, identificação de forças, identificação de dano estrutural, quantificação do dano, respostas dinâmicas



## **Abstract**

In this work an inverse method for identification of forces and structural damage is analysed, which stems from the application of the concept of transmissibility for systems with multiple degrees of freedom. The purpose of the proposed method is to evaluate the location of external forces and structural modifications using the dynamic responses of the structure being analysed. Once the location of the forces or possible structural modifications are identified, one then proceeds with the determination of the applied forces' amplitudes or structural damage quantification. One of the main purposes of this work is to define with clarity an effective methodology concerning the applicability of the proposed method. To this end, the numerical identification of forces and structural modifications is studied upon a Bernoulli-Euler beam and a Kirchhoff-Love plate. The structural modifications analysed throughout this work are: addition of a discrete mass, reduction of stiffness and formation of a single open crack. All the cases studied have yielded very successful results, given that the location of forces or structural modifications have been correctly determined and the calculation of the external forces' amplitudes or the structural damage quantification reveal itself to be nearly exact. Moreover, the numerical application of the inverse method has revealed some of its limitations, which were further examined with the purpose of establishing solutions that make its applicability more viable and effective.

**Keywords:** inverse method, transmissibility, identification of forces, identification of structural damage, damage quantification, dynamic responses



# Índice

Agradecimentos .....	i
Resumo .....	ii
Abstract .....	iv
Lista de figuras.....	ix
Nomenclatura.....	xi
Lista de abreviações .....	xiii
1 Introdução .....	1
1.1 Motivação e descrição do problema.....	1
1.2 Objetivos.....	3
2 Fundamentos teóricos.....	5
2.1 Vibração mecânica .....	6
2.1.1 Sistemas contínuos .....	6
2.1.2 Sistemas com múltiplos graus de liberdade .....	6
2.2 Teoria da elasticidade linear para sólidos .....	8
2.2.1 Componentes da extensão.....	8
2.2.2 Componentes da tensão .....	9
2.2.3 Lei de Hooke Generalizada .....	10
2.3 Método dos elementos finitos.....	11
2.3.1 Teoria de viga de Bernoulli-Euler .....	11
2.3.2 Teoria de Placas de Kirchhoff-Love .....	14
2.4 Transmissibilidade de forças para sistemas com múltiplos graus de liberdade .....	19
2.4.1 Transmissibilidade de forças introduzindo o conceito de forças fictícias.....	21
2.5 Transmissibilidade de deslocamentos para sistemas com múltiplos graus de liberdade.....	22

2.6	Modelação de modificações estruturais como forças adicionais .....	24
2.6.1	Adição de uma massa pontual .....	26
2.6.2	Redução de rigidez localizada.....	26
2.6.3	Adição de uma massa pontual e redução de rigidez localizada .....	27
2.6.4	Fissura aberta numa viga de Bernoulli-Euler .....	27
3	Metodologia.....	33
3.1	Identificação da localização e amplitude de forças exteriores .....	33
3.1.1	Transmissibilidade de Forças.....	33
3.1.2	Transmissibilidade de deslocamentos .....	36
3.2	Identificação de modificações estruturais .....	38
3.2.1	Adição de uma massa pontual .....	38
3.2.2	Redução de rigidez localizada.....	40
3.2.3	Adição de uma massa pontual e redução de rigidez localizada .....	41
3.2.4	Fissura aberta numa viga de Bernoulli-Euler .....	41
4	Resultados .....	45
4.1	Identificação de forças aplicadas numa viga.....	45
4.1.1	Trasmissibilidade de forças .....	46
4.1.2	Transmissibilidade de deslocamentos .....	48
4.2	Identificação de modificações estruturais numa viga.....	51
4.2.1	Adição de uma massa pontual .....	51
4.2.2	Redução de rigidez localizada.....	55
4.2.3	Adição de massa e redução de rigidez localizada em simultâneo.....	58
4.2.4	Formação de uma fissura aberta numa viga.....	62
4.3	Identificação de forças exteriores aplicadas numa placa.....	67
4.3.1	Transmissibilidade de deslocamentos .....	68
4.4	Adição de uma massa pontual na placa .....	71
5	Conclusões gerais e sugestões para trabalho futuro.....	76
	Bibliografia .....	78
	Anexo.....	82

# Lista de tabelas

Tabela 4.1: Propriedades da viga .....	46
Tabela 4.2: Propriedades da placa .....	67
Tabela 4.3: Propriedades da discretização da placa em elementos finitos .....	67

# Lista de figuras

Figura 2.1: Modelação de um sistema discreto com três graus de liberdade (b) a partir do sistema contínuo (a) desprezando-se o amortecimento [5] .....	7
Figura 2.2: Representação das extensões infinitesimais num referencial cartesiano [8] .....	9
Figura 2.3: Representação dos vários componentes da tensão num cubo infinitesimal [8] .....	9
Figura 2.4: Graus de liberdade num elemento de viga de Bernoulli-Euler .....	12
Figura 2.5: Elemento retangular [21] .....	16
Figura 2.6: Ilustração dos <i>conjuntos</i> de graus de liberdade $U$ , $K$ e $C$ [10] .....	20
Figura 2.7: Representação dos <i>conjuntos</i> $U$ , $K$ , $A$ e $C$ num sistema arbitrário com múltiplos graus de liberdade [10] .....	23
Figura 2.8: Viga com múltiplas fissuras [24] .....	28
Figura 2.9: Comparação da variação de rigidez na vizinhança de uma fissura entre a redução triangular (traço contínuo) e o método de Christides and Barr [25] (tracejado) [24] .....	28
Figura 2.10: Redução triangular de rigidez num elemento de viga de Bernoulli-Euler [24] .....	29
Figura 3.1: Exemplo de forças de reação e forças de excitação aplicadas numa estrutura com forma arbitrária .....	34
Figura 4.1: Viga encastrada nas extremidades descretizada em seis elementos finitos .....	46
Figura 4.2: Evolução das reações com a frequência de vibração .....	47
Figura 4.3: Comparação entre as forças de reação no nó 1 calculadas com o método direto e estimadas através do conceito de transmissibilidade de forças .....	47
Figura 4.4: Erro acumulado para combinações de forças e momentos exteriores até 3 incógnitas ....	48
Figura 4.5: Deslocamentos dos <i>conjuntos</i> de graus de liberdade $U$ e $K$ .....	49
Figura 4.6: Deslocamentos do <i>conjunto</i> $U$ calculados pelo método direto e através do conceito de transmissibilidade de deslocamentos .....	49
Figura 4.7: Erro acumulado para combinações até três incógnitas .....	50
Figura 4.8: Erro acumulado corrigido para combinações até três incógnitas .....	51
Figura 4.9: Viga livre nas extremidades descretizada em seis elementos finitos com uma massa pontual adicional .....	52
Figura 4.10: Deslocamentos dos <i>conjuntos</i> $U$ e $K$ da viga modificada .....	53
Figura 4.11: Deslocamentos do <i>conjunto</i> $U$ com e sem adição de massa na estrutura original .....	53
Figura 4.12: Erro acumulado para combinações até três incógnitas .....	53
Figura 4.13: Erro acumulado corrigido para combinações até três incógnitas .....	54

Figura 4.14: Massa pontual calculada para cada frequência de vibração .....	55
Figura 4.15: Viga livre nas extremidades discretizada em seis elementos finitos com uma redução de rigidez localizada no nó 2.....	55
Figura 4.16: Deslocamentos dos conjuntos $U$ e $K$ da viga modificada.....	56
Figura 4.17: Deslocamentos do conjunto $U$ da estrutura fissurada e da estrutura original .....	57
Figura 4.18: Erro acumulado corrigido para combinações até três incógnitas .....	58
Figura 4.19: Percentagem de redução de rigidez calculada para cada frequência de vibração .....	58
Figura 4.20: Viga livre nas extremidades discretizada em seis elementos finitos com uma redução de rigidez localizada no nó 2 e uma massa pontual adicionada no nó 4.....	59
Figura 4.21: Deslocamentos dos conjuntos $U$ e $K$ da viga modificada.....	59
Figura 4.22: Deslocamentos do conjunto $U$ da viga original e da viga com alterações estruturais ....	60
Figura 4.23: Erro acumulado corrigido para combinações até quatro incógnitas.....	60
Figura 4.24: Erro acumulado para combinações de duas incógnitas .....	61
Figura 4.25: a) Massa pontual calculada para cada frequência de vibração b) Percentagem de redução de rigidez calculada para cada frequência de vibração .....	62
Figura 4.26: Viga livre nas extremidades discretizada em seis elementos finitos com uma fissura no elemento 4.....	63
Figura 4.27: Deslocamentos/rotações dos conjuntos $U$ e $K$ da viga modificada.....	64
Figura 4.28: Rotações do conjunto $U$ da viga original e da viga com alterações estruturais .....	64
Figura 4.29: Erro acumulado corrigido para combinações até cinco incógnitas.....	65
Figura 4.30: Forças reconstruídas para toda a gama de frequências .....	66
Figura 4.31: Placa modelada em elementos finitos .....	67
Figura 4.32: Nós dos conjuntos $U$ e $K$ e localização da força harmônica exterior.....	68
Figura 4.33: a) Deslocamento do conjunto $U$ b) Deslocamentos do conjunto $K$ .....	69
Figura 4.34: Erro acumulado corrigido para combinações de uma e duas incógnitas .....	70
Figura 4.35: Reconstrução de forças para um falso positivo .....	70
Figura 4.36: Localização da força harmônica de excitação e da massa pontual .....	71
Figura 4.37: Localização dos nós dos conjuntos $U$ e $K$ .....	72
Figura 4.38: Deslocamentos do conjunto $U$ da placa original e da placa modificada .....	72
Figura 4.39: Erro acumulado para combinações de uma e duas incógnitas .....	73
Figura 4.40: Reconstrução de forças nas possíveis combinações ótimas de três incógnitas.....	74
Figura 4.41: Massa pontual calculada para toda a gama de frequências de vibração.....	74



# Nomenclatura

## Operadores e Notação Matricial

$diag( \ )$	matriz diagonal
$[ \ ]^{-1}$	inversa de uma matriz quadrada
$[ \ ]^+$	pseudo-inversa de uma matriz
$[ \ ]^T, \{ \ }^T$	transposta de uma matriz, vetor coluna
$ \cdot $	valor absoluto
$\{0\}$	vetor coluna nulo

## Termos básicos e subscritos

$t$	variável temporal
$i$	unidade imaginária, $\sqrt{-1}$
$i, j, k, l$	índices
$[I]$	matriz identidade
$\{\dot{y}(t)\}, \{\ddot{y}(t)\}$	primeira e segunda derivadas temporais do deslocamento
$\{\dot{\theta}(t)\}, \{\ddot{\theta}(t)\}$	primeira e segunda derivadas temporais da rotação
$\{Y\}$	vetor de deslocamentos
$\{F\}$	vetor de forças
$\omega$	frequência de vibração forçada
$\omega_n$	frequência de vibração natural
$\omega_r$	$r$ – ésima frequência de vibração
$r$	número do modo de vibração

### Propriedades dos Modelos e Parâmetros Modais

$[M], [K], [C]$	matrizes globais de massa, rigidez e amortecimento viscoso globais
$[M^e], [K^e], [C^e]$	matrizes elementares de massa, rigidez e amortecimento viscoso
$[Z(\omega)]$	matriz de rigidez dinâmica
$[H(\omega)]$	função de resposta em frequência
$[\Phi]$	matriz dos modos de vibração/vetores próprios
$\alpha$	coeficiente de amortecimento proporcional de rigidez
$\beta$	coeficiente de amortecimento proporcional de massa

### Propriedades de Transmissibilidade

$[T_{UK}^{(f)}]$	matriz de transmissibilidade de forças dos DOF's $K$ para os DOF's $U$
$[T_{UE}^{(f)}]$	matriz de transmissibilidade de forças dos DOF's $E$ para os DOF's $U$
$[T_{UK}^{(d)}]$	matriz de transmissibilidade de deslocamentos dos DOF's $K$ para os DOF's $U$

# Lista de abreviações

**DOF** Degree of freedom (grau de liberdade). ix

**SDOF** Single degree of freedom (Um grau de liberdade). 2, 18, 21

**MDOF** Multiple degrees of freedom (Múltiplos graus de liberdade). 2, 18, 21, 30

**FRF** Função de resposta em frequência. 7, 19, 20

**kg** Quilogramas. 55, 58, 70

**g** Gramas. 47, 49-50, 67

**Hz** Hertz. 65

**m** Metros. 59, 63

**rad** Radianos. 42

**s** Segundos. 42

**N** Newtons. 42-44, 46, 48, 51, 59, 62, 64, 67



# Capítulo 1

## 1 Introdução

### 1.1 Motivação e descrição do problema

No ramo da dinâmica estrutural é bastante importante estimarem-se forças de excitação para se realizar uma análise dinâmica de estruturas e, tipicamente, sempre que possível, utilizam-se transdutores de forças para se efetuarem medições diretas das forças exteriores aplicadas [1].

Para que a medição realizada através dos sensores seja precisa, é necessário que o sensor de forças se localize no local exato onde se pretende efetuar a medição. Contudo, frequentemente revela-se impossível colocar sensores na posição necessária por razões de inacessibilidade, movimento da região, perigo, entre outras [2].

Por conseguinte, visando-se ultrapassar o problema descrito no parágrafo anterior, recorre-se a métodos indiretos para se obterem os valores das amplitudes das forças exteriores aplicadas numa estrutura. Tais métodos permitem estimar as forças de forma indireta através da medição de respostas dinâmicas da estrutura, como por exemplo, acelerações, deslocamentos e forças de reação. Sendo assim, a determinação da amplitude das forças é um problema inverso. De forma oposta, num problema direto, a amplitude e a localização das forças exteriores são conhecidas e pretende-se estimar as reações nos suportes da estrutura. Recorrendo-se ao problema inverso torna-se possível determinar o número de forças aplicadas, a sua localização e a respetiva amplitude, caso estes parâmetros sejam desconhecidos *a priori*.

Embora o problema inverso de identificação de forças possa ser resolvido de forma simplista, através das respostas dinâmicas da estrutura, revertendo-se o problema direto, este problema geralmente não é bem-posto. Tal ocorre visto que este tipo de problema não cumpre o requisito de

Hadamard de existência de solução, em que a mesma é única e depende continuamente dos parâmetros de entrada. Aliado ao referido anteriormente, os problemas descritos são particularmente sensíveis a perturbações nas medições.

Diversas teorias relativas a métodos inversos têm sido foco de investigação ao longo dos anos. Todas as teorias têm em comum os efeitos de matrizes mal-condicionadas, reflexo da natureza do problema inverso. Estes problemas são frequentemente ultrapassados através da utilização da pseudo-inversa aplicada em sistemas sobre-dimensionados, através da decomposição em valores singulares (SVD) [3-4] e pelo uso de filtros de Kalman [5-6].

Na literatura encontram-se vários trabalhos de investigação relacionados com a identificação de forças. Na referência bibliográfica [7] identifica-se forças em placas para sistemas com propriedades dependentes do tempo e em [8] identificam-se forças harmónicas.

Os diferentes métodos que visam identificar forças através da medição das respostas dinâmicas classificam-se em três categorias: métodos determinísticos, métodos estocásticos e métodos baseados em inteligência artificial. O grupo dos métodos determinísticos contém duas classes distintas: métodos no domínio da frequência e métodos no domínio do tempo [9].

Ao longo desta trabalho apresenta-se um método indireto de identificação de forças no domínio da frequência, proposto por Neves, Maia e Lage [1,10,11], que se apresenta como uma alternativa à medição direta das forças que atuam numa estrutura. O método consiste em estimar a localização e a amplitude de forças de excitação exteriores através da medição de forças de reação ou deslocamentos dinâmicos de uma estrutura, utilizando-se fundamentos de transmissibilidade em sistemas com múltiplos graus de liberdade. Desta forma, a determinação de forças transfigura-se num problema inverso. Em [1,9,10,11] apresentam-se diversas corroborações experimentais do método referido.

Usualmente, a transmissibilidade de forças é definida na literatura para sistemas com um único grau de liberdade (SDOF), simplesmente como um rácio entre o módulo da magnitude da força transmitida para o suporte e o módulo da magnitude da força aplicada. Para sistemas SDOF, a transmissibilidade de deslocamentos e transmissibilidade de forças são caracterizadas pela mesma expressão, contudo este não é o caso para sistema com múltiplos graus de liberdade (MDOF). Para sistemas MDOF a transmissibilidade de deslocamentos relaciona um conjunto de respostas conhecidas e um conjunto de respostas desconhecidas, associadas a um determinado conjunto de forças aplicadas. A transmissibilidade de forças definida para um sistema MDOF relaciona um conjunto de forças de reação e um conjunto de forças aplicadas [13].

Uma das primeiras abordagens para se generalizar o conceito de transmissibilidade para sistemas com múltiplos graus de liberdade foi proposta por Ewins et al. em 1998 [14]. Esta abordagem revela-se bastante limitante, uma vez que a definição de transmissibilidade proposta depende do caminho percorrido entre as coordenadas especificadas. Uma generalização mais consistente do conceito de transmissibilidade para sistemas MDOF foi proposta por Ribeiro em 1998 [15] e por Maia et al. em 2006 [16].

O conceito de identificação de forças através de fundamentos de transmissibilidade pode ser adaptado a várias áreas de interesse científico. Por exemplo, é possível expandir o conceito de

identificação de forças num problema de identificação de dano estrutural, como introduzido por Johnson et al. na referência bibliográfica [17]. O ramo de identificação de dano estrutural através do conceito transmissibilidade, bem como variações do mesmo, tem sido alvo de algum trabalho de investigação, nomeadamente por Sampaio et al. em 1999 [18], 2000 [19] e 2001 [20], com resultados limitados, e por Maia et al em 2007 [21], com uma evolução bastante promissora.

A monitorização de modificações estruturais utilizando-se conjuntos de dados medidos experimentalmente é um tópico de incessante investigação ao longo de décadas. A maioria do desenvolvimento neste tópico baseia-se na utilização de dados modais de uma estrutura como dados padrão, obtidos para uma estrutura sem dano. Todos os subsequentes resultados de testes estruturais comparam-se com os dados padrão e, qualquer desvio nas propriedades modais obtidas é usado para estimar a possível modificação estrutural.

O método de identificação de modificações estruturais estudado ao longo desta trabalho baseia-se no trabalho de Neves et al., que propuseram em [22] uma abordagem distinta ao problema de identificação de modificações estruturais. Na referência bibliográfica [22] os autores demonstraram que qualquer modificação estrutural de rigidez, massa ou amortecimento pode ser interpretada como forças adicionais aplicadas na estrutura original. Sendo assim, as modificações estruturais podem ser determinadas identificando-se as forças adicionais aplicadas numa estrutura sem dano, utilizando-se o método de identificação de forças baseado em fundamentos de transmissibilidade.

A grande vantagem deste método é que, tipicamente, a localização das forças adicionais geradas pela modificação estrutural permite determinar a localização das modificações estruturais correspondentes de forma imediata ou quase imediata. No entanto, ainda não se encontra na literatura qualquer tipo de validação experimental do método de identificação de modificações estruturais através da aplicação do conceito de transmissibilidade.

Tipicamente, no ramo da Engenharia Aeroespacial a deteção de dano estrutural é efetuada utilizando-se, por exemplo, raios-X, raios gama e ultra-sons. Estas técnicas são bastante dispendiosas, envolvem uma inspeção morosa e, não raras vezes, a deteção do possível dano estrutural fica limitada a uma área próxima da superfície. Sendo assim, o método apresentado neste trabalho tem o potencial de se revelar uma alternativa de deteção de dano mais atrativa do ponto de vista financeiro, comparativamente às técnicas usuais apresentadas. Além do mais, a utilização de respostas dinâmicas na deteção de modificações estruturais permite uma monitorização contínua de uma estrutura.

## **1.2 Objetivos**

Ao longo desta trabalho pretende-se definir de forma clara e concisa uma metodologia para o método de identificação de forças e dano estrutural utilizando-se o conceito de transmissibilidade. Uma vez descrita a metodologia, pretende-se aplicar a mesma com o intuito de se identificar numericamente forças exteriores e dano estrutural para o caso de uma viga e de uma placa, visando-se demonstrar a sua aplicabilidade e analisar as diversas dificuldades que resultam da formulação do problema inverso. Pretende-se também elaborar algumas normas que permitam facilitar a interpretação do método.



# Capítulo 2

## 2 Fundamentos teóricos

Ao longo deste capítulo efetua-se uma compilação de vários fundamentos teóricos essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Na secção 2.1 apresenta-se conceitos fundamentais de vibração mecânica estrutural. Na secção 2.1.2 resume-se a modelação de um sistema contínuo num sistema discreto com múltiplos graus de liberdade.

Na secção 2.2 descreve-se de forma resumida a teoria de elasticidade linear para sólidos, nomeadamente os componentes da extensão e da tensão e a Lei de Hooke generalizada.

O método dos elementos finitos é descrito na secção 2.3, apresentando-se na secção 2.3.1 a dedução das matrizes de massa e de rigidez elementares para um elemento de viga de Bernoulli-Euler. Posteriormente, na secção 2.3.2 mostra-se a dedução das matrizes de massa e de rigidez elementares para elementos de placa de Kirchhoff-Love.

Nas secções 2.4 e 2.5 descrevem-se os conceitos de transmissibilidade de forças e de transmissibilidade de deslocamentos para sistemas com múltiplos graus de liberdade, respetivamente. Estes fundamentos serão usados de forma extensiva ao longo deste trabalho, visto que os mesmos são a base do método de identificação de forças e dano estrutural.

Ao longo da secção 2.6 apresenta-se a modelação de diversas modificações estruturais como forças adicionais aplicadas numa estrutura isenta de dano estrutural. Nas secções 2.6.1 e 2.6.2 efetua-se a modelação de uma adição de massa pontual e de uma redução de rigidez localizada. Na secção 2.6.3 desenvolve-se a modelação de uma adição de massa pontual e de uma redução de rigidez localizada de forma simultânea. Na secção 2.6.4 apresenta-se a modelação de uma fissura numa viga de Bernoulli-Euler.

## 2.1 Vibração mecânica

Um movimento que se repete num determinado intervalo de tempo, como por exemplo o balancear de um pêndulo, tem a designação de *vibração* ou *oscilação*. A teoria da vibração estuda os movimentos oscilatórios de corpos e as forças associadas aos mesmos [23].

Geralmente, um sistema vibratório inclui meios de armazenamento de energia cinética (massa ou inércia), meios de armazenamento de energia potencial (gravidade, mola, elasticidade) e meios através dos quais energia é dissipada (amortecedor). Um sistema de vibração envolve a conversão de energia potencial em energia cinética e vice-versa onde, parte desta energia é dissipada no caso em que o amortecimento é considerado.

### 2.1.1 Sistemas contínuos

A grande maioria dos sistemas com aplicações práticas de engenharia são sistemas contínuos, sistemas estes caracterizados por possuírem infinitos graus de liberdade. As equações que descrevem o movimento de sistemas contínuos são equações diferenciais parciais, deduzidas a partir da aplicação da Segunda Lei de Newton no diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal de um sistema a estudar. A solução em vibração livre de um sistema contínuo é obtida assumindo-se movimento harmónico e aplicando as respetivas condições de fronteira. O resultado deste tipo de solução é um número infinito de frequências naturais e correspondentes modos de vibração. Os deslocamentos do sistema em vibração livre obtêm-se através da sobreposição linear dos diferentes modos de vibração e as constantes envolvidas são determinadas impondo-se as condições de fronteira iniciais [23].

### 2.1.2 Sistemas com múltiplos graus de liberdade

Qualquer sistema contínuo pode ser modelado como um sistema discreto com múltiplos graus de liberdade. Naturalmente, quanto maior for o número de graus de liberdade considerados, mais rigorosos são os resultados obtidos. Um método simplista de modelar um sistema contínuo como um sistema com múltiplos graus de liberdade é substituir a massa distribuída da estrutura por um sistema com um número finito de corpos rígidos, assumindo-se que o conjunto de corpos rígidos estão conectados através de membros elásticos e de amortecimento sem massa [23]. Na figura 2.1 representa-se um exemplo de modelação de um sistema contínuo num sistema com múltiplos graus de liberdade, desprezando-se o amortecimento.

Assumindo um sistema com múltiplos graus de liberdade, a resposta de uma estrutura linear viscoelástica pode ser deduzida utilizando-se a Segunda Lei de Newton. Depois de definidas as coordenadas que definem as posições das massas pontuais e corpos rígidos do sistema determina-se o equilíbrio estático do sistema. De seguida estima-se os deslocamentos das massas e corpos rígidos, a partir das respetivas posições de equilíbrio estático. Por fim aplica-se a Segunda Lei de Newton para cada corpo rígido.

Para cada massa  $m_i$  define-se a seguinte expressão,

$$m_i \ddot{y}_i = \sum_j F_{ij} \quad (2.1)$$

onde  $\ddot{y}_i$  é a segunda derivada temporal do deslocamento de translação  $y_i$  de cada massa  $m_i$  e  $\sum_j F_{ij}$  representa o somatório das forças que atuam na respectiva massa.

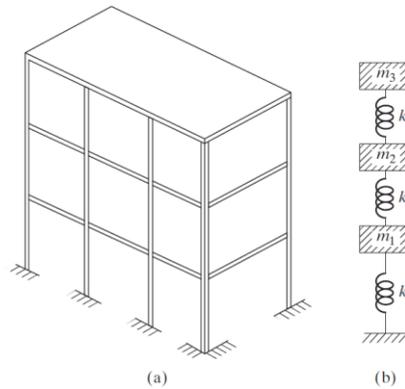


Figura 2.1: Modelação de um sistema discreto com três graus de liberdade (b) a partir do sistema contínuo (a) desprezando-se o amortecimento [23]

Para cada corpo rígido com inércia  $J_i$  estabelece-se a seguinte equação,

$$J_i \ddot{\theta}_i = \sum_j M_{ij} \quad (2.2)$$

onde  $\ddot{\theta}_i$  é a segunda derivada temporal da rotação  $\theta_i$  de cada corpo rígido e  $\sum_j M_{ij}$  representa o somatório de todos os momentos que atuam no respectivo corpo rígido.

Considerando as equações (2.1) e (2.2), bem como as definições de amortecimento e rigidez, escreve-se a equação matricial (2.3),

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [C]\{\dot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.3)$$

onde  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respetivamente. O vetor  $\{y(t)\}$  contém os deslocamentos ou rotações dos vários graus de liberdade da estrutura e os vetores  $\{\dot{y}(t)\}$  e  $\{\ddot{y}(t)\}$  representam a primeira e a segunda derivadas temporais do vetor  $\{y(t)\}$ , respetivamente. O vetor  $\{f(t)\}$  representa as forças ou momentos de excitação aplicados na estrutura a analisar.

Assumindo forças de excitação harmónicas e discretas, com frequência de vibração forçada  $\omega$ , os deslocamentos nodais também serão harmónicos e discretos com a mesma frequência de vibração  $\omega$ . Os deslocamentos nodais referidos são dados pela equação,

$$y(t) = Y e^{i\omega t} \quad (2.4)$$

Para se restringir a equação (2.3) para o domínio da frequência  $\omega$ , esta equação pode ser reescrita usando-se a transformada de Fourier obtendo-se,

$$[[K] + i\omega[C] - \omega^2[M]]\{Y(\omega)\} = \{F(\omega)\} \quad (2.5)$$

Desta forma, define-se a matriz de rigidez dinâmica  $[Z(\omega)]$  como,

$$[Z(\omega)] = [[K] + i\omega[C] - \omega^2[M]] \quad (2.6)$$

Define-se também a matriz de receptância  $[H(\omega)]$  que se obtém invertendo-se a matriz  $[Z(\omega)]$ . A matriz  $[H(\omega)]$  denomina-se função de resposta em frequência, ou simplesmente FRF. Assim sendo, pode-se explicitar o vetor  $\{Y(\omega)\}$  na equação (2.5) da seguinte forma,

$$\{Y(\omega)\} = [H(\omega)]\{F(\omega)\} \quad (2.7)$$

As matrizes de massa  $[M]$  e de rigidez  $[K]$  podem ser normalizadas através das seguintes propriedade de ortogonalidade,

$$\begin{aligned} [\Phi]^T[M][\Phi] &= [I] \\ [\Phi]^T[K][\Phi] &= \mathbf{diag}(\omega_r^2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde  $[\Phi]$  é a matriz que contém os modos de vibração e  $\omega_r$  é a  $r$ -ésima frequência natural. Assumindo amortecimento proporcional, dado por  $[C] = \alpha[K] + \beta[M]$ , em que  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes, o sistema representado na equação (2.7) define-se da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \{Y(\omega)\} &= [H(\omega)]\{F(\omega)\} \\ &= [\Phi] \left( \mathbf{diag}(\omega_r^2 - \omega^2) + i\omega(\alpha \mathbf{diag}(\omega_r^2) + \beta[I]) \right)^{-1} [\Phi]^T \{F\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

## 2.2 Teoria da elasticidade linear para sólidos

A aplicação de forças externas num determinado material de uma estrutura provoca a deformação da mesma. Se a amplitude das forças externas não ultrapassar um certo limite, as deformações desaparecem com a remoção das forças. O fenómeno descrito caracteriza a propriedade de *elasticidade* dos materiais [24].

A teoria da elasticidade linear tem como base variadas assunções simplificadoras. Assume-se homogeneidade de um corpo elástico e que a matéria que o constitui está continuamente distribuída ao longo do seu volume. Sendo assim, cada volume infinitesimal do corpo a estudar tem as mesmas propriedades físicas que o próprio corpo. Considera-se ainda isotropia do material, isto é, as propriedades elásticas são as mesmas em todas as direcções.

De uma forma geral, os materiais não obedecem às assunções descritas previamente. No entanto, verifica-se experimentalmente que as soluções da teoria de elasticidade linear, baseadas nas assunções de homogeneidade e isotropia, têm um grau de exatidão elevado [24].

### 2.2.1 Componentes da extensão

Para um corpo elástico, cada deslocamento tem duas componentes, uma das quais resulta de movimentos relativos ou distorções do próprio corpo (extensões) e a outra componente é o movimento de corpo rígido, uniforme ao longo do corpo elástico.

O tensor das extensões para pequenas deformações  $\varepsilon_{ij}$  é dado em notação indicial pela equação seguinte [25],

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.10)$$

onde o termo  $u_{i,j}$  representa a derivada parcial do deslocamento  $u_i$  em relação às coordenadas cartesianas  $x_j$  e o termo  $u_{j,i}$  representa a derivada parcial do deslocamento  $u_j$  em relação às coordenadas cartesianas  $x_i$ . Tendo um referencial cartesiano como referência, as extensões calculadas a partir da equação (2.10) encontram-se representadas na figura 2.2.

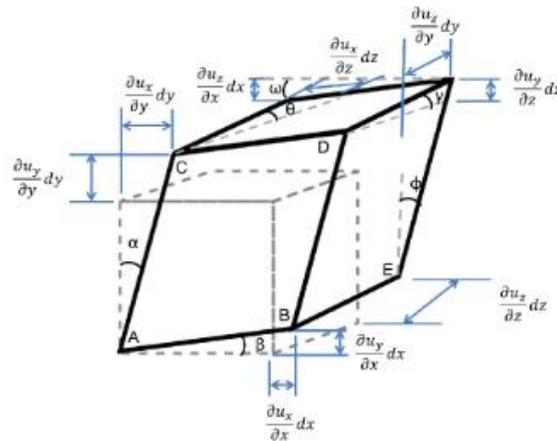


Figura 2.2: Representação das extensões infinitesimais num referencial cartesiano [25]

## 2.2.2 Componentes da tensão

Para a descrição dos vários componentes da tensão estuda-se um cubo infinitesimal, num referencial cartesiano, representado na figura 2.3.

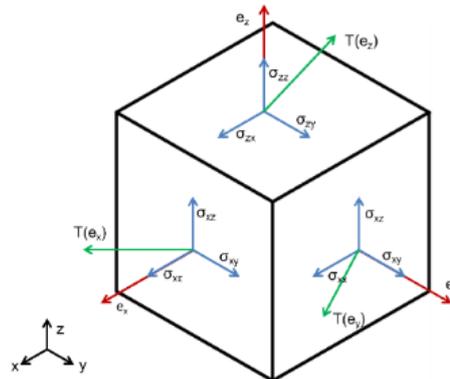


Figura 2.3: Representação dos vários componentes da tensão num cubo infinitesimal [25]

As componentes da tensão alinhadas com a normal dos três planos perpendiculares são designadas de tensões normais. Por sua vez, as componentes perpendiculares à normal de cada plano designam-se de tensões de corte. Augustin-Louis Cauchy demonstrou que a força tem uma relação linear com a normal à superfície. Esta relação pode ser escrita da seguinte forma,

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

onde  $\{T\}$  é o vetor das forças nas superfícies com normal  $\{e\}$  e  $[\sigma]$  é o tensor das tensões. Uma propriedade importante do tensor das tensões é a simetria, condição necessária para satisfazer a conservação do momento angular [25].

### 2.2.3 Lei de Hooke Generalizada

A lei de Hooke Generalizada é uma postulação escrita na forma de um tensor de quarta ordem, que relaciona linearmente o tensor das tensões e das extensões,

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.12)$$

onde os coeficientes  $E_{ijkl}$  são designados de constantes elásticas.

Para um material isotrópico é possível escrever a equação (2.12) matricialmente, em ordem a duas constantes, designadas de *constantes de Lamé*,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\mu & 0 & 0 \\ & & & & 2\mu & 0 \\ & & & & & 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

*Simétrica*

ou em notação indicial,

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (2.14)$$

onde  $\delta_{ij}$  representa o *delta de Kroenecker*.

Torna-se conveniente inverter a equação (2.14) exprimindo as extensões como função das tensões,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (2.15)$$

Apesar das constantes de Lamé serem perfeitamente aplicáveis de um ponto de vista matemático, é usual usar-se constantes de engenharia, obtidas através de medições efetuadas em ensaios mecânicos. Estas constantes são o Módulo de Young Longitudinal  $E$ , o Módulo de Young Transversal  $G$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$ . As relações entre as constantes de Lamé e as constantes de engenharia são [25],

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (a)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (b) \quad (2.16)$$

Analisando a equação (2.16b) é possível concluir que para  $\lambda$  ser finito, o coeficiente de Poisson  $\nu$  deve ter valores entre [25],

$$-1 < \nu < 0,5 \quad (2.17)$$

A forma explícita da lei de Hooke generalizada, em termos das coordenadas de engenharia, escreve-se mais facilmente na forma inversa,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2G} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

*Simétrica*

## 2.3 Método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos baseia-se no conceito de subdivisão do domínio de um sistema contínuo em partes menores, denominadas de elementos finitos. O conjunto de linhas e pontos que conectam cada elemento finito designa-se por malha e cada ponto em particular denomina-se de nó. Consequentemente, considera-se que a resposta do modelo discreto, resultante da assemblagem de todos os elementos finitos que o constituem, aproxima a resposta do sistema contínuo. Este método é particularmente importante uma vez que a resolução analítica da maioria dos problemas de engenharia é extremamente árdua, ou mesmo impossível. Visando-se facilitar a resolução destes problemas aplicam-se técnicas de descretização, como é o caso do método dos elementos finitos.

A modelação de um sistema em elementos finitos implica a assemblagem das matrizes de rigidez e de massa elementares associadas a cada um dos elementos finitos que constituem a malha, obtendo-se assim as matrizes de rigidez e de massa globais. Nas secções 2.3.1 e 2.3.2 apresenta-se a dedução das matrizes de rigidez e de massa para um elemento de viga de Bernoulli-Euler e para um elemento de placa de Kirchhoff-Love, respetivamente.

### 2.3.1 Teoria de viga de Bernoulli-Euler

Na teoria de viga de Bernoulli-Euler assume-se que as secções planas perpendiculares ao eixo da viga permanecem planas e perpendiculares ao mesmo eixo depois da deformação. Nesta teoria, o deslocamento transversal  $w$  da viga é descrito pela seguinte equação diferencial de quarta ordem (formulação forte),

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + c_f w = q(x) \quad (2.19)$$

onde  $EI = E(x)I(x)$  e  $c_f = c_f(x)$  são funções que variam ao longo do eixo longitudinal da viga e o seu valor está compreendido entre 0 e o comprimento da viga  $L$ . A constante  $E$  representa o módulo de elasticidade longitudinal,  $I$  refere-se ao segundo momento de área em relação ao eixo transversal da viga,  $q$  é o esforço transversal distribuído e  $c_f$  é o módulo de rigidez da fundação elástica, que se despreza nas aplicações futuras do elemento de viga de Bernoulli-Euler. Uma vez que a equação (2.19) é de quarta ordem são necessárias quatro condições de fronteira para a sua resolução [26].

Para a dedução da equação matricial de cada elemento da viga, desprezando-se o amortecimento, analisa-se um elemento de viga  $\Omega_e = (x_a, x_b)$ , representado na figura 2.4. No caso de uma viga, cada nó possui dois graus de liberdade, um deslocamento transversal  $w$  e uma rotação  $\theta$ . Assumindo-se pequenos deslocamentos,  $\theta = \frac{dw}{dx}$ .

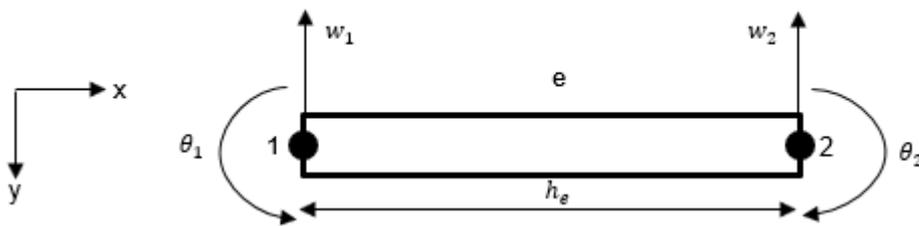


Figura 2.4: Graus de liberdade num elemento de viga de Bernoulli-Euler

Uma vez que cada elemento de viga de Bernoulli-Euler possui quatro graus de liberdade, define-se o vetor  $w_i^e$  que contém os deslocamentos transversais e as rotações dos dois nós do elemento,

$$w_i^e = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Para cada deslocamento e rotação nodal define-se uma função de interpolação. Neste caso utilizam-se funções de interpolação cúbicas,  $\phi_i^e$ , denominadas de funções de interpolação cúbicas de Hermite. Na situação particular da viga não é possível utilizar as função de aproximação cúbicas de Lagrange, uma vez que as mesmas são usadas para interpolar a função nos nós, mas não as suas derivadas [26].

Uma vez que cada elemento possui quatro graus de liberdade definem-se quatro funções de interpolação distintas,

$$\phi_i^e = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

O deslocamento transversal ao longo de um elemento de viga é função do tempo e da coordenada longitudinal  $x$ ,

$$w_h^e(x, t) = \phi_i^{eT}(x) \cdot w_i^e(t) \quad (2.22)$$

onde as função de interpolação do vetor  $\phi_i^e$  apenas dependem de  $x$  e os deslocamentos e rotações nodais do vetor  $w_i^e$  têm apenas dependência temporal. Sendo assim, a solução de um elemento finito  $\Omega_e = (x_a, x_b) = (x_e, x_{e+1})$  é uma combinação linear de quatro termos.

A energia cinética de um elemento de viga é dada por,

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^{h_e} \dot{w}^2 dx \quad (2.23)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do material contituente da viga e  $A$  é a área da secção transversal da mesma. Na equação (2.23) assume-se que  $\rho$  e  $A$  são constantes. Substituindo a equação (2.22) na equação (2.23) e ocultando o índice  $e$  para facilitar a visualização das equações,

$$T = \frac{1}{2} \dot{w}_i^T \cdot \rho A \int_0^{h_e} \phi_i \phi_i^T dx \cdot \dot{w}_i \quad (2.24)$$

A partir da equação (2.24) define-se a matriz de massa de um elemento de viga de Bernoulli-Euler, novamente para  $\rho$  e  $A$  constantes,

$$[M] = \rho A \int_0^{h_e} \phi_i \phi_i^T dx \quad (2.25)$$

A energia potencial de um elemento de viga de Bernoulli-Euler é dada por,

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^{h_e} w_{,xx}^2 dx \quad (2.26)$$

onde  $E$  é o Módulo de Young Longitudinal,  $I$  é o segundo momento de área e  $w_{,xx}$  é a segunda derivada do deslocamento transversal em ordem a  $x$ . Substituindo a equação (2.22) na equação (2.26), omitindo-se novamente o índice  $e$ , obtém-se,

$$U = \frac{1}{2} w_i^T \cdot EI \int_0^{h_e} \phi_{i,xx} \phi_{i,xx}^T dx \cdot w_i \quad (2.27)$$

A partir da equação (2.27) define-se a matriz de rigidez de um elemento de viga de Bernoulli-Euler através da equação (2.28),

$$[K] = EI \int_0^{h_e} \phi_{i,xx} \phi_{i,xx}^T dx \quad (2.28)$$

Uma vez definidas as matrizes de massa e rigidez elementares, é necessário deduzir as funções de interpolação  $\phi_i^e$ . Visto que na equação (2.19) aplica-se a segunda derivada do deslocamento transversal  $w$ , é necessário que a aproximação  $w_h^e(x)$  ao longo de um elemento finito seja, pelo menos, duas vezes diferenciável. Considerando elementos de dois nós, como o representado na figura 2.4, totalizam-se quatro graus de liberdade por elemento. Sendo assim, é condição necessária que o polinómio escolhido para  $w_h^e(x)$  seja, pelo menos, de terceiro grau [26],

$$w_h^e(x) = c_1^e + c_2^e x + c_3^e x^2 + c_4^e x^3 \quad (2.29)$$

Na equação anterior,  $c_1^e$ ,  $c_2^e$ ,  $c_3^e$  e  $c_4^e$  são constantes a determinar através da imposição de condições de fronteira. As condições de fronteira do elemento de viga da figura 2.4 são definidas da seguinte forma,

$$\begin{cases} w_h^e(0) = w_1 \\ \frac{dw_h^e}{dx}(0) = \theta_1 \\ w_h^e(l) = w_2 \\ \frac{dw_h^e}{dx}(l) = \theta_2 \end{cases} \quad (2.30)$$

Aplicando as condições de fronteira na equação (2.29) determinam-se as constantes  $c_1^e$  até  $c_4^e$ . Comparando a equação resultante com a definição representada na equação (2.22) determinam-se as funções de interpolação  $\phi_i^e$ ,

$$\begin{aligned} \phi_1^e &= 1 - 3\left(\frac{x}{h_e}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{h_e}\right)^3 \\ \phi_2^e &= x - 2h_e\left(\frac{x}{h_e}\right)^2 + h_e\left(\frac{x}{h_e}\right)^3 \\ \phi_3^e &= 3\left(\frac{x}{h_e}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{h_e}\right)^3 \\ \phi_4^e &= -h_e\left(\frac{x}{h_e}\right)^2 + h_e\left(\frac{x}{h_e}\right)^3 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Substituindo as funções de interpolação  $\phi_i^e$  na equação (2.25) obtém-se a matriz de massa elementar para o caso em que  $\rho_e$ , massa específica do elemento, e  $A_e$ , área da secção reta do elemento, são constantes ao longo do elemento de viga de comprimento  $h_e$  [26],

$$[M^e] = \frac{\rho_e A_e h_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h_e & 54 & -13h_e \\ & 4h_e^2 & 13h_e & -3h_e^2 \\ & & 156 & -22h_e \\ & \text{Simétrica} & & 4h_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Substituindo as funções de interpolação  $\phi_i^e$  na equação (2.28) obtém-se a matriz de rigidez elementar para o caso em que  $E_e$ , Módulo de Young longitudinal do elemento, e  $I_e$ , segundo momento de área da secção reta do elemento, são constantes ao longo do elemento de viga ,

$$[K^e] = \frac{E_e I_e}{h_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6h_e & -12 & 6h_e \\ & 4h_e^2 & -6h_e & 2h_e^2 \\ & & 12 & -6h_e \\ & \text{Simétrica} & & 4h_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

### 2.3.2 Teoria de Placas de Kirchhoff-Love

Uma placa é um corpo sólido constituído por dois planos paralelos, em que a dimensão lateral é bastante superior à espessura. A espessura define-se como a separação entre os planos paralelos da placa. Uma vez que a dimensão lateral de uma placa é muito superior à sua espessura, não é necessário modelar esta estrutura usando-se a teoria de elasticidade tridimensional.

O ponto de partida no desenvolvimento das equações que governam a placa é definir o campo de deslocamentos. Tipicamente, o campo de deslocamentos é escolhido na forma de uma combinação

linear de funções e da coordenada referente à espessura  $z$ . Sendo assim, se  $u_i(x, y, z, t)$  é o  $i$  – ésimo componente do deslocamento do prato, este é expandido na forma,

$$u_i(x, y, z, t) = \sum_{k=0}^N (z)^k u_i^{(k)}(x, y, t) \quad (2.34)$$

onde  $u_i^{(k)}$  são funções a serem determinadas [26].

Nesta secção apresenta-se a formulação de elementos finitos para a análise de placas finas, seguindo-se as suposições de Kirchhoff. A teoria de Kirchhoff estabelece que as normais retas ao plano médio indeformado, permanecem normais ao plano médio deformado. Com base nesta suposição desprezam-se os efeitos de corte transversal, tornando-se possível formular um conjunto de elementos finitos que satisfaça as condições de Kirchhoff [27].

Para o desenvolvimento da teoria de placas de Kirchhoff-Love considera-se que as cargas aplicadas são normais ao plano médio da placa e estabelecem-se as seguintes condições de Kirchhoff:

- i. Todos os pontos da normal ao plano médio possuem o mesmo deslocamento transversal;
- ii. A tensão  $\sigma_{xx}$  é desprezável;
- iii. As retas normais ao plano médio indeformado permanecem retas e normais ao plano médio após deformação;
- iv. Nos pontos do plano médio  $u = v = 0$ .

Com base nas suposições de Kirchhoff define-se a rotação da normal ao plano médio como sendo a primeira derivada da flecha, ou seja,

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.35.1)$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.35.2)$$

$$w = w_0 \quad (2.35.3)$$

Com base neste campo de deslocamentos considera-se que cada nó tem três graus de liberdade, um deslocamento na direção perpendicular ao plano da placa  $w$  e duas rotações  $\theta_x$  e  $\theta_y$ . Sendo assim, o vetor de deslocamentos para cada nó do elemento é dado por [27],

$$[u]^T = \left[ w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.36)$$

Aplicando a equação (2.10) definem-se as deformações não-nulas,

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.37.1)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.37.2)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.37.3)$$

O vetor das tensões associado é definido por,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

As equações que governam os deslocamentos na teoria de placas são derivadas através da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais. De seguida, obtém-se a formulação fraca da equação diferencial que rege os deslocamentos na teoria de placa, a partir da qual se determinam as formulações integrais das matrizes de massa e rigidez elementares [26].

As variáveis primárias nos nós de um elemento retangular são o deslocamento transversal  $w$  e as rotações ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ , dadas por  $\frac{\partial w}{\partial x}$  e por  $\frac{\partial w}{\partial y}$ , respetivamente. Para o desenvolvimento do modelo de elementos finitos assume-se que o deslocamento transversal  $w$  tem a forma,

$$w(x, y, t) = \sum_{j=1}^n \Delta_j(t) \varphi_j(x, y) \quad (2.39)$$

onde  $\Delta_j$  denota os valores nodais de  $w$  e as suas derivadas e  $\varphi_j$  são funções de interpolação de Hermite. Substituindo a equação (2.39) na formulação integral das matrizes de massa e rigidez elementares obtém-se a seguinte equação matricial [26],

$$[M^e]\{\ddot{\Delta}^e\} + [K^e]\{\Delta^e\} = \{F^e\} \quad (2.40)$$

onde  $[M^e]$  é a matriz de massa elementar,  $[K^e]$  é a matriz de rigidez elementar e  $\{F^e\}$  é o vetor de forças elementar.

Para a dedução das matrizes de Massa e de Rigidez Elementares considera-se o elemento retangular representado na figura 2.5.

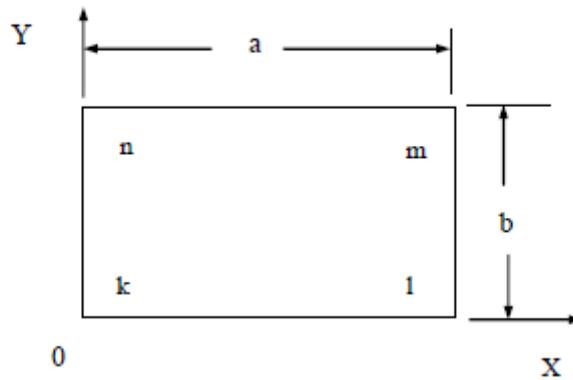


Figura 2.5: Elemento retangular [21]

A energia potencial de uma placa escreve-se,

$$U = \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.41)$$

onde  $D$  é o fator de rigidez da placa, considerado constante, dado por,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.42)$$

em que  $E$  é o Módulo de Young,  $h$  é a espessura da placa e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Durante a década de sessenta e setenta, a determinação de matrizes de rigidez viáveis para elementos de placa foi uma matéria intensivamente investigada. Nomeadamente, desenvolveram-se funções de interpolação para elementos triangulares e retangulares. Estudos comparativos provaram que os elementos retangulares, foco desta secção, levam a resultados mais precisos quando comparados com elementos triangulares com o mesmo número de graus de liberdade [14].

Cada nó  $n$  do elemento retangular contém três graus de liberdade: um deslocamento  $w_n$  na direção  $z$ , uma rotação  $(\theta_x)_n$  em torno do eixo do  $x$  e uma rotação  $(\theta_y)_n$  em torno do eixo do  $y$ . O vetor dos deslocamentos nodais fica,

$$\{\Delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\Delta_k\} \\ \{\Delta_l\} \\ \{\Delta_m\} \\ \{\Delta_n\} \end{Bmatrix} \quad \{\Delta_k\} = \begin{Bmatrix} w_k \\ \theta_{xk} \\ \theta_{yk} \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

onde se contabiliza um total de 12 graus de liberdade por elemento.

Uma expressão polinomial é convenientemente usada para definir as funções de interpolação em termos de 12 parâmetros. Uma vez que não se usam todos os termos de um polinómio completo de quarta ordem, os elementos são designados de elementos não conformes. A expressão que aproxima o deslocamento transversal  $w$  é dada por [28],

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \equiv \{Z\}^T \{A\} \quad (2.44)$$

onde,

$$\{A\}^T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}\} \quad (2.45)$$

e,

$$\{Z\}^T = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2 y, xy^2, y^3, x^3 y, xy^3] \quad (2.46)$$

A energia potencial escreve-se em função de  $\{A\}$  e  $\{Z\}$  da seguinte forma,

$$U = \frac{D}{2} \{A\}^T \int_0^b \int_0^a [S(x, y)] dx dy \{A\} \quad (2.47)$$

onde,

$$S(x, y) = \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right\} \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right\} \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right\}^T + \nu \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right\} \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right\} \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right\}^T + 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (2.48)$$

As constantes  $\alpha_1$  até  $\alpha_{12}$  podem ser determinadas através de 12 equações simultâneas que relacionam os valores de  $w$  e as suas derivadas nos nós, para os valores apropriados das coordenadas nodais,

$$w_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \dots \quad (2.49.1)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i = \theta_{xi} = \alpha_2 + 2\alpha_4 x_i + \alpha_5 y_i + \dots \quad (2.49.2)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i = \theta_{yi} = \alpha_3 + \alpha_5 x_i + 2\alpha_6 y_i + \dots \quad (2.49.3)$$

Listando as 12 equações escreve-se na forma matricial,

$$\{\Delta^e\} = [B]\{A\} \quad (2.50)$$

Na equação (2.50) o vetor  $\{A\}$  contém as 12 constantes e a matriz  $[B]$  é dada por,

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 \\ 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2 b & ab^2 & b^3 & a^3 b & ab^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 3a^2 b & b^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & a^3 & 3ab^2 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & b^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

onde  $a$  e  $b$  são o comprimento e a largura do elemento retangular, respetivamente [21].

Invertendo a equação (2.50),

$$\{A\} = [B]^{-1}\{\Delta^e\} \quad (2.52)$$

Esta inversão pode ser realizada computacionalmente ou algebricamente, como foi o caso do trabalho realizado por Zienkiewicz e Cheung na referência bibliográfica [29].

Considere-se a matriz  $[c]$  dada por,

$$[c] = [B]^{-1} \quad (2.53)$$

Introduzindo a matriz  $[c]$  na equação (2.52),

$$\{A\} = [c]\{\Delta^e\} \quad (2.54)$$

Substituindo a equação (2.54) na formulação da energia potencial,

$$U = \frac{D}{2} \{\Delta^e\}^T [c]^T \int_0^b \int_0^a [S(x,y)] dx dy [c] \{\Delta^e\} \quad (2.55)$$

Através da equação (2.55) define-se a matriz de rigidez elementar,

$$[K] = D [c]^T \int_0^b \int_0^a [S(x,y)] dx dy [c] \quad (2.56)$$

Assumindo-se  $\rho$  constante, a energia cinética de uma placa é dada por,

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_0^b \int_0^a \dot{w}^2 dx dy \quad (2.57)$$

Através da equação (2.44) define-se o quadrado da velocidade  $\dot{w}$  da seguinte forma,

$$[\dot{w}]^2 = \{A\}^T \{Z\} \{Z\}^T \{A\} \quad (2.58)$$

Substituindo a definição do vetor  $\{A\}$ , apresentada na equação (2.54), na equação (2.58) obtém-se,

$$[\dot{w}]^2 = \{\Delta^e\}^T [c]^T P(x, y) [c] \{\Delta^e\} \quad (2.59)$$

onde  $P(x, y)$  é dado por,

$$P(x, y) = \{Z\} \{Z\}^T \quad (2.60)$$

Assim sendo, a energia cinética fica,

$$T = \frac{\rho h}{2} \{\Delta^e\}^T [c]^T \int_0^b \int_0^a P(x, y) dx dy [c] \{\Delta^e\} \quad (2.61)$$

Através da equação (2.61) define-se a matriz de massa elementar,

$$[M] = \rho h [c]^T \int_0^b \int_0^a P(x, y) dx dy [c] \quad (2.62)$$

## 2.4 Transmissibilidade de forças para sistemas com múltiplos graus de liberdade

Considerando uma estrutura arbitrária, como a representada na figura 2.6, e aplicando-se o conceito de transmissibilidade de forças é matematicamente possível determinarem-se os valores das forças dinâmicas de reação nos suportes, sabendo as forças aplicadas. O inverso também é exequível, ou seja, é possível obterem-se os valores das forças aplicadas sabendo o valor das reações nos suportes.

Para um sistema SDOF a transmissibilidade de forças define-se como a razão entre a amplitude da força transmitida para o suporte e a força de excitação. Esta definição pode ser expandida para o um sistema MDOF. Com o intuito de se derivar uma formulação da transmissibilidade de forças para um sistema MDOF definem-se três *conjuntos* de graus de liberdade, representados na figura 2.6,

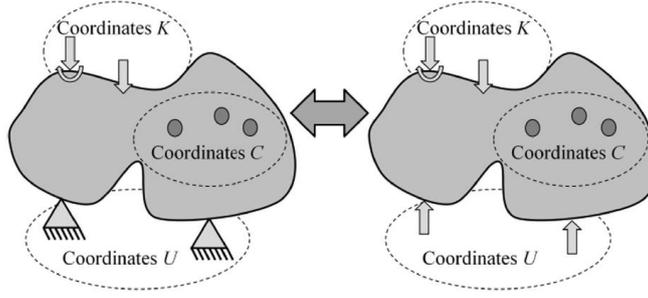


Figura 2.6: Ilustração dos conjuntos de graus de liberdade  $U$ ,  $K$  e  $C$  [10]

Analisando a figura 2.6 e tendo por base a referência bibliográfica [10], os diferentes graus de liberdade formam os seguintes conjuntos:

- i. *Conjunto K*: graus de liberdade onde se encontram aplicadas forças externas;
- ii. *Conjunto U*: graus de liberdade correspondentes às localizações das forças de reação geradas por constrangimentos de deslocamentos nos suportes;
- iii. *Conjunto C*: todos os restantes graus de liberdade, ou seja, aqueles onde não existem forças.

Assumindo que as forças de excitação são harmónicas e discretas, o comportamento dinâmico de um sistema com múltiplos graus de liberdade é descrito pela equação (2.63), como se demonstrou na secção 2.1.2.

$$[Z(\omega)]\{Y(\omega)\} = \{F(\omega)\} \quad (2.63)$$

Na equação (2.63), a matriz  $[Z(\omega)]$  é a matriz de rigidez dinâmica do sistema, dada pela equação (2.6),  $\{Y(\omega)\}$  é o vetor que contém as amplitudes dos deslocamentos dos vários graus de liberdade,  $\{F(\omega)\}$  é o vetor correspondente às forças de excitação aplicadas externamente e  $\omega$  é a frequência de excitação do sistema, igual à frequência das forças de excitação. Com todos os conjuntos de graus de liberdade definidos é possível escrever a relação entre as forças e os deslocamentos para cada  $n_K$  forças aplicadas,  $n_U$  reações e os restantes  $n_C$  graus de liberdade onde não se encontram aplicadas forças [10].

O vetor que contém a amplitude dos deslocamentos relaciona-se com o vetor de forças através da FRF,  $[H(\omega)]$ , definida como a inversa da matriz de rigidez dinâmica,  $[Z(\omega)]$ ,

$$\begin{Bmatrix} Y_K \\ Y_U \\ Y_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{KK} & H_{KU} \\ H_{UK} & H_{UU} \\ H_{CK} & H_{CU} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_K \\ F_U \end{Bmatrix} \quad (2.64)$$

Assumindo que os suportes são rígidos, os deslocamentos dos graus de liberdade do conjunto  $U$  são nulos,  $\{Y_U\} = \{0\}$ . Desta forma escreve-se a seguinte relação,

$$[H_{UK}]\{F_K\} + [H_{UU}]\{F_U\} = 0 \quad (2.65)$$

A partir da equação (2.65) exprime-se o vetor de forças  $\{F_U\}$  como função de  $\{F_K\}$ ,

$$\{F_U\} = -[H_{UU}]^{-1}[H_{UK}]\{F_K\} \quad (2.66)$$

Define-se assim a matriz de transmissibilidade de forças tendo por base a FRF [10],

$$[T_{UK}^{(f)}] = -[H_{UU}]^{-1}[H_{UK}] \quad (2.67)$$

onde o subscrito  $(f)$  indica que a matriz de transmissibilidade é uma matriz de transmissibilidade de forças.

Substituindo a equação (2.67) na equação (2.66) obtém-se a equação (2.68), através da qual se calcula as forças de reação da estrutura multiplicando-se a matriz de transmissibilidade de forças pelo vetor das forças externas [10].

$$\{F_U\} = [T_{UK}^{(f)}]\{F_K\} \quad (2.68)$$

#### 2.4.1 Transmissibilidade de forças introduzindo o conceito de forças fictícias

O conceito de força fictícia define que os graus de liberdade sem forças aplicadas, neste caso os graus de liberdade do *conjunto* C, têm forças aplicadas com amplitude nula, ou seja,  $\{F_C\} = 0$ . Utilizando o conceito apresentado generaliza-se a definição da transmissibilidade de forças, introduzindo-se os graus de liberdade sem forças aplicadas na matriz de transmissibilidade de forças.

Adaptando a equação (2.63) aos diferentes *conjuntos* de graus de liberdade e assumindo que os graus de liberdade correspondentes às forças de reação estão fixos, isto é,  $\{Y_U\} = 0$ , obtém-se a seguinte equação,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{KK} & \mathbf{Z}_{KC} & \mathbf{Z}_{KU} \\ \mathbf{Z}_{CK} & \mathbf{Z}_{CC} & \mathbf{Z}_{CU} \\ \mathbf{Z}_{UK} & \mathbf{Z}_{UC} & \mathbf{Z}_{UU} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Y}_K \\ \mathbf{Y}_C \\ \mathbf{Y}_U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_K \\ \mathbf{F}_C \\ \mathbf{F}_U \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{KK} & \mathbf{Z}_{KC} & \mathbf{Z}_{KU} \\ \mathbf{Z}_{CK} & \mathbf{Z}_{CC} & \mathbf{Z}_{CU} \\ \mathbf{Z}_{UK} & \mathbf{Z}_{UC} & \mathbf{Z}_{UU} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Y}_K \\ \mathbf{Y}_C \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_K \\ 0 \\ \mathbf{F}_U \end{Bmatrix} \quad (2.69)$$

onde o *conjunto* C agrupa todos os graus de liberdade com forças fictícias aplicadas.

Os autores da referência bibliográfica [16] propuseram rearranjar o sistema dado pela equação (2.69), reagrupando o *conjunto* K e o *conjunto* C num novo *conjunto* E, com  $(n_K + n_C)$  graus de liberdade. Desta forma, o novo *conjunto* agrupa todos os graus de liberdade onde não estão aplicadas as forças de reação da estrutura.

Incluindo a definição do *conjunto* E na equação (2.69) obtém-se,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{EE} & \mathbf{Z}_{EU} \\ \mathbf{Z}_{UE} & \mathbf{Z}_{UU} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Y}_E \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_E \\ \mathbf{F}_U \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

que se pode exprimir da seguinte forma,

$$\begin{cases} [\mathbf{Z}_{EE}]\{\mathbf{Y}_E\} = \{\mathbf{F}_E\} \\ [\mathbf{Z}_{UE}]\{\mathbf{Y}_E\} = \{\mathbf{F}_U\} \end{cases} \quad (2.71)$$

Resolvendo o sistema de equações (2.71),

$$\{F_U\} = ([Z_{UE}][Z_{EE}]^{-1})\{F_E\} \quad (2.72)$$

Através da definição de transmissibilidade previamente descrita define-se a matriz de transmissibilidade de forças através da equação (2.72),

$$[T_{UE}^{(f)}] = [Z_{UE}][Z_{EE}]^{-1} \quad (2.73)$$

onde a matriz  $[T_{UE}^{(f)}]$  tem dimensões  $n_U \times (n_K + n_C)$  e o subscrito  $(f)$  indica que a matriz de transmissibilidade refere-se à transmissibilidade de forças. Na equação (2.73) a matriz de transmissibilidade de forças está definida em termos da matriz de rigidez dinâmica e não em termos da da FRF, como no caso da equação (2.67).

A formulação da matriz de transmissibilidade de forças requer uma discretização da estrutura a analisar em graus de liberdade agrupados nos conjuntos  $K$ ,  $U$  e  $C$ . Em geral, as matrizes resultantes têm dimensões elevadas, resultando em cálculos computacionais potencialmente exigentes. Uma forma de minimizar este problema é ter em consideração que os  $n_C$  graus de liberdade do conjunto  $C$  não têm forças aplicadas,  $\{F_C = 0\}$ . Ou seja, o vetor  $\{F_E\}$  de dimensões  $(n_K + n_C)$  apenas tem as primeiras  $n_K$  entradas não nulas. Por conseguinte, para o cálculo do vetor das forças de reação  $\{F_U\}$ , através da equação (2.72), apenas se tem em consideração as primeiras  $n_K$  colunas da matriz de transmissibilidade de forças,  $[T_{UE}^{(f)}]$ .

Uma característica importante e útil da matriz de transmissibilidade de forças definida na equação (2.73) é que cada coluna da matriz se refere unicamente a uma força exterior aplicada, ou seja, a uma única coordenada do conjunto  $E$ . Conclui-se assim que a inclusão de coordenadas fictícias na definição da matriz de transmissibilidade de forças não altera a solução do problema, uma vez que as colunas referentes às coordenadas fictícias não influenciam o cálculo do vetor de forças  $\{F_U\}$ .

Sendo assim, revela-se sempre possível utilizar submatrizes da matriz de transmissibilidade de forças. Consequentemente, não é necessário o cálculo de uma nova matriz de transmissibilidade sempre que a localização das forças exteriores mudarem.

## 2.5 Transmissibilidade de deslocamentos para sistemas com múltiplos graus de liberdade

Para um determinado conjunto de forças harmônicas exteriores discretas aplicadas numa estrutura é possível relacionar a amplitude dos deslocamentos entre os graus de liberdade do sistema, aplicando-se o conceito de transmissibilidade de deslocamentos.

A definição de transmissibilidade de deslocamentos é análoga à definição de transmissibilidade de forças apresentada na secção anterior. Por conseguinte, para um sistema SDOF, a transmissibilidade de deslocamentos define-se como a razão entre o valor absoluto da amplitude dos deslocamentos aplicados e a amplitude dos deslocamentos transmitidos. Similarmente ao conceito de transmissibilidade de forças para um sistema SDOF, a definição de transmissibilidade de

deslocamentos pode ser expandida para um sistema MDOF. Considerando um sistema arbitrário com múltiplos graus de liberdade, como o representado na figura 2.7, podem definir-se diversos *conjuntos* de graus de liberdade. Usando a notação sugerida na referência bibliográfica [30], os *conjuntos* referidos definem-se da seguinte forma,

- i. *Conjunto U*: graus de liberdade onde se desconhecem o valor dos deslocamentos;
- ii. *Conjunto K*: graus de liberdade onde se conhecem o valor dos deslocamentos;
- iii. *Conjunto A*: graus de liberdade com forças aplicadas;
- iv. *Conjunto C*: todos os restantes graus de liberdade.

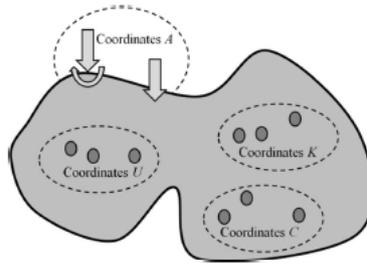


Figura 2.7: Representação dos *conjuntos* U, K, A e C num sistema arbitrário com múltiplos graus de liberdade [10]

Para a análise do conceito de transmissibilidade de deslocamentos considera-se o caso em que a estrutura está livre dos seus suportes, pelo que nenhum grau de liberdade contém forças de reação. Consequentemente, a totalidade das forças não-nulas encontram-se aplicadas nos graus de liberdade do *conjunto* A, gerando-se o vetor de forças  $\{F_A\}$  [10]. A relação entre as amplitudes de deslocamento dos diversos graus de liberdade e as forças aplicadas no graus de liberdade do *conjunto* A, previamente definido, escreve-se tendo em conta a equação (2.7),

$$\begin{Bmatrix} Y_A \\ Y_U \\ Y_K \\ Y_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{AA} \\ H_{UA} \\ H_{KA} \\ H_{CA} \end{bmatrix} \{F_A\} \quad (2.74)$$

Através da equação (2.74) explicita-se a relação entre as amplitudes dos deslocamentos dos graus de liberdade dos *conjuntos* U e K e as forças aplicadas nos graus de liberdade do *conjunto* A,

$$\begin{cases} \{Y_U\} = [H_{UA}]\{F_A\} \\ \{Y_K\} = [H_{KA}]\{F_A\} \end{cases} \quad (2.75)$$

Manipulando o sistema de equações matriciais (2.75) escreve-se a relação entre as amplitudes de deslocamento do *conjunto* U e do *conjunto* K, para um determinado *conjunto* A, da seguinte forma,

$$\{Y_U\} = [H_{UA}]( [H_{KA}]^+ \{Y_K\} ) \quad (2.76)$$

Visto que a matriz  $[H_{KA}]$  não é necessariamente quadrada, na equação (2.76) calcula-se o vetor da amplitude dos deslocamentos do *conjunto* U aplicando-se a pseudo-inversa  $[H_{KA}]^+$ . A condição necessária para cálculo da pseudo-inversa é que a dimensão do *conjunto* K seja maior ou igual que a

dimensão do *conjunto A*. Consequentemente, o número de graus de liberdade do *conjunto A* é limitado pela dimensão do *conjunto K*. É importante referir que a equação (2.76) depende da localização dos graus de liberdade do *conjunto A*, mas é independente da amplitude das forças associadas [30].

Por fim, tendo em conta a definição de transmissibilidade, define-se a matriz de transmissibilidade de deslocamentos  $[T_{UK}^{(d)}]$ , a partir da equação (2.76), da seguinte forma,

$$[T_{UK}^{(d)}] = [H_{UA}] \cdot [H_{KA}]^+ \quad (2.77)$$

onde o subscrito (*d*) indica que a matriz de transmissibilidade relaciona deslocamentos.

Utilizando a definição introduzida na equação (2.77), reescreve-se a equação (2.76),

$$\{Y_U\} = [T_{UK}^{(d)}] \{Y_K\} \quad (2.78)$$

Realça-se que, contrariamente à matriz de transmissibilidade de forças, a matriz de transmissibilidade de deslocamentos necessita de ser re-calculada para diferentes posições das forças exteriores.

## 2.6 Modelação de modificações estruturais como forças adicionais

Modificações estruturais implicam alterações de massa, rigidez ou amortecimento numa estrutura, caracterizadas pelas matrizes  $[\Delta M]$ ,  $[\Delta K]$  e  $[\Delta C]$ , respetivamente. Estas modificações, também designadas por dano estrutural, alteram o comportamento dinâmico da estrutura a estudar. Ao longo desta secção mostra-se que as modificações estruturais podem ser interpretadas como forças adicionais que atuam na estrutura isenta de dano, como proposto pelos autores da referência bibliográfica [22].

De forma geral, existindo uma modificação estrutural, o comportamento dinâmico de uma sistema discreto é caracterizado pela seguinte equação,

$$[M + \Delta M]\{\ddot{y}(t)\} + [C + \Delta C]\{\dot{y}(t)\} + [K + \Delta K]\{y(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.79)$$

que se pode reescrever como,

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [C]\{\dot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = \{f(t)\} + \{f_D(t)\} \quad (2.80)$$

onde  $\{f_D(t)\}$  é o vetor de forças adicional resultante do dano estrutural, dado por,

$$\{f_D(t)\} = -([\Delta M]\{\ddot{y}_D(t)\} + [\Delta C]\{\dot{y}_D(t)\} + [\Delta K]\{y_D(t)\}) \quad (2.81)$$

em que o índice *D* no vetor dos deslocamentos  $\{y_D(t)\}$  indica que os deslocamentos são referentes aos locais onde ocorrem as modificações estruturais. Sendo assim, as equações (2.80) e (2.81) ilustram que a mudança no comportamento dinâmico de uma estrutura, provocada por alterações estruturais, pode ser interpretada como forças adicionais nas coordenadas *D* [22].

Para um excitação harmônica, em condições estacionárias, a equação (2.81) fica,

$$\{F_D(\omega)\} = -(-\omega^2[\Delta M] + i\omega[\Delta C] + [\Delta K])\{Y_D(\omega)\} \quad (2.82)$$

e a equação (2.80) escreve-se da seguinte forma,

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])\{Y(\omega)\} = \{F(\omega)\} + \{F_D(\omega)\} \quad (2.83)$$

Introduzindo a matriz de rigidez dinâmica na equação (2.83) obtém-se,

$$[Z(\omega)]\{Y(\omega)\} = \{F(\omega)\} + \{F_D(\omega)\} \quad (2.84)$$

A equação (2.84) é ilustrativa da modelação de dano estrutural apresentada nesta secção. Como se pode concluir, as modificações estruturais podem ser definidas como forças adicionais,  $\{F_D(\omega)\}$ , aplicadas na estrutura sem dano, caracterizada pela matriz de rigidez dinâmica original,  $[Z(\omega)]$ .

Separando a equação (2.82) em parte real e parte imaginária obtém-se,

$$Re\{F_D\} + Im\{F_D\} = -(-\omega^2[\Delta M] + i\omega[\Delta C] + [\Delta K])(Re\{Y_D\} + iIm\{Y_D\}) \quad (2.85)$$

e, desta forma,

$$Re\{F_D\} = -(-\omega^2[\Delta M] + [\Delta K]) Re\{Y_D\} + \omega[\Delta C] Im\{Y_D\} \quad (2.86)$$

$$Im\{F_D\} = -(-\omega^2[\Delta M] + [\Delta K]) Im\{Y_D\} - \omega[\Delta C] Re\{Y_D\}$$

Assumindo-se que as diferentes modificações estruturais estão concentradas num único grau de liberdade da estrutura, as matrizes  $[\Delta M]$ ,  $[\Delta C]$  e  $[\Delta K]$  são matrizes diagonais. Para cada entrada  $j$ , com  $j = 1, \dots, p$ , a equação (2.86) escreve-se da seguinte forma,

$$\begin{Bmatrix} Re F_D \\ Im F_D \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} -Re Y_D & \omega^2 Re Y_D & \omega Im Y_D \\ -Im Y_D & \omega^2 Im Y_D & -\omega Re Y_D \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} \Delta K \\ \Delta M \\ \Delta C \end{Bmatrix}_j \quad j = 1, \dots, p \quad (2.87)$$

ou, de forma mais compacta [22],

$$\{F_D(\omega)\}_j = [Q(\omega)]_j \begin{Bmatrix} \Delta K \\ \Delta M \\ \Delta C \end{Bmatrix}_j \quad j = 1, \dots, p \quad (2.88)$$

Observando a equação (2.88) constata-se que, para cada entrada  $j$ , a resolução da mesma em função do vetor das modificações estruturais envolve duas equações de três incógnitas, pelo que o sistema é indeterminado. Tendo em consideração  $L$  frequências, é possível adaptar a equação (2.88) transformando-a num sistema de equações sobre-determinado da seguinte forma [23],

$$\begin{Bmatrix} \{F_D(\omega_1)\} \\ \vdots \\ \{F_D(\omega_L)\} \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} [Q(\omega_1)] \\ \vdots \\ [Q(\omega_L)] \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} \Delta K \\ \Delta M \\ \Delta C \end{Bmatrix}_j \quad j = 1, \dots, p \quad (2.89)$$

que se reescreve de forma mais compacta,

$$[F_{DT}]_j = [Q_T]_j \{\Delta\}_j \quad j = 1, \dots, p \quad (2.90)$$

A resolução da equação (2.90) implica a pseudo-inversa da matriz  $[Q_T]_j$  obtendo-se,

$$\{\Delta\}_j = [Q_T]_j^+ [F_{DT}]_j \quad j = 1, \dots, p \quad (2.91)$$

### 2.6.1 Adição de uma massa pontual

Um sistema modelado em elementos finitos no qual foi adicionada uma massa pontual apresentará variações nas matrizes de massa, rigidez e amortecimento globais,  $[\Delta M]$ ,  $[\Delta K]$  e  $[\Delta C]$ , respetivamente. Como simplificação considera-se que a adição de massa apenas afeta a matriz de massa original, sendo as variações de rigidez e amortecimento desprezáveis. O sistema modificado com a alteração estrutural descrita comporta-se em concordância com as seguintes equações, no domínio da frequência,

$$[[K] + i\omega[C] - \omega^2[M + \Delta M]]\{Y(\omega)\} = \{F(\omega)\} \quad (2.92a)$$

$$[[K] + i\omega[C] - \omega^2[M]]\{Y(\omega)\} = \{F(\omega)\} + \omega^2[\Delta M]\{Y(\omega)\} = \{F(\omega)\} + \{F_D(\omega)\} \quad (2.92b)$$

As duas equações previamente apresentadas representam a mesma realidade, por conseguinte, o vetor  $\{Y(\omega)\}$  é igual nas duas equações. Na equação (2.92a), o efeito da adição de massa é modelado como uma modificação estrutural, ou seja, a matriz de rigidez dinâmica é alterada adicionando-se a matriz de variação de massa  $[\Delta M]$  à matriz de massa global  $[M]$ . Na equação (2.92b), a adição de massa resulta num vetor de forças adicional  $\{F_D(\omega)\}$ , inalterando-se a matriz de rigidez dinâmica da estrutura original.

Analisando a equação (2.92b) conclui-se que o vetor de forças adicional resultante da adição de massa é dado por,

$$\{F_D(\omega)\} = \omega^2[\Delta M]\{Y_D(\omega)\} \quad (2.93)$$

A equação (2.93) é válida sobre a assunção que a adição de massa tem contribuições negligenciáveis para a matriz de rigidez e de amortecimento globais da estrutura original.

Uma simplificação adicional baseia-se em considerar que a adição de uma massa pontual apenas afeta os deslocamentos transversais da estrutura, desprezando-se assim a inércia de rotação inerente à massa adicionada.

### 2.6.2 Redução de rigidez localizada

Existem várias modificações estruturais que levam a uma redução de rigidez de uma estrutura, por exemplo, a formação de uma fissura implica uma diminuição da rigidez local e um aumento do amortecimento, resultante do acréscimo de fricção. O caso de uma estrutura na qual ocorreu a formação de fissuras será analisado de forma promenorizada na secção seguinte. Nesta secção considera-se que a redução de rigidez apenas afeta a matriz de rigidez global original de uma estrutura modelada em elementos finitos, desprezando-se as possíveis variações de massa e de amortecimento.

Seguindo a mesma linha de raciocínio usada na secção anterior, o sistema modificado com a alteração estrutural descrita comporta-se em concordância com as seguintes equações, no domínio da frequência,

$$[[K + \Delta K] + i\omega[C] - \omega^2[M]]\{Y(\omega)\} = \{F(\omega)\} \quad (2.94a)$$

$$[[K] + i\omega[C] - \omega^2[M]]\{Y(\omega)\} = \{F(\omega)\} - [\Delta K]\{Y(\omega)\} = \{F(\omega)\} + \{F_D(\omega)\} \quad (2.94b)$$

Na equação (2.94a), o efeito da redução de rigidez é modelado como dano estrutural, ou seja, a matriz de rigidez dinâmica é alterada com a adição da matriz de variação de rigidez  $[\Delta K]$  à matriz de rigidez global  $[K]$ . Na equação (2.94b) a redução de rigidez resulta num vetor de forças adicional  $\{F_D(\omega)\}$ , utilizando-se a matriz de rigidez dinâmica da estrutura original para o cálculo do vetor de deslocamentos  $\{Y(\omega)\}$ .

Da equação (2.94b) conclui-se que,

$$\{F_D(\omega)\} = -[\Delta K]\{Y_D(\omega)\} \quad (2.95)$$

Como simplificação considera-se que a influência da redução de rigidez está confinada aos nós dos elementos finitos da estrutura, sendo assim, designa-se esta modificação estrutural por redução de rigidez localizada. Assume-se também que a redução de rigidez apenas tem influência nas rotações nodais, pelo que o vetor  $\{Y_D(\omega)\}$  contém as rotações dos nós onde ocorreu esta modificação estrutural.

### 2.6.3 Adição de uma massa pontual e redução de rigidez localizada

Nesta secção estuda-se o caso de uma estrutura modelada em elementos finitos na qual foi adicionada uma massa pontual e, simultaneamente, ocorreu uma redução de rigidez localizada. Os casos de adição de massa pontual e de redução de rigidez foram previamente apresentados nas secções 2.6.1 e 2.6.2, respetivamente.

A equação de equilíbrio da estrutura modificada é dada por,

$$[[K + \Delta K] + i\omega[C] - \omega^2[M + \Delta M]]\{Y(\omega)\} = \{F(\omega)\} \quad (2.96)$$

Manipulando a equação (2.96) com o intuito de modelar as modificações estruturais como um vetor de forças adicional obtém-se a seguinte equação,

$$[[K] + i\omega[C] - \omega^2[M]]\{Y(\omega)\} = \{F(\omega)\} + \{F_D(\omega)\} \quad (2.97)$$

onde o vetor de forças adicional  $\{F_D(\omega)\}$  é dado por,

$$\{F_D(\omega)\} = (-[\Delta K] + \omega^2[\Delta M])\{Y_D(\omega)\} \quad (2.98)$$

em que o vetor  $\{Y_D(\omega)\}$  contém os deslocamentos transversais dos nós onde ocorreu a adição de uma massa pontual e as rotações dos nós afetados pela redução de rigidez localizada.

### 2.6.4 Fissura aberta numa viga de Bernoulli-Euler

Os autores J. K. Sinha, M. I. Friswell e S. Edwards apresentaram no artigo da referência bibliográfica [31] uma forma simplificada de modelar fissuras abertas, denominadas de entalhes, em vigas sujeitas a vibração transversa. A modelação aplica-se a elementos de viga de Bernoulli-Euler e baseia-se em modificações na flexibilidade local na vizinhança da fissura. Realça-se que o modelo descrito no artigo citado foi corroborado experimentalmente.

O problema em estudo é uma viga com múltiplas fissuras ao longo do seu comprimento, como representado de forma esquemática na figura 2.8,

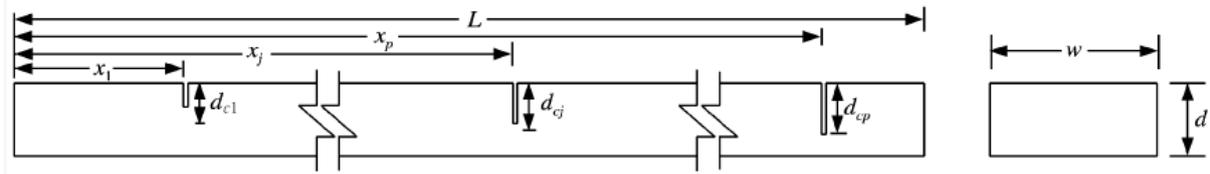


Figura 2.8: Viga com múltiplas fissuras [31]

A formação de fissuras numa viga implica uma redução na rigidez da estrutura. Uma parte do material da viga adjacente à fissura não será tensionado e, desta forma, a contribuição para a rigidez é limitada. Christides e Barr [32] estudaram o efeito de uma fissura numa viga contínua e calcularam a rigidez,  $EI$ , para uma viga retangular,

$$EI(x) = \frac{EI_0}{1 + C \exp(1 - 2\alpha|x - x_j|/d)} \quad (2.99)$$

onde  $C = (I_0 - I_{c_j})/I_{c_j}$ . As constantes  $I_0 = wd^3/12$  e  $I_{c_j} = w(d - d_{c_j})^3/12$  são o segundo momento de área da secção reta da viga original e na secção da  $j$ -ésima fissura. As dimensões  $w$  e  $d$  são a espessura e altura da secção reta da viga e  $d_{c_j}$  é a profundidade da  $j$ -ésima fissura. A coordenada longitudinal  $x$  indica a posição ao longo da viga e  $x_j$  é a posição da  $j$ -ésima fissura. O valor da constante  $\alpha$  é de 0,667, estimado experimentalmente por Christides e Barr em [32].

A implementação da redução de rigidez apresentada na equação (2.99) numa estrutura modelada em elementos finitos é bastante complicada, visto que o aumento de flexibilidade não se confina a um número reduzido de elementos. Consequentemente, a integração que produz a matriz de rigidez da viga teria que ser realizada numericamente sempre que a posição da fissura variasse [31].

Na figura 2.9 representa-se a variação da rigidez  $EI$  ao longo do comprimento adimensionalizado da viga, para uma fissura aberta com uma profundidade de 25% da altura da secção reta da viga.

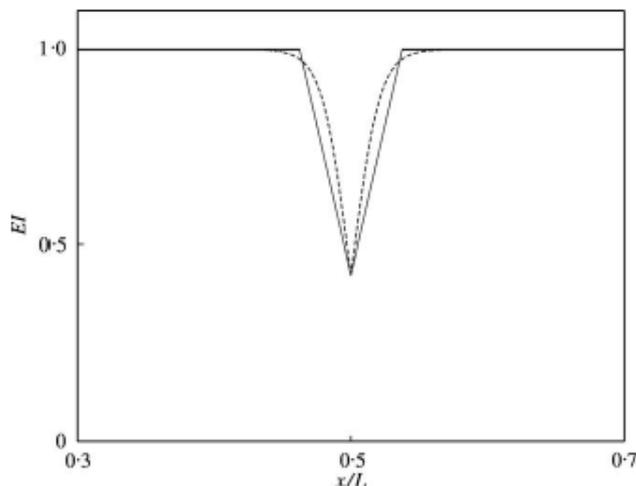


Figura 2.9: Comparação da variação de rigidez na vizinhança de uma fissura entre a redução triangular (traço contínuo) e o método de Christides and Barr [32] (tracejado) [31]

Analisando-se o gráfico da figura 2.9 constata-se que a variação de flexibilidade ocorre na vizinhança da fissura. Na referência bibliográfica [31] utiliza-se uma forma simplificada da variação de rigidez, onde se considera que a flexibilidade varia linearmente desde uma secção da viga não-fissurada até à secção fissurada, como apresentado a traço contínuo na figura 2.9. Assume-se que a variação de  $EI$  inicia-se a partir de um comprimento efetivo  $l_c$ , em ambos os lados do local da formação da fissura. Esta modelação da flexibilidade denomina-se de redução triangular de rigidez. Na posição de maior flexibilidade o segundo momento de área corresponde à secção da fissura, ou seja, depende diretamente da profundidade da mesma. Mais à frente nesta secção apresenta-se a dedução do valor do comprimento efetivo  $l_c$  [31].

A grande vantagem da modelação apresentada é a sua simplicidade. Uma forma alternativa de se modelar a fissura é reduzir-se a rigidez de um elemento de viga na sua totalidade. Contudo, o número de elementos da discretização em elementos finitos teria de aumentar significativamente para se obter uma localização da fissura satisfatória.

Na figura 2.10 apresenta-se a redução triangular de rigidez num elemento de viga de Bernoulli-Euler.

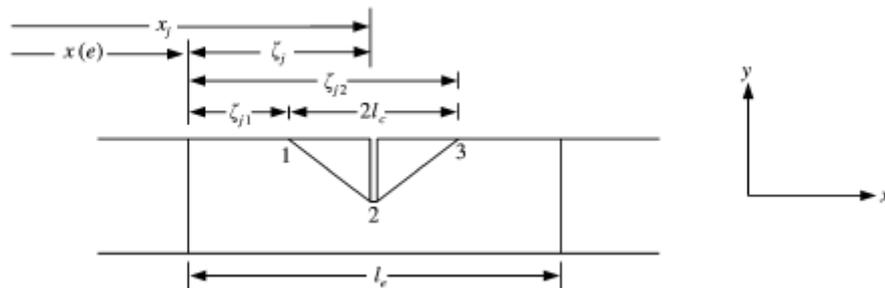


Figura 2.10: Redução triangular de rigidez num elemento de viga de Bernoulli-Euler [31]

A rigidez à flexão na vizinhança de uma fissura,  $EI_e(\zeta)$ , é dada por,

$$EI_e(\zeta) = \begin{cases} EI_0 - E(I_0 - I_{cj}) \frac{(\zeta - \zeta_{j1})}{(\zeta_j - \zeta_{j1})}, & \text{se } \zeta_{j1} \leq \zeta \leq \zeta_j \\ EI_0 - E(I_0 - I_{cj}) \frac{(\zeta_{j2} - \zeta)}{(\zeta_{j2} - \zeta_j)}, & \text{se } \zeta_j \leq \zeta \leq \zeta_{j2} \end{cases} \quad (2.100)$$

onde  $\zeta_j$  é a localização da  $j$ -ésima fissura no  $e$ -ésimo elemento.  $\zeta_{j1} = \zeta_j - l_c$  e  $\zeta_{j2} = \zeta_j + l_c$  são as posições, em ambos os lados da fissura, que demarcam a zona de influência da redução de rigidez resultante da fissura.

O comprimento efetivo  $l_c$  determina-se igualando-se os integrais da redução de rigidez definidos para as equações (2.99) e (2.100). O integral definido para a equação (2.99) é dado por,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [EI_0 - EI(x)] dx = EI_0 \frac{d}{\alpha} \log_e(1 + C) \approx EI_0 \frac{dC}{\alpha} \quad (2.101)$$

Tendo por base a equação (2.100) o integral é dado por,

$$\int_{\zeta_{j1}}^{\zeta_{j2}} [EI_0 - EI(x)] d\zeta = EI_0 l_c \frac{C}{1+C} \approx EI_0 l_c C \quad (2.102)$$

Nas equações (2.101) e (2.102) as aproximações são de primeira ordem em  $C$ . Na equação (2.102) o integral calcula-se entre  $\zeta_{j1}$  e  $\zeta_{j2}$  e não ao longo de toda a viga, uma vez que os integrais  $\int_{-\infty}^{\zeta_{j1}} [EI_0 - EI(x)] d\zeta$  e  $\int_{\zeta_{j2}}^{\infty} [EI_0 - EI(x)] d\zeta$  são nulos. Igualando as equações (2.101) e (2.102) conclui-se que uma boa aproximação do comprimento efetivo é dada por,

$$l_c = \frac{d}{\alpha} = 1,5d \quad (2.103)$$

onde a constante  $\alpha$  corresponde ao valor estimado por Christides e Barr em [32]. Realça-se que o comprimento efetivo apenas depende da altura da secção reta  $d$ , não variando com a profundidade da fissura [31].

Para se modelar uma viga com fissuras em elementos finitos utiliza-se a formulação de viga de Bernoulli-Euler, apresentada na secção 2.3.1, e assume-se que as fissuras estão localizados no interior dos elementos de viga. Assume-se também que a redução de rigidez fica confinada a um único elemento finito. Considere-se a  $j$  – ésima fissura, localizada em  $x_j$  no  $e$  – ésimo elemento, como representado na figura 2.8. A matriz de rigidez de um elemento de viga que contenha uma fissura pode ser escrita da seguinte forma,

$$[K_{e,fissura}] = [K_e] - [K_{cj}] \quad (2.104)$$

onde  $[K_e]$  é a matriz de rigidez elementar de um elemento sem fissura e  $[K_{cj}]$  é a matriz que caracteriza a redução de rigidez elementar provocada pela  $j$  – ésima fissura [31].

A matriz de rigidez do elemento com uma fissura,  $[K_{e,fissura}]$ , obtém-se aplicando-se a integração *standard*, onde se introduziu a variação da rigidez à flexão,

$$[K_{e,fissura}]_{rs} = \int_0^{l_e} EI_e(\zeta) \phi_r^{e''}(\zeta) \phi_s^{e''}(\zeta) d\zeta \quad (2.105)$$

em as funções de forma  $\phi_i^e(\zeta)$  foram previamente apresentadas na secção 2.3.1, equação (2.31).

A matriz  $[K_{cj}]$  obtém-se através das equações (2.100), (2.104) e (2.105),

$$[K_{cj}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & -k_{11} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & -k_{12} & k_{24} \\ -k_{11} & -k_{12} & k_{11} & -k_{14} \\ k_{14} & k_{24} & -k_{14} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

onde as expressões das constantes de redução de rigidez apresentam-se na equação (2.107).

Frisa-se que as únicas incógnitas da matriz  $[K_{cj}]$  são  $\zeta_j$ , localização da  $j$  – ésima fissura no elemento, e  $d_{cj}$ , profundidade da  $j$  – ésima fissura. Para se obter a formulação em elementos finitos da viga com fissuras, efetua-se a assemblagem das matrizes de rigidez elementares dos elementos que contêm fissuras na matriz de rigidez global da viga.

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \frac{12E(I_0 - I_{cj})}{l_e^4} \left[ \frac{2l_c^3}{l_e^2} + 3l_c \left( \frac{2\zeta_j}{l_e} - 1 \right)^2 \right], \\
k_{12} &= \frac{12E(I_0 - I_{cj})}{l_e^3} \left[ \frac{l_c^3}{l_e^2} + l_c \left( 2 - \frac{7\zeta_j}{l_e} + \frac{6\zeta_j^2}{l_e^2} \right) \right], \\
k_{14} &= \frac{12E(I_0 - I_{cj})}{l_e^3} \left[ \frac{l_c^3}{l_e^2} + l_c \left( 1 - \frac{5\zeta_j}{l_e} + \frac{6\zeta_j^2}{l_e^2} \right) \right], \\
k_{22} &= \frac{12E(I_0 - I_{cj})}{l_e^2} \left[ \frac{3l_c^3}{l_e^2} + 2l_c \left( \frac{3\zeta_j}{l_e} - 2 \right)^2 \right], \\
k_{24} &= \frac{12E(I_0 - I_{cj})}{l_e^2} \left[ \frac{3l_c^3}{l_e^2} + 2l_c \left( 2 - \frac{9\zeta_j}{l_e} + \frac{9\zeta_j^2}{l_e^2} \right) \right], \\
k_{44} &= \frac{12E(I_0 - I_{cj})}{l_e^2} \left[ \frac{3l_c^3}{l_e^2} + 2l_c \left( \frac{3\zeta_j}{l_e} - 1 \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{2.107}$$

Caso a redução de rigidez se estenda ao longo de mais de um elemento o processo descrito pode ser extendido, realizando-se a integração presente na equação (2.105) ao longo de todos os elementos afetados pela fissura. Alternativamente, os nós do modelo podem ser manipulados para se garantir que o efeito da fissura fica restringido a um único elemento [31].

Seguindo a mesma linha de raciocínio usada ao longo da secção 2.6, o comportamento dinâmico de uma viga com uma única fissura no elemento  $n$  regue-se pelas seguintes equações, no domínio da frequência,

$$[[K + \Delta K] + i\omega[C] - \omega^2[M]]\{Y(\omega)\} = [[K - \Delta K_{cj}] + i\omega[C] - \omega^2[M]]\{Y(\omega)\} = \{F(\omega)\} \tag{2.108a}$$

$$[[K] + i\omega[C] - \omega^2[M]]\{Y(\omega)\} = \{F(\omega)\} + [\Delta K_{cj}]\{Y(\omega)\} = \{F(\omega)\} + \{F_D(\omega)\} \tag{2.108b}$$

onde  $[\Delta K_{cj}]$  é a soma entre uma matriz nula,  $[0]$ , com a mesma dimensão da matriz de rigidez global da viga e a matriz de redução de rigidez  $[K_{cj}^n]$  do elemento  $n$ , dada pela equação (2.106).

Na equação (2.108a), o efeito da fissura é modelado como uma modificação estrutural, ou seja, a matriz de rigidez dinâmica é alterada subtraindo-se a matriz de redução de rigidez  $[\Delta K_{cj}]$  à matriz de rigidez global  $[K]$ . Na equação (2.108b) a redução de rigidez resulta num vetor de forças adicional  $\{F_D(\omega)\}$ , usando-se a matriz de rigidez dinâmica da estrutura original para o cálculo do vetor de deslocamentos  $\{Y(\omega)\}$ .

Da equação (2.108b) conclui-se que,

$$\{F_D(\omega)\} = [\Delta K_{cj}]\{Y(\omega)\} = [K_{cj}^n]\{Y_D(\omega)\} \tag{2.109}$$

onde o vetor  $\{Y_D(\omega)\}$  contém os dois deslocamentos transversais e as duas rotações dos nós associados ao elemento  $n$  onde se formou a fissura.



# Capítulo 3

## 3 Metodologia

Este capítulo inicia-se pela descrição da metodologia do método de identificação de forças aplicando-se os conceitos de transmissibilidade de forças e deslocamentos para sistemas MDOF, secções 3.1.1 e 3.1.2 respetivamente.

Nas secções seguintes, a metodologia apresentada na secção 3.1.2 será adaptada para a identificação de diversas modificações estruturais. As modificações estruturais estudadas são: adição de uma massa pontual, secção 3.2.1, redução de rigidez localizada, secção 3.2.2, adição de massa pontual e redução de rigidez localizada em simultâneo, secção 3.2.3 e formação de uma fissura aberta, secção 3.2.4.

### 3.1 Identificação da localização e amplitude de forças exteriores

#### 3.1.1 Transmissibilidade de Forças

O objetivo desta secção é descrever o método para se estimar a posição e a amplitude de forças harmónicas aplicadas numa estrutura, através do conhecimento das forças de reação medidas ou calculadas em  $n_I$  graus de liberdade fixos. Uma vez que o objetivo deste método é determinar a amplitude e a localização das forças aplicadas, é necessário definir-se um *conjunto* de graus de liberdade que contenha todas as localizações possíveis das diferentes forças de excitação. Tendo em linha de conta a notação usada na referência bibliográfica [10], o novo *conjunto* tem a designação de *conjunto*  $S$ . Recorrendo-se à figura 3.1 exemplifica-se a definição dos diferentes *conjuntos* de graus de liberdade, descritos na secção 2.5, para uma estrutura arbitrária. Para o caso em que  $F_3$  e  $F_4$  são as únicas forças exteriores aplicadas e  $F_5$  é uma força fictícia, definem-se os diversos *conjuntos* de graus de liberdade da seguinte forma,

- i. *Conjunto*  $K = \{F_3, F_4\} \Rightarrow n_K = 2$ ;
- ii. *Conjunto*  $U = \{F_1, F_2\} \Rightarrow n_U = 2$ ;
- iii. *Conjunto*  $C = \{F_5\} \Rightarrow n_C = 1$ ;
- iv. *Conjunto*  $E = \{F_3, F_4, F_5\} \Rightarrow n_E = 3 = n_K + n_C$ ;
- v. *Conjunto*  $S = \{F_3, F_4, F_5, (F_3, F_4), (F_3, F_5), (F_4, F_5), (F_3, F_4, F_5)\}$ .

O *conjunto*  $S$  representa assim os casos onde uma das três forças está aplicada, duas das três forças estão aplicadas ou as três forças estão aplicadas em simultâneo. Sendo assim, este *conjunto* contém todas as combinações possíveis das forças exteriores.

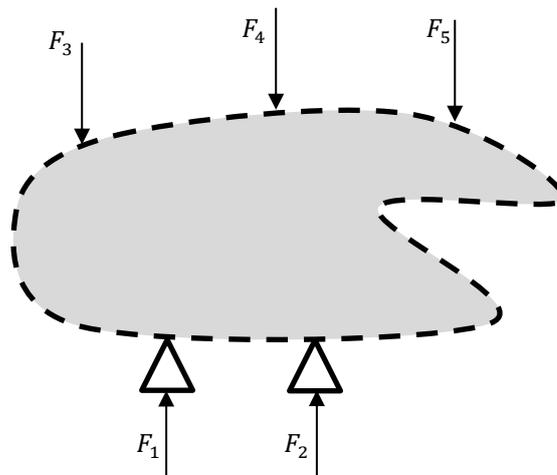


Figura 3.1: Exemplo de forças de reação e forças de excitação numa estrutura com forma arbitrária

Tendo em linha de conta o objetivo proposto, o passo seguinte é estimar as posições e amplitudes das forças aplicadas, através da medição das forças de reação nos suportes. Para se demonstrar numericamente a aplicabilidade do conceito de transmissibilidade de forças na identificação de forças exteriores, a medição experimental das forças de reação é simulada através de um cálculo numérico. De seguida exemplificam-se os passos para o cálculo das forças de reação,

- i. Modelação em elementos finitos da estrutura e criação da matriz de conectividades;
- ii. Criação do vetor de forças contendo a correta amplitude e localização das forças exteriores;
- iii. Definição das matrizes de rigidez e de massa globais da estrutura;
- iv. Imposição dos graus de liberdade fixos;
- v. Criação da matriz de rigidez dinâmica, para cada frequência de vibração a analisar, desprezando-se o amortecimento;
- vi. Cálculo do vetor dos deslocamentos dos graus de liberdade ativos, para cada frequência de vibração, através da equação (2.7);
- vii. Cálculo das forças de reação, para cada frequência de vibração, aplicando-se a equação (2.5).

Os autores da referência bibliográfica [10] propuseram a seguinte função de erro acumulado,

$$\varepsilon_F^S = \sum_{i=1}^{n_{freq}} \left[ \sum_{j=1}^{n_U} \left[ \{\widetilde{F}_U\}_j - \{F_U\}_j^S \right]^2 \right] \quad (3.1)$$

Na equação (3.1), o vetor  $\{\widetilde{F}_U\}$  contém as forças de reação medidas ou calculadas e o vetor  $\{F_U\}^S$  representa as forças de reação estimadas para cada combinação de forças exteriores do conjunto  $S$ . Para um dada frequência de vibração, calcula-se a diferença entre as  $n_U$  forças de reação estimadas e medidas, sendo  $n_U$  a dimensão do conjunto  $U$ . O cálculo descrito previamente é realizado para as  $n_{freq}$  frequências consideradas.

As corretas localizações e amplitudes das forças exteriores aplicadas na estrutura são aquelas que minimizam a diferença entre o valor das forças de reação medidas ou calculadas e as forças de reação estimadas aplicando-se a transmissibilidade de forças, ao longo das várias frequências de excitação consideradas. Desta forma, procura-se estimar as posições e amplitudes das forças aplicadas que minimizam o erro calculado através da equação (3.1). O vetor das forças de reação estimadas,  $\{F_U\}^S$ , é calculado para cada combinação do conjunto  $S$  e obtém-se através da definição de transmissibilidade de forças,

$$\{F_U\}^S = [T_{US}^{(f)}]\{F_S\} \quad (3.2)$$

onde a matriz  $[T_{US}^{(f)}]$  é uma submatriz da matriz de transmissibilidade de forças,  $[T_{UE}^{(f)}]$ , onde apenas se consideram as colunas referentes à localização das forças  $\{F_S\}$  de uma determinada combinação do conjunto  $S$ .

Aplicando-se o conceito de transmissibilidade, a função do erro acumulado fica,

$$\varepsilon(\{F_S\}) = \sum_{i=1}^{n_{freq}} \left[ \sum_{j=1}^{n_U} \left[ \{\widetilde{F}_U\}_j - ([T_{US}^{(f)}]\{F_S\})_j \right]^2 \right] \quad (3.3)$$

A equação (3.3) é a base para a formulação matemática do método de identificação da localização e amplitude das forças exteriores através do conceito de transmissibilidade de forças. Uma vez calculado o erro para todas as combinações possíveis das forças exteriores, combinações estas que definem o conjunto  $S$ , a localização ótima das forças exteriores, designada combinação ótima, é aquela que minimiza o erro acumulado.

A metodologia de identificação de forças exteriores através do conceito de transmissibilidade de forças baseia-se nos seguintes passos:

- i. Cálculo do número total de combinações de forças exteriores a considerar. Para um conjunto  $E$  de dimensão  $n$ , o número total de combinações possíveis,  $NP$ , de  $k$  incógnitas é dado por,

$$NP = \frac{n!}{(k! \times (n - k)!)} \quad (3.4)$$

Para se calcular o número total de combinações aplica-se a equação (3.4) para  $k = 1, \dots, n$ ,

$$NPT = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k! \times (n-k)!)} \quad (3.5)$$

- ii. Determinação de todas as combinações possíveis de forças exteriores. Para tal usa-se a função  $nchoosek(n,k)$  da biblioteca de funções da ferramenta *MATLAB*. Esta função tem como *output* todas as combinações de  $k$  incógnitas de um conjunto com  $n$  elementos;
- iii. Cálculo do erro acumulado e da amplitude das forças para cada combinação de forças exteriores. A amplitude das forças exteriores é aquela que, para cada combinação, minimiza o erro acumulado e calcula-se através da função *fmincon*. Esta função está incluída na biblioteca de funções da ferramenta *MATLAB* e tem como *output* a amplitude das forças de cada combinação que minimize o erro acumulado. Sendo assim, a função *fmincon* tem como *input* a função que implementa o cálculo do erro acumulado, dada pela equação (3.3).

Depois de calculado o erro acumulado para todas as combinações de forças exteriores, a combinação ótima é aquela que contém o erro acumulado mínimo. A localização das forças exteriores correta corresponde aos graus de liberdade da combinação que gerou o erro mínimo e, necessariamente, esta localização terá de corresponder ao vetor de forças criado para o cálculo das forças de reação.

Realça-se que, tipicamente, não é necessário analisar todas as possíveis combinações de forças exteriores para se garantir a identificação da combinação ótima, uma vez que é possível garantir que solução ótima foi determinada se a mesma gerar um erro mínimo global. Uma combinação ótima de  $k - 1$  incógnitas gera um erro mínimo global quando o erro mínimo local associado a combinações de  $k - 1$  incógnitas é menor que o erro mínimo local calculado para combinações de  $k$  incógnitas .

### 3.1.2 Transmissibilidade de deslocamentos

Para se identificar a localização e amplitude de forças exteriores aplicando-se a transmissibilidade de deslocamentos é necessário medir ou calcular os deslocamentos nos graus de liberdade dos conjuntos  $U$  e  $K$ , descritos na secção 2.5. Os vetores  $\{\widetilde{Y}_K\}$  e  $\{\widetilde{Y}_U\}$  contêm as amplitudes dos deslocamentos medidos experimentalmente ou calculados numericamente, em que o assento ‘ $\sim$ ’ indica que estes deslocamentos foram medidos ou calculados e não estimados. Os deslocamentos referidos são calculados seguindo-se os passos do cálculo das forças de reação, apresentados na secção anterior, com exceção dos passos iv e vii.

Uma vez que se desconhece *a priori* a localização dos graus de liberdade com forças aplicadas, é necessário ter em linha de conta todas as possíveis combinações dos graus de liberdade onde as forças exteriores podem estar aplicadas. Estes graus de liberdade formam o conjunto  $A$ , apresentado na secção 2.5. Sendo assim, cada combinação de forças exteriores é definida como  $A_i$ , onde o índice  $i$  varia entre a unidade e o número total de combinações.

O raciocínio seguido para se identificar a localização das forças exteriores baseia-se no cálculo da matriz de transmissibilidade de deslocamentos,  $[T_{UK}^{A_i}{}^{(d)}]$ , para cada combinação  $A_i$  que, quando

aplicada ao vetor  $\{\widetilde{Y}_K\}$  através da equação (3.6), resulta num vetor  $\{Y_U\}$  que se compara com o vetor  $\{Y_U\}$  [30].

$$\{Y_U\} = [T_{UK}^{A_i(d)}] \{\widetilde{Y}_K\} \quad (3.6)$$

Para cada combinação de forças exteriores, o erro acumulado calcula-se da seguinte forma,

$$\varepsilon_F^{A_i} = \sum_{i=1}^{n_{freq}} \left( \sum_{j=1}^{n_U} (|\widetilde{Y}_{U_j}| - |Y_{U_j}|)^2 \right) \quad (3.7)$$

A combinação das forças exteriores  $A_i$  que gera o menor erro acumulado indica a posição e o número de forças aplicadas na estrutura. Devido à pseudo-inversa da matriz  $[H_{KA}]$  presente na definição da matriz de transmissibilidade de deslocamentos, equação (2.77), é necessário que a dimensão do *conjunto K* seja maior ou igual que a dimensão do *conjunto A*. Sendo assim, o número máximo de forças que se consegue identificar com este método é igual ao número de graus de liberdade definidos para o *conjunto K*.

Para se estimar a localização das forças exteriores através do conceito de transmissibilidade de deslocamentos segue-se a seguinte metodologia:

- i. Cálculo do número total de combinações das forças exteriores através da equação (3.5);
- ii. Determinação de todas as combinações de forças exteriores possíveis aplicando-se a função  $nchoosek(n,k)$ . As possíveis localizações das forças são uma combinação de todos os graus de liberdade da estrutura onde existe a possibilidade de se aplicarem forças;
- iii. Cálculo do erro acumulado associado a cada combinação até se atingir a condição necessária que dita que a combinação ótima foi determinada. A condição necessária referida será descrita mais adiante nesta secção.

A metodologia de identificação de forças através do conceito de transmissibilidade de forças, apresentada na secção 3.1.1, é semelhante à metodologia proposta nesta secção. No entanto, existem duas características bem distintas entre os dois métodos.

Primeiramente, aplicando-se o conceito de transmissibilidade de deslocamentos, para cada combinação de forças calcula-se a respetiva matriz de transmissibilidade de deslocamentos, uma vez que a definição da matriz depende do *conjunto A* e este *conjunto* corresponde precisamente a cada combinação de forças exteriores a analisar. Para o caso da aplicação do conceito de transmissibilidade de forças, para cada combinação a analisar utilizam-se submatrizes da matriz de transmissibilidade de forças, não sendo necessário qualquer cálculo adicional.

Outra diferença relevante é que, para o caso desta secção, o cálculo da localização e da amplitude das forças associadas a cada combinação não é simultânea, uma vez que não é necessário encontrar a amplitude das forças que minimizem o erro acumulado para cada combinação de forças exteriores.

Para se identificar de forma indubitável a combinação de forças exteriores correta introduz-se uma condição que tem de ser satisfeita para se garantir que a combinação ótima foi identificada. Esta condição define-se da seguinte forma: *A combinação  $A_i$  de  $k$  incógnitas contém a localização ótima das forças exteriores se todas as combinações que geram erros mínimos locais para  $k + 1$  incógnitas incluírem a combinação  $A_i$  e, adicionalmente, a amplitude da força associada ao grau de liberdade que não esteja incluído na combinação  $A_i$  seja identicamente nula para todos os valores da gama de frequências de vibração.*

Denominam-se de *falsos positivos* ou *combinações potencialmente ótimas* todas as combinações de  $k + 1$  incógnitas que geram erros mínimos locais e que incluem a combinação ótima  $A_i$  de  $k$  incógnitas e, adicionalmente, a força associada ao grau de liberdade que não esteja incluído na combinação  $A_i$  seja identicamente nula para todos os valores da gama de frequências de vibração.

Sendo assim, a definição da condição necessária implica o cálculo da amplitude das forças associadas a todas as combinações potencialmente ótimas. Este cálculo efetua-se através de uma das equações do seguinte sistema,

$$\begin{cases} \{F_A\} = [H_{UA}]^+ \{Y_U\} \\ \{F_A\} = [H_{KA}]^+ \{Y_K\} \end{cases} \quad (3.8)$$

O sistema de equações apresentado obteve-se resolvendo a equação (2.75) em ordem ao vetor  $\{F_A\}$ . Devido à pseudo-inversa  $[H_{UA}]^+$  presente na primeira equação do sistema de equações (3.8), a dimensão do *conjunto*  $U$  tem que ser maior ou igual que a dimensão do *conjunto*  $A$ , caso se pretenda utilizar esta equação. Similarmente, a pseudo-inversa  $[H_{KA}]^+$  presente na segunda equação do sistema implica que a dimensão do *conjunto*  $K$  tem de ser maior ou igual que a dimensão do *conjunto*  $A$ . Uma vez que esta condição é satisfeita para que se aplique a metodologia de identificação de forças, a segunda equação do sistema pode ser sempre aplicada.

## 3.2 Identificação de modificações estruturais

Ao longo da secção 2.6 demonstrou-se que modificações estruturais podem ser interpretadas como forças adicionais que atuam numa estrutura não-modificada. Uma vez determinada a localização das modificações estruturais, pretende-se quantificar a mesma calculando-se as matrizes  $[\Delta M]$ ,  $[\Delta C]$  e  $[\Delta K]$ .

### 3.2.1 Adição de uma massa pontual

A metodologia proposta para identificar o local de adição de massa, bem como a massa total adicionada, envolve a aplicação de uma ou mais forças harmónicas numa localização conhecida,  $\{F(\omega)\}$ . Estas forças têm o propósito de excitar os deslocamentos onde a massa foi adicionada. Para se aplicar o conceito de transmissibilidade de deslocamentos são necessárias medições ou cálculos numéricos dos deslocamentos dos *conjuntos*  $U$  e  $K$ , como descrito na secção 3.1.2. Uma vez determinados os vetores dos deslocamentos nodais  $\{\tilde{Y}_U(\omega)\}$  e  $\{\tilde{Y}_K(\omega)\}$  aplica-se a equação (3.9), estimando-se o vetor dos deslocamentos do *conjunto*  $U$ ,  $\{Y_U(\omega)\}$ , através da matriz de

transmissibilidade de deslocamentos  $[T_{\dot{U}K}^A(d)]$ , que depende da localização das forças exteriores aplicadas na estrutura.

$$\{Y_U(\omega)\} = [T_{\dot{U}K}^A(d)] \{\tilde{Y}_K(\omega)\} \quad (3.9)$$

Depois de obtidos os vetores dos deslocamentos do *conjunto*  $U$  medidos e estimados para cada matriz de transmissibilidade de deslocamentos, efetua-se uma comparação entre ambos, para cada caso particular de localização das forças exteriores.

A metodologia usada para a identificação da adição de massa é aplicada em três passos:

- i. Cálculo dos deslocamentos do *conjunto*  $U$  e  $K$  na estrutura modificada resultantes da aplicação de forças exteriores  $\{F(\omega)\}$ , como descrito na secção 3.1.2, com a única exceção de se incluir a modificação estrutural na matriz de rigidez dinâmica. Frisa-se que a localização e amplitude das forças de excitação são conhecidas *a priori*;
- ii. Aplicação do método de identificação de forças através do conceito de transmissibilidade de deslocamentos, descrito na secção 3.1.2, para identificar a localização das forças que constituem os vetores  $\{F(\omega)\}$  e  $\{F_D(\omega)\}$ . O vetor  $\{F(\omega)\}$  contém as forças de excitação conhecidas, e as forças de inércia resultantes da massa adicionada geram o vetor  $\{F_D(\omega)\}$ . Depois de satisfeita a condição necessária para a definição da combinação ótima, a matriz de transmissibilidade que minimiza o erro acumulado fica definida. Consequentemente, localizam-se os graus de liberdade da estrutura onde se encontram aplicadas as forças exteriores. A identificação da localização da massa pontual adicionada é imediata, visto que a localização da força harmônica de excitação,  $\{F(\omega)\}$ , é conhecida *a priori*. Uma vez que se considerou a adição de massa como uma força de inércia e não como uma modificação estrutural, a matriz de rigidez dinâmica  $[Z(\omega)]$  considerada é igual à da estrutura original. Sendo assim, as matrizes de transmissibilidades calculadas também correspondem à estrutura original, uma vez que estas apenas dependem da inversa da matriz de rigidez dinâmica;
- iii. Reconstrução do vetor de forças total  $\{F_A(\omega)\}$  aplicando-se a equação (3.10), que corresponde à segunda equação do sistema de equações (3.8). Uma vez que o vetor de forças total,  $\{F_A(\omega)\}$ , contém os vetores  $\{F(\omega)\}$  e  $\{F_D(\omega)\}$ , e  $\{F(\omega)\}$  é conhecido, a determinação do vetor resultante da adição de massa,  $\{F_D(\omega)\}$ , é imediata;

$$\{F_A\} = [H_{KA}]^+ \{Y_K\} \quad (3.10)$$

- iv. Cálculo do valor da massa adicionada usando-se o vetor de forças  $\{F_D(\omega)\}$ , obtido no ponto anterior, e o vetor dos deslocamentos,  $\{Y_D(\omega)\}$ , aplicando-se a seguinte expressão,

$$\{F_D(\omega)\} = \omega^2 [\Delta M] \{Y_D(\omega)\} \quad (3.11)$$

onde o vetor  $\{Y_D(\omega)\}$  contém os deslocamentos dos nós onde se adicionou massa.

Em ambiente de laboratório apenas são medidos alguns deslocamentos nodais, podendo estes não corresponder ao vetor  $\{Y_D(\omega)\}$ . Os valores dos deslocamentos dos graus de liberdade onde

se adicionou a massa pontual, necessários para a aplicação da equação (3.11), podem ser obtidos aplicando-se o conceito de transmissibilidade de deslocamentos. Para tal recorre-se à seguinte equação,

$$\{Y_D\} = [T_{DK}^{A(d)}] \{\widetilde{Y}_K\} \quad (3.12)$$

onde a matriz de transmissibilidade  $[T_{DK}^{A(d)}]$  é dada por,

$$[T_{DK}^{A(d)}] = [H_{DA}] \cdot [H_{KA}]^+ \quad (3.13)$$

O conjunto  $D$  presente nas equações (3.12) e (3.13) contém o/os graus de liberdade de deslocamento transversal do/s nó/s onde se adicionou massa/s pontuais.

Se a massa adicionada estiver localizada num único nó da estrutura modificada, os vetores  $\{F_D(\omega)\}$  e  $\{Y_D(\omega)\}$  são escalares, o que resulta na relação,

$$F_{massa}(\omega) = \omega^2 \cdot m_{massa} \cdot Y_{massa}(\omega) \quad (3.14)$$

onde  $F_{massa}$  é a amplitude da força no local de adição de massa,  $m_{massa}$  é a quantidade de massa adicionada e  $Y_{massa}$  é o deslocamento transversal no nó onde foi adicionada a massa. O valor da massa adicionada é calculado para toda a gama de frequências considerada, determinando-se posteriormente a média dos valores obtidos. Desta forma obtém-se o valor, em *kg*, da quantidade de massa que foi adicionada.

### 3.2.2 Redução de rigidez localizada

A metodologia seguida até à reconstrução do vetor de forças total,  $\{F_A(\omega)\}$ , e obtenção do vetor de forças adicionais,  $\{F_D(\omega)\}$ , resultante da redução de rigidez, é análoga à metodologia seguida para o caso de adição de massa, apresentado na secção anterior. Uma vez determinado o vetor de forças,  $\{F_D(\omega)\}$ , e o vetor de deslocamentos dos graus de liberdade onde se localiza a redução de rigidez,  $\{Y_D(\omega)\}$ , resolve-se a equação (3.15) em ordem à matriz  $[\Delta K]$  para se quantificar a alteração de rigidez.

Realça-se que a redução de rigidez descrita na secção 2.6.2 apenas influencia graus de liberdade de rotação. Sendo assim, é necessário identificar-se momentos e não apenas forças exteriores. Tal particularidade não é problemática visto que o conceito de identificação de forças é naturalmente expandido caso seja necessário identificar momentos, sem implicar alterações na metodologia a seguir.

Deduziu-se na secção 2.6.2 que o vetor  $\{F_D(\omega)\}$  é dado por,

$$\{F_D(\omega)\} = -[\Delta K]\{Y_D(\omega)\} \quad (3.15)$$

Como simplificação considerou-se que a influência da redução de rigidez está confinada aos nós da estrutura e apenas tem impacto nas rotações nodais. Sendo assim, o vetor  $\{Y_D(\omega)\}$  contém as rotações dos nós onde ocorreu uma redução de rigidez localizada. Resultado da simplificação apresentada, identificando o ou os nó/s onde a força  $\{F_D(\omega)\}$  está aplicada, identifica-se imediatamente a localização

da redução de rigidez localizada. Para se quantificar a alteração de rigidez  $[\Delta K]$  aplica-se a equação (3.15) para toda a gama de frequências, calculando-se posteriormente a média dos valores obtidos. As duas alternativas para o cálculo do vetor  $\{Y_D(\omega)\}$  foram apresentadas na secção anterior.

### 3.2.3 Adição de uma massa pontual e redução de rigidez localizada

A metodologia seguida para a identificação da localização das duas modificações estruturais é equivalente à usada na secção 3.2.1. O vetor de forças  $\{F_D(\omega)\}$  obtido é dado pela equação (3.16), deduzida na secção 2.6.3.

$$\{F_D(\omega)\} = (-[\Delta K] + \omega^2[\Delta M])\{Y_D(\omega)\} \quad (3.16)$$

Considerando o caso em que a redução de rigidez apenas influencia o grau de liberdade de rotação  $n$  e apenas foi adicionada uma massa pontual num único nó, a equação (3.16) é dada por,

$$\{F_D(\omega)\} = -\Delta K_{n \times n} \cdot Y_n(\omega) + \omega^2 \cdot m_{massa} \cdot Y_{massa}(\omega) \quad (3.17)$$

onde  $-\Delta K_{n \times n}$  é um escalar que representa a redução de rigidez no nó que contem o grau de liberdade  $n$  e  $Y_n(\omega)$  é o valor da rotação  $n$ . Sendo assim, o vetor de forças adicionais,  $\{F_D(\omega)\}$ , tem dimensão dois. Posto isto, para se quantificar a redução de rigidez resolve-se a equação (3.18) em ordem a  $-\Delta K_{n \times n}$ , para toda a gama de frequências, determinando-se posteriormente a média dos valores obtidos.

$$\{F_{DK}(\omega)\} = -\Delta K_{n \times n} \cdot Y_n(\omega) \quad (3.18)$$

Na equação (3.18),  $\{F_{DK}(\omega)\}$  é a linha do vetor  $\{F_D(\omega)\}$  correspondente à redução de rigidez localizada. Similarmente, para se calcular a quantidade de massa adicionada resolve-se a equação (3.19) em ordem a  $m_{massa}$ , para toda a gama de frequências, efetuando-se posteriormente a média dos resultados. Na equação (3.19),  $\{F_{DM}(\omega)\}$  é a linha do vetor  $\{F_D(\omega)\}$  correspondente à adição de massa.

$$\{F_{DM}(\omega)\} = \omega^2 \cdot m_{massa} \cdot Y_{massa}(\omega) \quad (3.19)$$

### 3.2.4 Fissura aberta numa viga de Bernoulli-Euler

Para uma viga de Bernoulli-Euler com múltiplas fissuras, o vetor das forças exteriores totais,  $\{F_A(\omega)\}$ , é obtido seguindo-se a metodologia descrita na secção 3.2.1. Para a criação das matrizes de massa e de rigidez globais da viga utilizaram-se as matrizes de massa e de rigidez elementares de um elemento de viga de Bernoulli-Euler, equações (2.32) e (2.33), respetivamente. Similarmente aos casos das três secções anteriores, uma vez que se conhece a localização e amplitude da ou das forças de excitação, uma vez obtido o vetor de forças total  $\{F_A(\omega)\}$ , a obtenção do vetor de forças adicionais,  $\{F_D(\omega)\}$ , é imediata. O vetor das forças adicionais é dado pela equação (3.20), previamente deduzida na secção 2.6.4.

$$\{F_D(\omega)\} = [K_{c_j}^n]\{Y_D(\omega)\} \quad (3.20)$$

onde,

$$[K_{cj}^n] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & -k_{11} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & -k_{12} & k_{24} \\ -k_{11} & -k_{12} & k_{11} & -k_{14} \\ k_{14} & k_{24} & -k_{14} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Considerando o caso em que se formou uma única fissura, a análise das equações (3.20) e (3.21) permite concluir que o vetor  $\{F_D(\omega)\}$  tem dimensão quatro. Sendo assim, a combinação ótima a identificar contém cinco graus de liberdade, nomeadamente, o deslocamento transversal do nó onde se aplica a força harmónica de excitação, previamente conhecido, e quatros graus de liberdade correspondentes a um elemento finito de viga  $n$ , no interior do qual se formou a fissura. Consequentemente, a determinação da combinação ótima permite concluir imediatamente em qual elemento se formou a fissura. O vetor  $\{Y_D(\omega)\}$  contém o valor dos deslocamentos transversais e das rotações dos dois nós do elemento  $n$ .

Uma vez determinados os vetores  $\{F_D(\omega)\}$  e  $\{Y_D(\omega)\}$  segue-se o cálculo da matriz  $[K_{cj}^n]$ , que permite determinar a localização e a profundidade da fissura,  $\zeta_j$  e  $d_{cj}$ , respetivamente. Para um elemento de viga de Bernoulli-Euler com os graus de liberdade  $\{w_1, \theta_1, w_2, \theta_2\}^T$ , como representado na figura 2.4, a equação (3.20) é dada por,

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & -k_{11} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & -k_{12} & k_{24} \\ -k_{11} & -k_{12} & k_{11} & -k_{14} \\ k_{14} & k_{24} & -k_{14} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1(\omega) \\ \theta_1(\omega) \\ w_2(\omega) \\ \theta_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \\ F_3(\omega) \\ F_4(\omega) \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

onde  $F_1(\omega)$ ,  $F_2(\omega)$ ,  $F_3(\omega)$  e  $F_4(\omega)$  são as forças e momentos associados ao elemento onde se formou a fissura. Exprimindo a equação (3.22) no formato  $[A]\{x\} = \{b\}$ , em que o vetor  $\{x\}$  contém as seis incógnitas da matriz  $[K_{cj}^n]$ , obtém-se,

$$\begin{bmatrix} \Delta(\omega) & \theta_1(\omega) & \theta_2(\omega) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta(\omega) & 0 & \theta_1(\omega) & \theta_2(\omega) & 0 \\ -\Delta(\omega) & -\theta_1(\omega) & -\theta_2(\omega) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta(\omega) & 0 & \theta_1(\omega) & \theta_2(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{14} \\ k_{22} \\ k_{24} \\ k_{44} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \\ F_3(\omega) \\ F_4(\omega) \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

onde  $\Delta(\omega) = w_1(\omega) - w_2(\omega)$ . A matriz presente na equação (3.23) tem mais linhas do que colunas, sendo assim o sistema é indeterminado. No entanto, os deslocamentos  $w_1(\omega)$  e  $w_2(\omega)$  e as rotações  $\theta_1(\omega)$  e  $\theta_2(\omega)$  são dependentes da frequência de excitação. O mesmo se aplica ao vetor de forças, que também é dependente da frequência de excitação. Consequentemente, é possível obter-se um sistema de equações sobre-determinado a partir do sistema de equações (3.23) considerando-se múltiplas frequências de vibração, obtendo-se a equação (3.24).

$$\begin{bmatrix} [Q(\omega_1)] \\ \vdots \\ [Q(\omega_L)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{14} \\ k_{22} \\ k_{24} \\ k_{44} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F(\omega_1)\} \\ \vdots \\ \{F(\omega_L)\} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

onde se definiu uma matriz  $[Q(\omega_n)]$  para toda a gama de frequências de vibração. A matriz do sistema de equações (3.24) tem dimensão  $(L \times 4) \times 6$ , em que  $L$  representa o número de frequências consideradas. A matriz  $[Q(\omega_n)]$  é dada por,

$$[Q(\omega_n)] = \begin{bmatrix} \Delta(\omega_n) & \theta_1(\omega_n) & \theta_2(\omega_n) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta(\omega_n) & 0 & \theta_1(\omega_n) & \theta_2(\omega_n) & 0 \\ -\Delta(\omega_n) & -\theta_1(\omega_n) & -\theta_2(\omega_n) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta(\omega_n) & 0 & \theta_1(\omega_n) & \theta_2(\omega_n) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

onde  $\Delta(\omega_n) = w_1(\omega_n) - w_2(\omega_n)$ .

Os valores das constantes de redução de rigidez obtêm-se invertendo a equação (3.24),

$$\begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{14} \\ k_{22} \\ k_{24} \\ k_{44} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [Q(\omega_1)] \\ \vdots \\ [Q(\omega_L)] \end{bmatrix}^+ \begin{Bmatrix} \{F(\omega_1)\} \\ \vdots \\ \{F(\omega_L)\} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

Uma vez calculados os valores das constantes de redução de rigidez, a localização da fissura,  $\zeta_j$ , e o segundo momento de área na secção da fissura,  $I_{cj}$ , calculam-se resolvendo um sistema com duas das expressões das constantes de redução de rigidez, apresentadas na equação (2.107).

Depois de calculado o segundo momento de área na secção da fissura, a determinação da profundidade da fissura,  $d_{cj}$ , é imediata. O segundo momento de área na secção da fissura é dado por,

$$I_{cj} = w(d - d_{cj})^3/12 \quad (3.27)$$

Manipulando a equação (3.27) obtêm-se a expressão utilizada para o cálculo da profundidade da fissura,

$$d_{cj} = - \left( \sqrt[3]{\frac{12I_{cj}}{w}} - d \right) \quad (3.28)$$



# Capítulo 4

## 4 Resultados

Este capítulo inicia-se pela apresentação dos resultados da identificação da localização e amplitude de forças exteriores aplicadas numa viga. A identificação é realizada aplicando-se conceitos de transmissibilidade de forças, secção 4.1.1, e de transmissibilidade de deslocamentos, secção 4.1.2.

Ao longo da secção 4.2 mostra-se os resultados obtidos para a identificação de modificações estruturais numa viga. As modificações estruturais analisadas correspondem aquelas apresentadas ao longo da secção 2.6. Na secção 4.2.1 identifica-se uma adição de massa pontual, na secção 4.2.2 uma redução de rigidez localizada, na secção 4.2.3 uma adição de massa pontual e uma redução de rigidez em simultâneo e na secção 4.2.4 a formação de uma fissura aberta.

Na secção 4.3.1 aplica-se o conceito de transmissibilidade de deslocamentos para a identificação da localização e amplitude de forças exteriores aplicadas numa placa. Para finalizar este capítulo, na secção 4.4 apresentam-se os resultados da identificação da adição de uma massa pontual numa placa.

### 4.1 Identificação de forças aplicadas numa viga

A viga a analisar nesta secção é modelada em elementos finitos de viga de Bernoulli-Euler, descritos na secção 2.3.1. As propriedades da viga especificam-se na tabela 4.1.

Os resultados apresentados são obtidos através da simulação em *MATLAB* do código *main\_viga.m*, disponibilizado em anexo.

### 4.1.1 Transmissibilidade de forças

Para se identificarem as forças exteriores aplicadas numa viga aplicando-se o conceito de transmissibilidade de forças, recorre-se à metodologia descrita na secção 3.1.1. A viga a analisar tem encontra-se encastrada nas duas extremidades e foi discretizada em seis elementos finitos, todos com o mesmo comprimento, como se pode observar na figura 4.1.

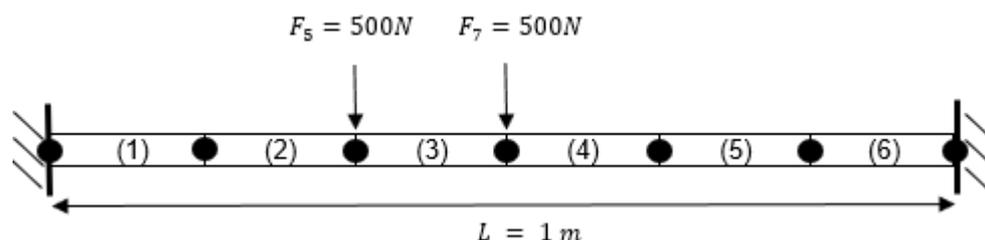


Figura 4.1: Viga encastrada nas extremidades discretizada em seis elementos finitos

<b>Material</b>	Aço
<b>Massa específica (<math>\rho</math>)</b>	$7850\text{ kg/m}^3$
<b>Módulo de Young Longitudinal (<math>E</math>)</b>	$187,5\text{ GPa}$
<b>Área da secção reta (<math>A</math>)</b>	$1 \times 10^{-3}\text{ m}^2$
<b>Segundo Momento de Inércia (<math>I</math>)</b>	$2 \times 10^{-10}\text{ m}^4$

Tabela 4.1: Propriedades da viga

Como descrito na secção 2.3.1, cada elemento finito de viga de Bernoulli-Euler possui dois nós, tendo cada nó dois graus de liberdade, um deslocamento transversal e uma rotação. Consequentemente, a viga modelada em elementos finitos totaliza 7 nós, que contabilizam um total de 14 graus de liberdade. As forças exteriores a identificar são harmónicas e discretas, com uma amplitude de  $500\text{ N}$  e uma frequência de vibração que varia entre  $0\text{ rad/s}$  e  $500\text{ rad/s}$ . As forças encontram-se aplicadas nos nós 3 e 4, como representado na figura 4.1. Os diversos *conjuntos* de graus de liberdade, descritos na secção 2.4, definem-se da seguinte forma:

- i. *Conjunto U*:  $\{1, 2, 13, 14\}$ , graus de liberdade onde se desenvolvem as reações;
- ii. *Conjunto K*:  $\{5, 7\}$ , graus de liberdade onde se encontram aplicadas forças exteriores;
- iii. *Conjunto C*:  $\{3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$ , todos os restantes graus de liberdade;
- iv. *Conjunto E* = *Conjunto K* + *Conjunto C*.

As reações calculadas para a gama de frequências selecionada apresentam-se na figura 4.2. O gráfico da figura 4.3 ilustra a evolução da força de reação no nó 1 com a frequência de vibração. A preto representa-se a reação calculada através dos passos descritos na secção 3.1.1 e a vermelho apresenta-se a reação obtida através da matriz de transmissibilidade de forças, equação (2.68), assumindo-se a correta localização das forças exteriores. Como se pode constatar observando-se o gráfico da figura 4.3, as forças de reação no nó 1 calculadas através dos dois processos mencionados são coincidentes, o que implica uma correta definição da matriz de transmissibilidade de forças.

Depois de calculadas as forças de reação da viga para o caso apresentado na figura 4.1, o objetivo passa por estimar a amplitude e localização das forças exteriores para o caso proposto,

nomeadamente duas forças de 500 N, localizadas nos nós 3 e 4. No entanto, como se desconhece-se *a priori* se a excitação da viga resulta unicamente da aplicação de forças, também se tem em linha de conta a possível aplicação de momentos.

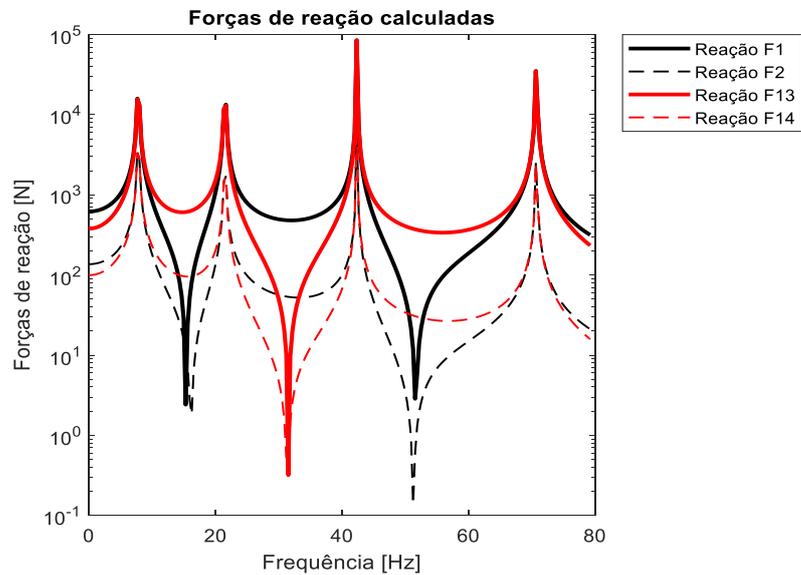


Figura 4.2: Evolução das reações com a frequência de vibração

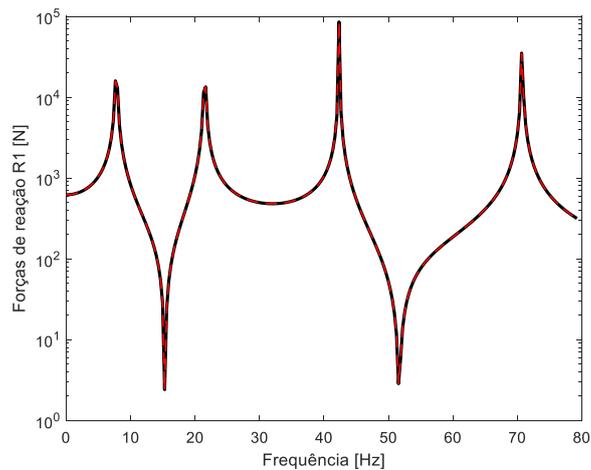


Figura 4.3: Comparação entre as forças de reação no nó 1 calculadas com o método direto e estimadas através do conceito de transmissibilidade de forças

No caso do problema a analisar nesta secção, as forças ou momentos exteriores podem estar aplicados em 5 nós da viga. No entanto, cada nó possui dois graus de liberdade, o que contabiliza um total de 10 graus de liberdade como possíveis localizações das forças ou momentos exteriores.

Apresenta-se no gráfico da figura 4.4 o erro acumulado calculado para todas as combinações consideradas até se encontrar a solução ótima. Neste caso, foram calculados os erros acumulados para todas as combinações de uma, duas e três incógnitas, uma vez que a solução ótima é uma combinação com duas incógnitas. Através da análise do gráfico da figura 4.4 constata-se imediatamente a existência de um erro mínimo, uma vez que existe uma combinação que gera um erro com uma ordem de grandeza muito inferior aos restantes erros calculados. A combinação ótima

identificada contém os graus de liberdade 5 e 7, correspondentes aos deslocamentos transversais dos nós onde se encontram aplicadas as forças exteriores de excitação. Para ambas as forças determinou-se a amplitude correta de 500 N.

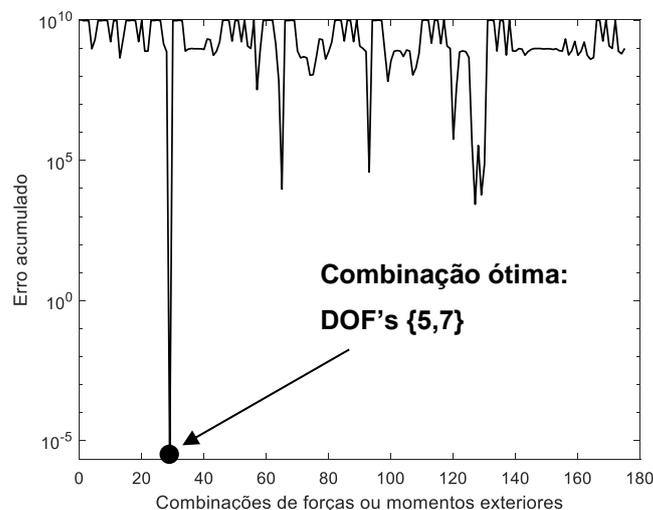


Figura 4.4: Erro acumulado para combinações de forças e momentos exteriores até 3 incógnitas

#### 4.1.2 Transmissibilidade de deslocamentos

Para a aplicação do conceito de transmissibilidade de deslocamentos na identificação de forças segue-se a metodologia descrita na secção 3.1.2. Nesta secção analisa-se uma viga com as extremidades livres, condição necessária para se estabelecer a relação entre os deslocamentos dos conjuntos  $U$  e  $K$  através da matriz de transmissibilidade de deslocamentos, equação (2.78).

Como no caso da secção anterior, as forças exteriores encontram-se aplicadas nos nós 3 e 4 e ambas têm uma amplitude de 500 N. As gamas de frequências a analisar coincidem com as usadas na secção anterior. Como consequência da pseudo-inversa usada no cálculo da matriz de transmissibilidade de deslocamentos, a dimensão do conjunto  $K$  tem que ser maior ou igual que a dimensão do conjunto  $A$ . No caso da viga a analisar, como apenas existem duas forças aplicadas, um conjunto  $K$  com dois graus de liberdade é suficiente para a identificação precisa das duas forças. Contudo, será necessário analisar combinações de três graus de liberdade para se estabelecer a condição necessária de identificação da combinação ótima, como se apresentou na secção 3.1.2.

Posto isto, definiu-se um conjunto  $K$  com dimensão três. Os dois conjuntos de graus de liberdade considerados são:

- i. Conjunto  $U$ : graus de liberdade {3, 5, 7};
- ii. Conjunto  $K$ : graus de liberdade {9, 11, 13}.

Os deslocamentos dos conjuntos  $U$  e  $K$ , calculados para toda a gama de frequências, apresentam-se no gráfico da figura 4.5. Os deslocamentos do conjunto  $U$  apresentam-se a preto e os deslocamentos do conjunto  $K$  a vermelho. A representação gráfica dos deslocamentos em função da

frequência tem particular interesse na observação das frequências de ressonância e anti-ressonância, uma vez que estas correspondem a picos no valor dos deslocamentos.

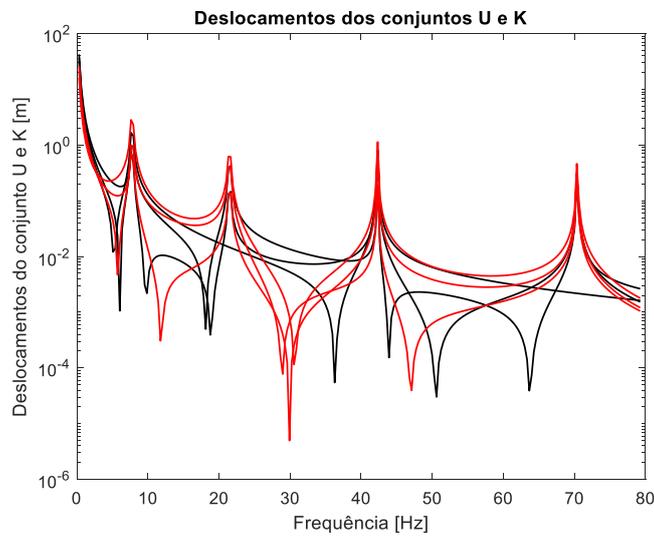


Figura 4.5: Deslocamentos dos *conjuntos* de graus de liberdade *U* e *K*

Alternativamente, os deslocamentos do *conjunto U* foram calculados através da equação (3.6), em que a matriz de transmissibilidade de deslocamentos define-se para o *conjunto A* constituído pelos graus de liberdade 5 e 7 e o vetor  $\{\overline{Y}_K\}$  corresponde aos deslocamentos do *conjunto K* previamente calculados. No gráfico da figura 4.6 representa-se a vermelho a evolução dos deslocamentos do *conjunto U*, apresentados na figura 4.5. A preto apresenta-se os deslocamentos do *conjunto U* calculados através da aplicação do conceito de transmissibilidade de deslocamentos. Como se pode observar no gráfico da figura 4.6, os deslocamentos calculados das duas formas distintas são coincidentes, o que implica uma correta definição da matriz de transmissibilidade de deslocamentos.

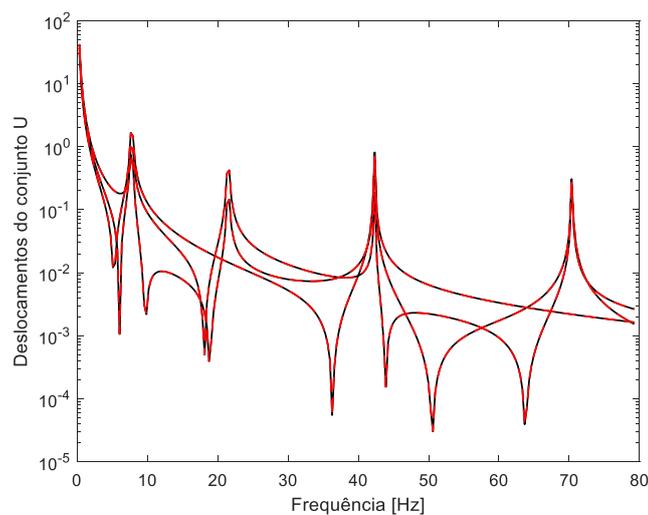


Figura 4.6: Deslocamentos do *conjunto U* calculados pelo método direto e através do conceito de transmissibilidade de deslocamentos

No gráfico da figura 4.7 apresenta-se os erros acumulados calculados para todas as combinações até 3 incógnitas.

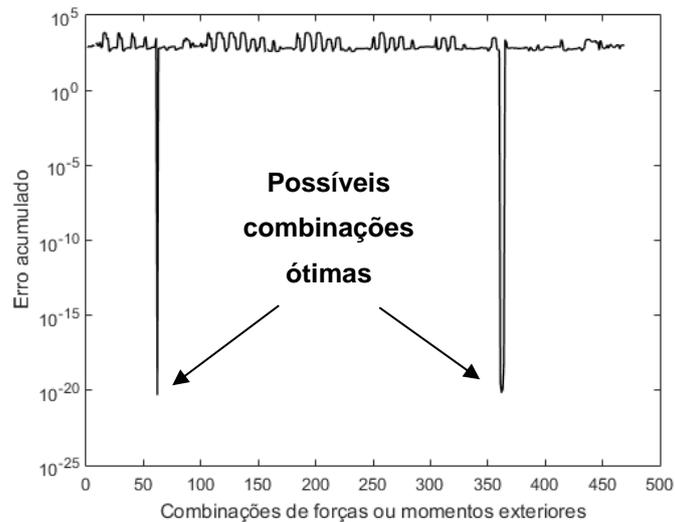


Figura 4.7: Erro acumulado para combinações até três incógnitas

Observando o gráfico da figura 4.7 conclui-se que não se consegue afirmar de forma imediata qual é a combinação que contém a localização ótima das forças e momentos exteriores, uma vez que existem combinações que geram picos de erro acumulado muito próximos. De todas as combinações analisadas, são candidatas a combinação ótima as combinações 62, 361, 362 e 363, uma vez que estas geram erros muito pequenos comparativamente a todas as restantes combinações. Analise-se cada combinação candidata a combinação ótima:

- i. Combinação 62: Esta combinação consiste nos graus de liberdade {5, 7}, localização correta das forças exteriores e gera um erro acumulado com o valor  $4,4 \times 10^{-27}$ . Reconstruindo as forças associadas a esta combinação, aplicando-se a equação (3.10), calculou-se que ambas as forças têm uma amplitude de  $500 \text{ N}$  para toda a gama de frequências de vibração;
- ii. Combinações 361, 362 e 363: Estas combinações incluem os graus de liberdade 5, 7. A combinação 361 contém os graus de liberdade {5, 7, 11} e gera um erro acumulado de  $1,65 \times 10^{-26}$ . A combinação 362 corresponde aos graus de liberdade {5, 7, 12} e tem um erro associado de  $1,43 \times 10^{-27}$ . A combinação 363 engloba os graus de liberdade {5, 7, 13} e gera um erro acumulado de  $2,4 \times 10^{-27}$ . Reconstruindo-se as forças associadas a cada uma das combinações, para toda a gama de frequências, obteve-se um valor de  $500 \text{ N}$  para as forças correspondentes aos graus de liberdade 5 e 7, nó 3 e 4 respetivamente, e um valor identicamente nulo para as forças nos graus de liberdade 11 e 13 e para o momento no grau de liberdade 12.

A reconstrução das forças e momentos para as combinações 361, 362 e 363, combinações estas que incluem a combinação ótima, permite concluir que a condição necessária é satisfeita e a

combinação 62 corresponde à combinação ótima, sendo as combinações 361, 362 e 363 falsos positivos. Concluí-se desta forma que a simulação identificou corretamente a localização das forças exteriores e a sua amplitude.

Para se facilitar a visualização da combinação ótima graficamente adiciona-se uma constante ao erro acumulado gerado pelos falsos positivos. Obtém-se assim o gráfico da figura 4.8, a partir do qual se observa imediatamente que existe uma combinação ótima bem definida. Ao longo deste trabalho denominam-se os gráficos que contêm o erro acumulado corrigido com um factor arbitrário por gráficos do *erro acumulado corrigido*.

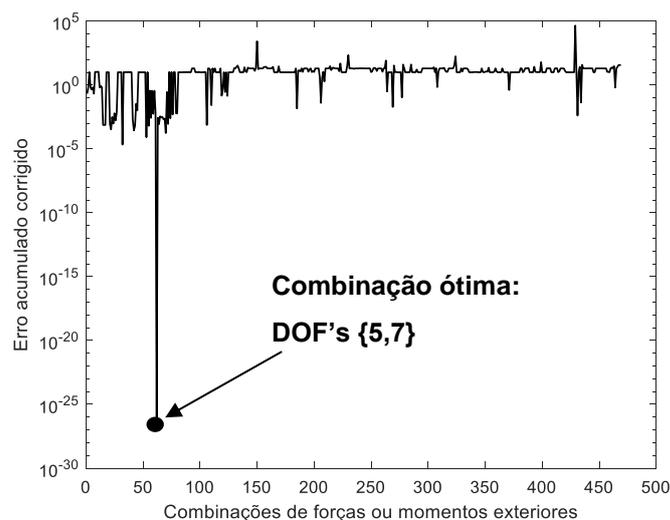


Figura 4.8: Erro acumulado corrigido para combinações até três incógnitas

## 4.2 Identificação de modificações estruturais numa viga

Ao longo desta secção apresentam-se os resultados do método de identificação de diversos tipos de modificações estruturais, apresentadas ao longo da secção 2.6. Os resultados resultam da simulação em ambiente *MATLAB* do código *main\_viga.m*, disponibilizado em anexo. Para a modelação em elementos finitos da viga aplica-se a teoria de viga de Bernoulli-Euler descrita na secção 2.3.1. As propriedades da viga a analisar apresentam-se na tabela 4.1.

### 4.2.1 Adição de uma massa pontual

Nesta secção analisa-se a aplicabilidade do conceito de transmissibilidade de deslocamentos na identificação de uma massa pontual adicionada numa viga. Para o propósito de se determinar a localização da massa segue-se a metodologia descrita na secção 3.2.1.

Considere-se uma massa pontual de 30 g adicionada no nó 3 da viga modelada em elementos finitos, como representado na figura 4.9. Para a aplicação da metodologia de identificação de forças, através dos fundamentos de transmissibilidade de deslocamentos, requiere-se a medição de deslocamentos na viga excitada através da aplicação de uma força harmónica. No caso em estudo aplicou-se uma força harmónica no nó 4 com 500 N de amplitude, como se observa na figura 4.9.

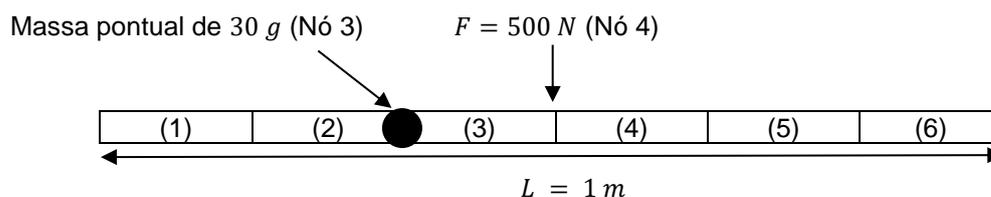


Figura 4.9: Viga livre nas extremidades discretizada em seis elementos finitos com uma massa pontual adicional

Para a situação ilustrada na figura 4.9, a matriz  $[\Delta M]$  é uma matriz  $14 \times 14$ , uma vez que a discretização da viga resulta em 7 nós e existem 2 graus de liberdade por nós, nomeadamente um deslocamento transversal e uma rotação. Uma vez que se assume desprezável a contribuição da massa adicional na variação das rotações nodais da estrutura, considera-se que a massa pontual apenas afeta os deslocamentos transversais. Por conseguinte, de todas as entradas da matriz  $[\Delta M]$ , a única entrada não-nula é aquela referente ao grau de liberdade de deslocamento transversal correspondente ao nó onde se adicionou a massa pontual. Para o caso em estudo, a única entrada não nula da matriz  $[\Delta M]$  é a entrada  $5 \times 5$ , visto que o grau de liberdade 5 corresponde ao deslocamento transversal do nó 3.

Uma vez calculado o vetor de deslocamentos da estrutura modificada segue-se a definição dos conjuntos  $U$  e  $K$ . Visto que é necessário identificarem-se duas forças, a força de inércia resultante da massa adicional e a força harmónica, o conjunto  $K$  tem de ter dimensão dois, pelo menos. No entanto, como se analisou na secção 3.1.2, para se estabelecer a condição necessária para se identificar a combinação ótima é necessário analisarem-se combinações de três incógnitas. Por conseguinte, optou-se por definir os conjuntos da seguinte forma:

- i. Conjunto  $U$ : graus de liberdade  $\{3, 5, 7\}$ ;
- ii. Conjunto  $K$ : graus de liberdade  $\{9, 11, 13\}$ .

No gráfico da figura 4.10 apresenta-se a preto os deslocamentos do conjunto  $U$  e a vermelho os deslocamentos do conjunto  $K$ , para toda a gama de frequências, igual à utilizada ao longo da secção 4.1. No gráfico da figura 4.11 apresenta-se a vermelho os deslocamentos do conjunto  $U$  calculados na estrutura modificada, comparativamente aos deslocamentos do conjunto  $U$  que seriam calculados na estrutura original, representados a preto. Como se pode constatar, os diferentes deslocamentos encontram-se praticamente sobrepostos. Tal justifica-se uma vez que a massa adicionada tem apenas 30 g.

Com os deslocamentos dos conjuntos  $U$  e  $K$  calculados, pode-se iniciar o processo de identificação da localização da massa pontual através do conceito de transmissibilidade de deslocamentos. No gráfico da figura 4.12 apresenta-se os erros associados a todas as combinações de uma até três incógnitas, assumindo-se que se desconhece a localização da força harmónica.

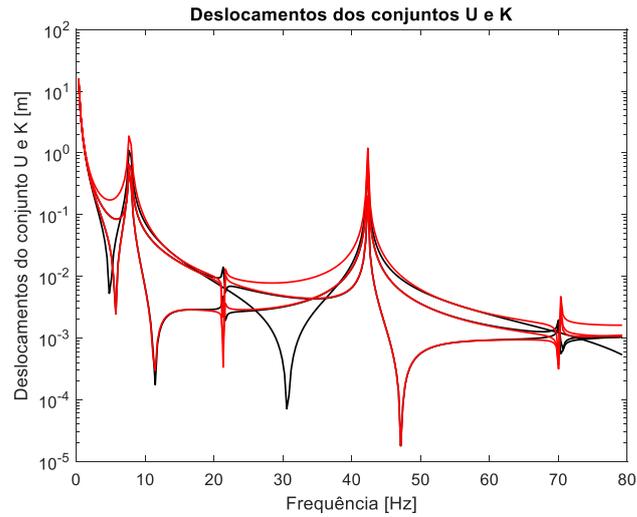


Figura 4.10: Deslocamentos dos *conjuntos U* e *K* da viga modificada

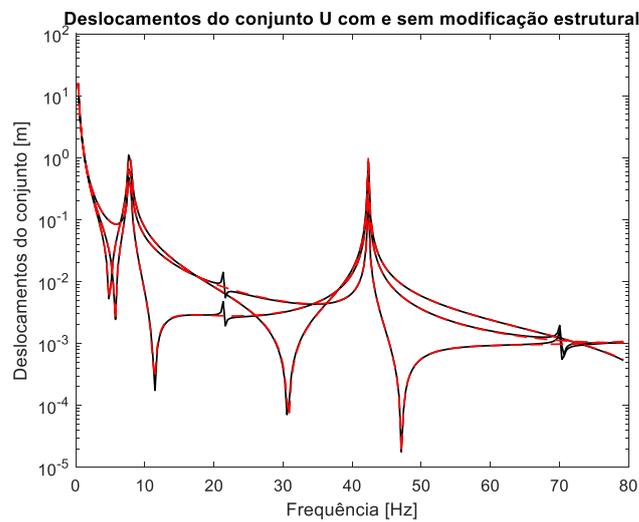


Figura 4.11: Deslocamentos do *conjunto U* com e sem adição de massa na estrutura original

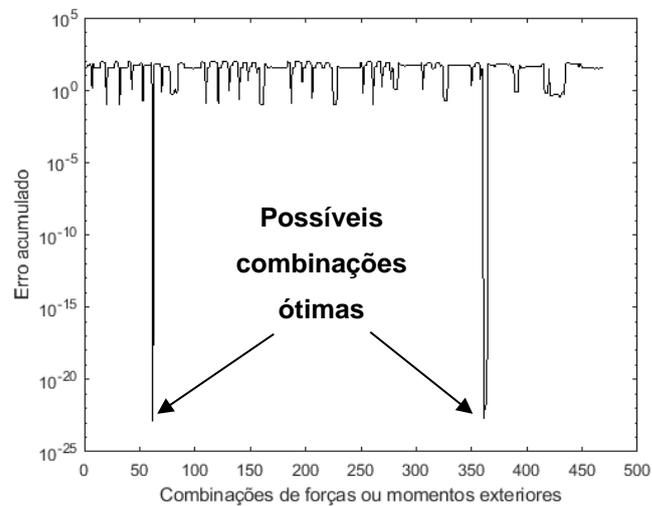


Figura 4.12: Erro acumulado para combinações até três incógnitas

No entanto, uma vez que na prática a localização da força harmónica é conhecida *a priori*, para se identificar a localização da massa pontual com precisão apenas seria necessário calcular os erros associados a combinações de forças exteriores que incluíssem a força harmónica aplicada no nó 4. Esta possibilidade de redução do número de combinações a analisar tem extrema importância na redução do tempo requerido para identificar a localização de modificações estruturais, caso a estrutura a analisar seja discretizada num número significativo de graus de liberdade.

Similarmente ao ocorrido na secção 4.1.2, analisando-se o gráfico da figura 4.12 não se consegue definir, de forma indubitável, a combinação de forças ou momentos exteriores que resulta na identificação correta da localização da massa pontual. Tal ocorre porque o erro mínimo local para combinações de 2 incógnitas é da mesma ordem de grandeza que os erros mínimos locais para combinações de 3 incógnitas.

Para se ultrapassar esta dificuldade recorre-se ao gráfico do erro acumulado corrigido, onde se soma uma constante ao erro acumulado de todas as combinações que se revelam falsos positivos. Este gráfico apresenta-se na figura 4.13 e a análise do mesmo permite constatar de forma imediata a existência de uma combinação ótima.

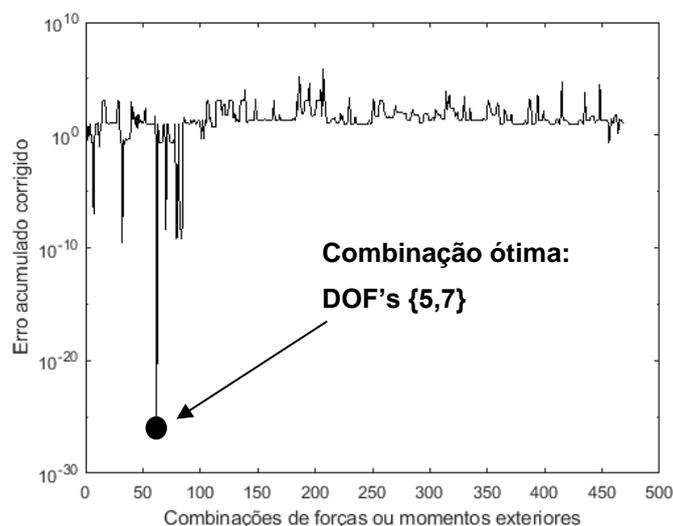


Figura 4.13: Erro acumulado corrigido para combinações até três incógnitas

A combinação ótima identificada é a combinação número 62 que contém os graus de liberdade 5 e 7, graus de liberdade de deslocamento transversal dos nós onde se encontram adicionada a massa e aplicada a força de excitação. Visto que se conhece *a priori* que a força harmónica de excitação se encontra localizada no nó 4 (grau de liberdade 7), conclui-se imediatamente que a massa pontual se encontra localizada no nó 3 (grau de liberdade 5). De agora em diante, o gráfico do erro acumulado corrigido será utilizado recorrentemente visando-se obter uma identificação imediata da combinação ótima. Assim sendo, diminuiu-se significativamente a densidade interpretativa dos casos analisados nas secções futuras.

Uma vez determinada a localização da massa pontual segue-se a determinação da quantidade de massa que foi adicionada. Para tal aplica-se a equação (3.14), previamente apresentada na secção

3.2.1. Depois de obtidos os valores da massa calculada para cada frequência de vibração, representados na figura 4.14, calculou-se a média dos mesmos e obteve-se um valor exato para a massa adicionada.

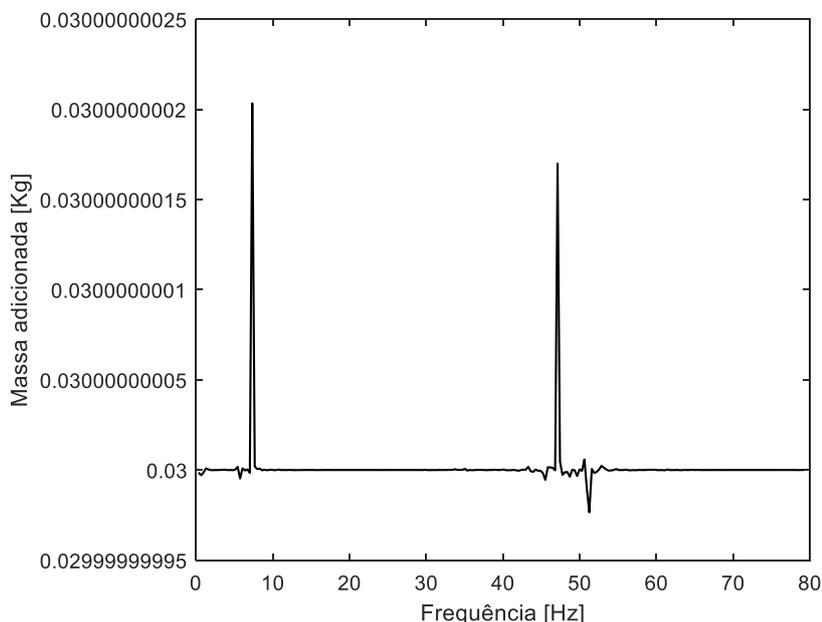


Figura 4.14: Massa pontual calculada para cada frequência de vibração

#### 4.2.2 Redução de rigidez localizada

Com o intuito de se demonstrar a aplicabilidade da identificação de uma possível alteração de rigidez, através do conceito de transmissibilidade de deslocamentos, aplica-se a metodologia descrita na secção 3.2.2. Considere-se a existência de uma redução de rigidez localizada no nó 2 da viga modelada em elementos finitos, como representado na figura 4.15. A viga é excitada através da aplicação de uma força harmónica numa localização conhecida. No caso em estudo aplicou-se uma força harmónica de 500 N no nó 3.

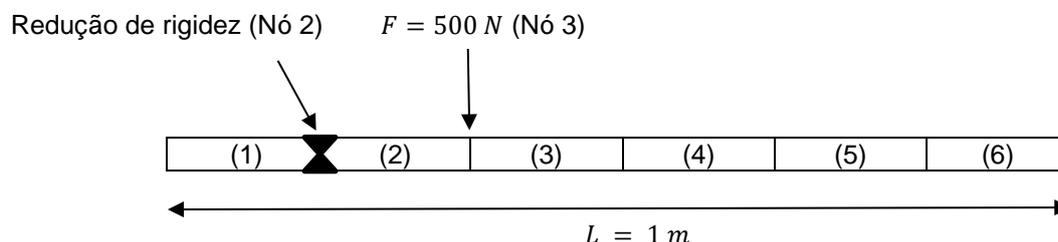


Figura 4.15: Viga livre nas extremidades discretizada em seis elementos finitos com uma redução de rigidez localizada no nó 2

Definiu-se uma redução de rigidez à rotação de 5%. Visto que o grau de liberdade 4 corresponde à rotação no nó 2, a matriz  $[\Delta K]$  tem a mesma dimensão da matriz  $[K]$ , matriz  $14 \times 14$ , e tem todas as entradas nulas com exceção da entrada  $4 \times 4$ , dada por,

$$[\Delta K_{4 \times 4}] = -0.05[K_{4 \times 4}] \quad (4.1)$$

ou seja, a rigidez torcional associada ao grau de liberdade 4 na estrutura modificada, corresponde a 95% da rigidez à rotação desse mesmo grau de liberdade na estrutura original.

Visto que apenas um nó é afetado pela redução de rigidez, e considera-se que a mesma apenas afeta o grau de liberdade de rotação, a redução de rigidez localizada resulta num único momento adicional. Este momento calcula-se através da equação (3.15), apresentada na secção 3.2.2.

Uma vez que a matriz  $[\Delta K]$  tem todas as entradas nulas com exceção da entrada  $4 \times 4$ , a equação (3.15) resume-se a,

$$\{F_D(\omega)\} = -[\Delta K_{4 \times 4}]\{Y_4(\omega)\} \quad (4.2)$$

onde  $\{Y_4(\omega)\}$  é a rotação do nó 2. Por conseguinte, no problema em estudo é necessário identificar uma forças e um momento, o momento proveniente da redução de rigidez localizada e a força harmónica de excitação.

Consequentemente, o *conjunto K* necessita de ter dimensão dois, pelo menos. Todavia, as combinações de três forças ou momentos exteriores necessitam de ser analisadas para que se satisfaça a condição necessária. Os *conjuntos* definem-se da seguinte forma:

- i. *Conjunto U*: graus de liberdade {3, 5, 7};
- ii. *Conjunto K*: graus de liberdade {9, 11, 13}.

No gráfico da figura 4.16 apresenta-se a preto os deslocamentos do *conjunto U* e a vermelho os deslocamentos do *conjunto K* para toda a gama de frequências. A gama de frequências analisada é a mesma que a utilizada na secção anterior.

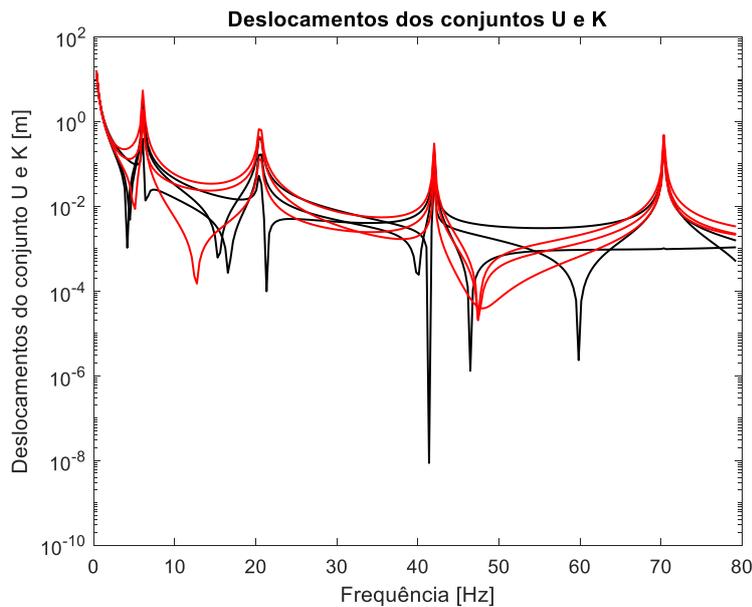


Figura 4.16: Deslocamentos dos *conjuntos U* e *K* da viga modificada

No gráfico da figura 4.17 representa-se a preto os deslocamentos do *conjunto U* calculados para a estrutura fissurada, e a vermelho apresenta-se os deslocamentos do *conjunto U* calculados para a estrutura original, ou seja, sem modificação estrutural. Como se pode constatar pela observação do gráfico da figura 4.17, para frequências inferiores a 50 Hz, a discrepância entre os dois tipos de deslocamentos é bastante significativa. No entanto, para frequências mais elevadas, os deslocamentos da estrutura original estão praticamente sobrepostos nos deslocamentos da estrutura fissurada.

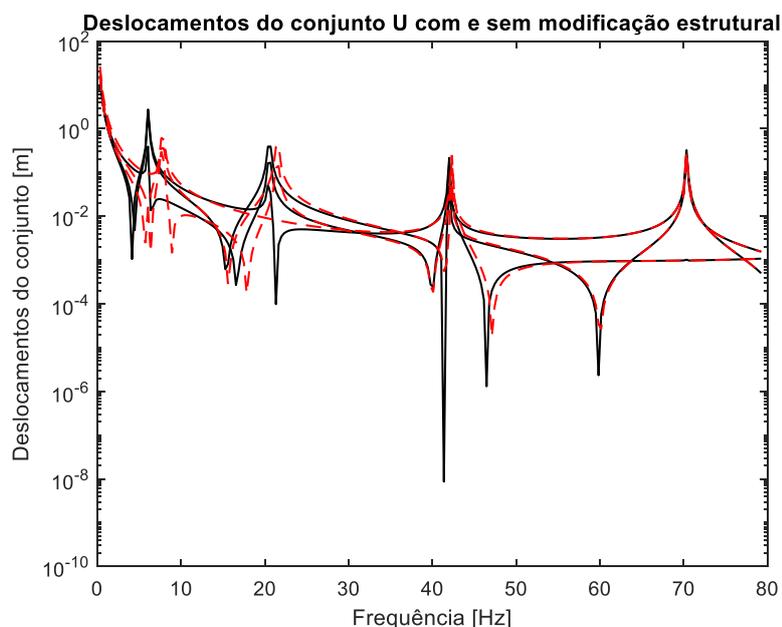


Figura 4.17: Deslocamentos do *conjunto U* da estrutura modificada e da estrutura original

Finalizado o cálculo dos deslocamentos dos *conjuntos U* e *K* segue-se a identificação da localização do nó onde se formou a fissura, aplicando-se o conceito de transmissibilidade de deslocamentos. Na figura 4.18 apresenta-se o gráfico do erro acumulado corrigido. Analisando o mesmo constata-se a existência de uma combinação ótima bem definida. A combinação ótima determinada contém os graus de liberdade corretos, grau de liberdade 4 (rotação do nó 2) e grau de liberdade 5 (deslocamento transversal do nó 3). Uma vez que a localização da força harmónica no nó 3 é conhecida determina-se imediatamente que a redução de rigidez localizada ocorreu no nó 2.

Uma vez determinada a localização da redução de rigidez procede-se a quantificação da mesma. O valor de  $[\Delta K_{4 \times 4}]$  é calculado para todas as frequências de vibração aplicando-se a equação (4.2). Dividindo-se os valores obtidos pela entrada  $4 \times 4$  da matriz de rigidez da estrutura original,  $[K_{4 \times 4}]$ , obtém-se o gráfico da figura 4.19, que representa a percentagem de redução de rigidez em função da frequência. Calculando-se a média dos valores representados no gráfico da figura 4.19 determinou-se que a redução de rigidez no nó 2 foi de exatamente 5%.

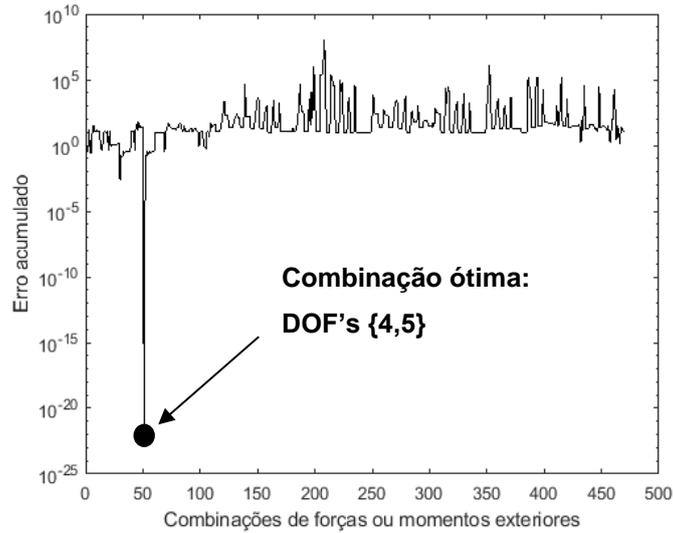


Figura 4.18: Erro acumulado corrigido para combinações até três incógnitas

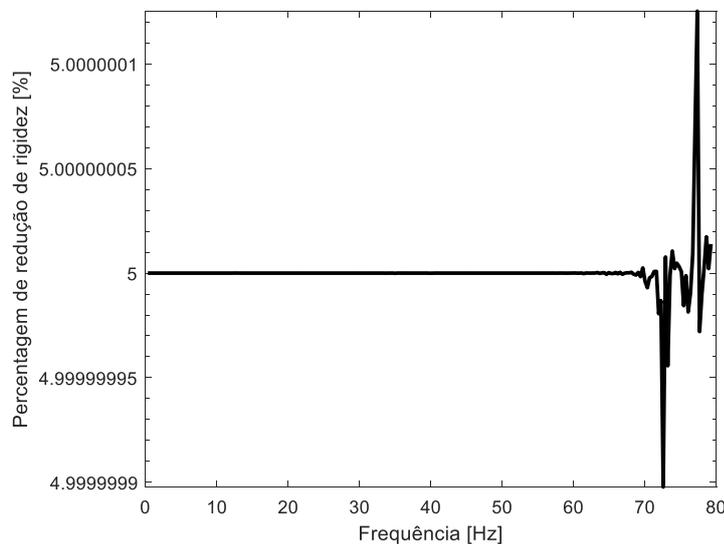


Figura 4.19: Percentagem de redução de rigidez calculada para cada frequência de vibração

### 4.2.3 Adição de massa e redução de rigidez localizada em simultâneo

Nesta secção estuda-se o caso de uma viga onde foi adicionada uma massa pontual e, simultaneamente, ocorreu uma redução de rigidez localizada, aplicando-se a metodologia descrita na secção 3.2.3. Na figura 4.20 representa-se a viga a analisar com as respetivas modificações estruturais.

Como esboçado na figura 4.20, a redução de rigidez localiza-se no nó 2 e a massa pontual foi adicionada no nó 4. Neste caso, a massa adicionada tem o valor de  $0,02 \text{ kg}$ . A matriz de variação de massa,  $[\Delta M]$ , de dimensão  $14 \times 14$ , tem todas as entradas nulas com a excepção da entrada  $7 \times 7$ , uma vez que o grau de liberdade 7 corresponde ao deslocamento transversal do nó 4. Visto considerar-se que a redução de rigidez apenas altera a rigidez associada à rotação do nó em que se localiza, a matriz de redução de rigidez,  $[\Delta K]$ , de dimensão  $14 \times 14$ , apenas tem a entrada  $4 \times 4$  não nula. O grau de

liberdade 4 corresponde à rotação do nó 2. Definiu-se novamente uma redução de rigidez à rotação de 5%.

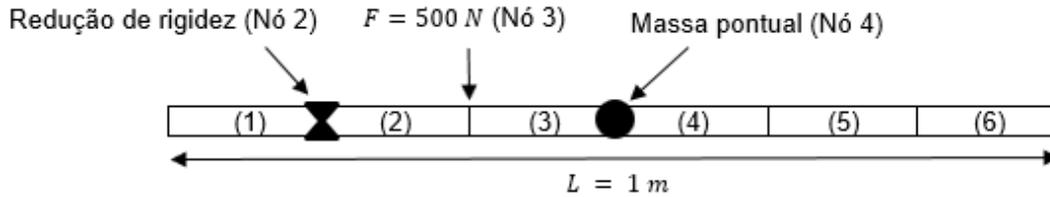


Figura 4.20: Viga livre nas extremidades discretizada em seis elementos finitos com uma redução de rigidez localizada no nó 2 e uma massa pontual adicionada no nó 4

Como foi explicitado no parágrafo anteriormente, a matriz  $[\Delta M]$  tem todas as entradas nulas com a exceção da entrada  $7 \times 7$  e a matriz  $[\Delta K]$  apenas tem a entrada  $4 \times 4$  não nula. Consequentemente, a equação (3.17) pode ser escrita da seguinte forma,

$$\{F_D(\omega)\} = -[\Delta K_{4 \times 4}]\{Y_4(\omega)\} + \omega^2[\Delta M_{7 \times 7}]\{Y_7(\omega)\} \quad (4.3)$$

onde  $[\Delta K_{4 \times 4}]$  é a entrada  $4 \times 4$  da matriz  $[\Delta K]$ ,  $\{Y_4(\omega)\}$  é a rotação do nó 2,  $[\Delta M_{7 \times 7}]$  é a entrada  $7 \times 7$  da matriz  $[\Delta M]$  e  $\{Y_7(\omega)\}$  é o deslocamento transversal do nó 4.

A equação (4.3) permite concluir que o método de identificação de forças, aplicando-se o conceito de transmissibilidade de deslocamentos, terá de identificar a localização de duas forças e de um momento. Nomeadamente, o momento adicional no nó 2 devido à redução de rigidez localizada, a força harmónica aplicada no nó 3 e a força de inércia no nó 4, resultante da massa adicional. Pelas mesmas razões discutidas ao longo deste capítulo, o conjunto  $K$  tem de ter pelo menos dimensão quatro. Definiram-se os conjuntos  $U$  e  $K$  da seguinte forma:

- i. Conjunto  $U$ : graus de liberdade  $\{3, 5, 7\}$ ;
- ii. Conjunto  $K$ : graus de liberdade  $\{1, 9, 11, 13\}$ .

Na figura 4.21 apresenta-se o gráfico dos deslocamentos do conjunto  $U$ , a preto, e os deslocamentos do conjunto  $K$ , a vermelho.

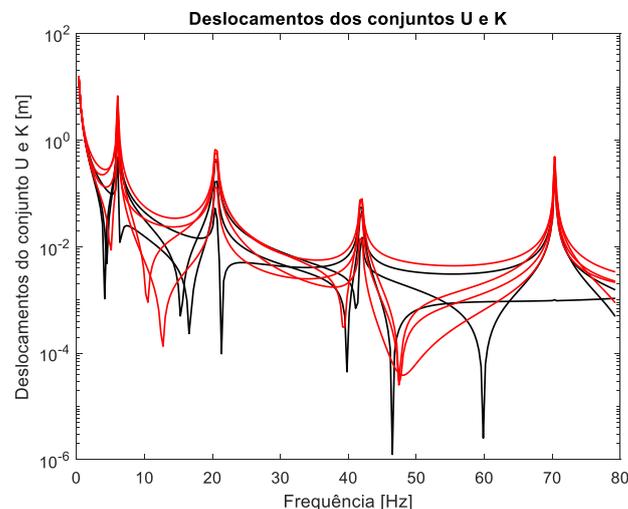


Figura 4.21: Deslocamentos dos conjuntos  $U$  e  $K$  da viga modificada

Na figura 4.22 representa-se a preto os deslocamentos do *conjunto U* calculados na estrutura modificada, e a vermelho apresenta-se os deslocamentos do *conjunto U* calculados na estrutura original, sem modificações estruturais. Mais uma vez conclui-se que a maior diferença nos dois tipos de deslocamentos ocorre para frequências baixas. Apesar dos deslocamentos apresentados na figura 4.22 diferirem de forma muito ténue para frequências elevadas, realça-se que a diferença entre os dois deslocamentos calculados é maximizada na vizinhança de frequências de ressonância e anti-ressonância.

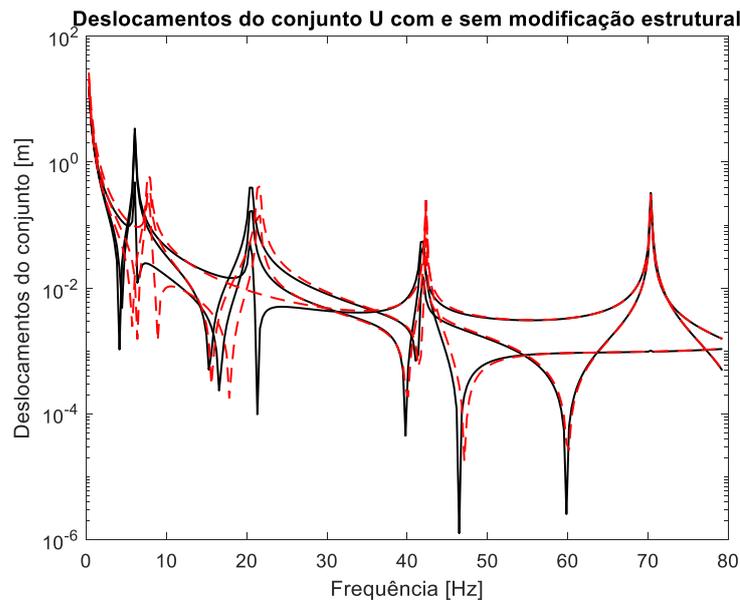


Figura 4.22: Deslocamentos do *conjunto U* da viga original e da viga com alterações estruturais

Concluído o cálculo dos deslocamentos dos *conjuntos U* e *K* segue-se a identificação da localização da força harmónica de excitação, da força de inércia resultante da massa adicional e do momento adicional gerado pela redução de rigidez. No gráfico da figura 4.23 apresenta-se os erros acumulados corrigidos associados a todas as combinações de uma até quatro incógnitas.

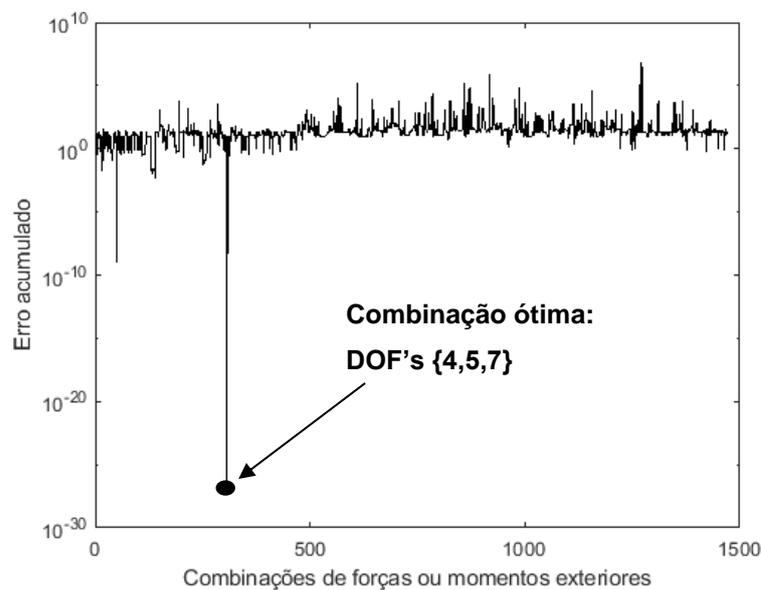


Figura 4.23: Erro acumulado corrigido para combinações até quatro incógnitas

Analisando-se o gráfico do erro acumulado corrigido concluí-se imediatamente que existe uma combinação que minimiza o erro de forma clara. A combinação ótima contém os graus de liberdade {4,5,7}, rotação do nó 2, deslocamento transversal do nó 3 e deslocamento transversal do nó 4, respetivamente.

Uma particularidade interessante é que o erro mínimo local, para combinações de 2 incógnitas, inclui dois dos graus de liberdade da combinação ótima. Na figura 4.24 apresenta-se o gráfico representativo dos erros acumulados para combinações de duas incógnitas.

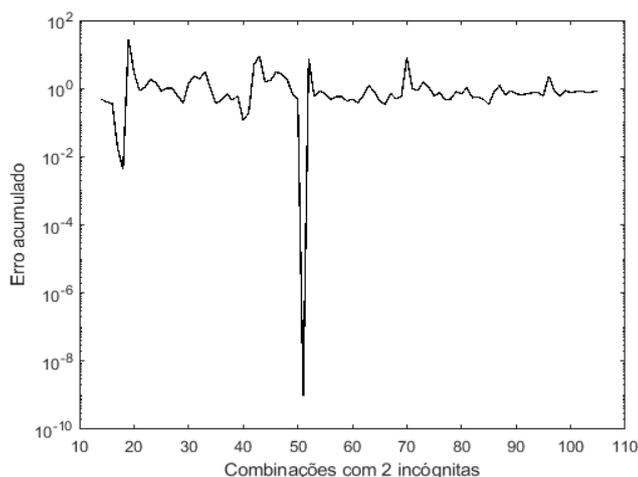


Figura 4.24: Erro acumulado para combinações de duas incógnitas

Pela observação da figura 4.24, a constatação que existe uma combinação que minimiza o erro para combinações de 2 incógnitas é imediata. A mesma é a combinação 51 que contém os graus de liberdade {4,5}, dois dos graus de liberdade que constituem a combinação ótima. Esta ocorrência pode-se revelar de extrema importância, caso seja estritamente vital reduzir o tempo de simulação. Uma vez que o erro mínimo local para combinações de duas incógnitas inclui os graus de liberdade {4,5}, apenas seria necessário calcular os erros acumulados para combinações de três que incluíssem os graus de liberdade {4,5}. Desta forma, o número total de combinações a analisar seria reduzir-se-ia de forma muito substancial.

Uma vez localizados os graus de liberdade que constituem a combinação ótima, concluí-se que as alterações estruturais ocorreram nos nós que incluem os graus de liberdade 4 e 7. Esta conclusão é imediata uma vez que se conhece *a priori* que a força exterior se localiza no nó 3, que possui o grau de liberdade de deslocamento transversal 5. Resta agora decidir qual a modificação estrutural que ocorreu no grau de liberdade 4 ou no grau de liberdade 7. Uma vez que se considera que a adição de massa pontual apenas afeta o deslocamento transversal nodal, concluí-se que o grau de liberdade correspondente à adição de massa é o grau de liberdade 7, visto que o grau de liberdade 4 corresponde a uma rotação. Sendo assim, determina-se que a massa pontual foi adicionada no nó 4, cujo grau de liberdade de deslocamento transversal é o grau de liberdade global 7. Identificado o nó onde se localiza a massa, concluí-se imediatamente a redução de rigidez ocorreu no nó 2.

Para se determinar a quantidade de massa que foi adicionada aplica-se a equação (3.19), deduzida na secção 3.2.3, da seguinte forma,

$$\{F_{DM}(\omega)\} = \omega^2[\Delta M_{7 \times 7}]\{Y_7(\omega)\} \Leftrightarrow [\Delta M_{7 \times 7}] = \frac{\{F_{DM}(\omega)\}}{\omega^2\{Y_7(\omega)\}} \quad (4.4)$$

No gráfico da figura 4.25a apresenta-se o valor da massa adicionada,  $[\Delta M_{7 \times 7}]$ , calculado para toda a gama de frequências de vibração. Calculando-se a média dos valores obtidos determinou-se um valor de  $[\Delta M_{7 \times 7}] = 0,020000000004048 \text{ kg}$ , praticamente igual ao valor real de  $0,02 \text{ kg}$ .

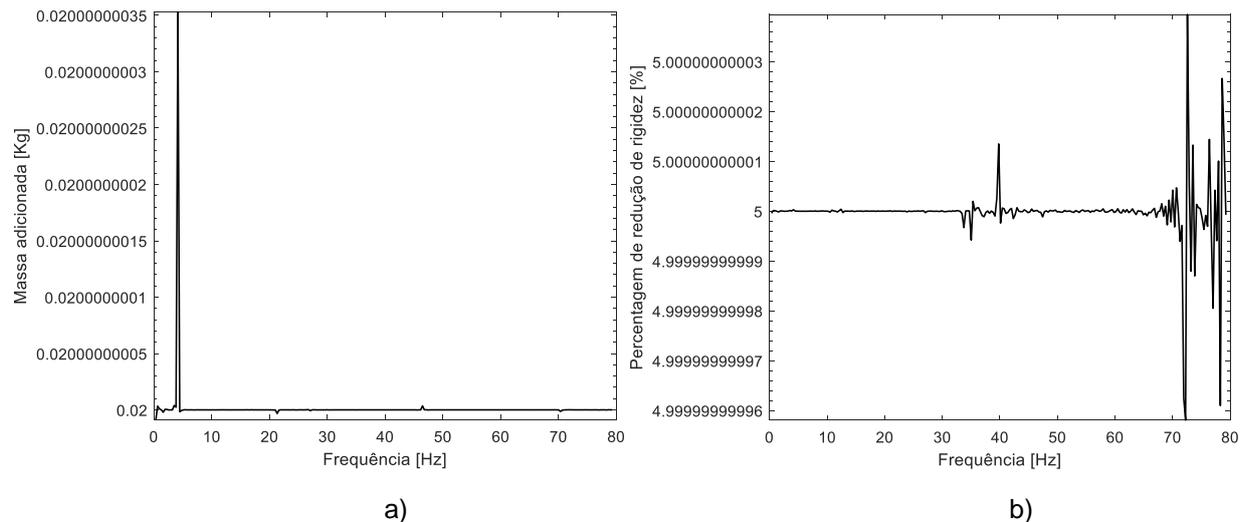


Figura 4.26: a) Massa pontual calculada para cada frequência de vibração b) Percentagem de redução de rigidez calculada para cada frequência de vibração

Visando quantificar a alteração de rigidez aplica-se a equação (3.18), também deduzida na secção 3.2.3, da seguinte forma,

$$\{F_{DK}(\omega)\} = -[\Delta K_{4 \times 4}]\{Y_4(\omega)\} \Leftrightarrow [\Delta K_{4 \times 4}] = -\frac{\{F_{DK}(\omega)\}}{\{Y_4(\omega)\}} \quad (4.5)$$

O valor da variação de rigidez,  $[\Delta K_{4 \times 4}]$ , calcula-se para todas as frequências. A razão entre os valores obtidos e a entrada  $4 \times 4$  da matriz de rigidez global da viga original apresenta-se no gráfico da figura 4.25b. Calculando-se a média dos valores apresentados na figura 4.25b, quantificou-se uma redução de rigidez de  $0.04999999999999799$ , praticamente igual ao valor real de  $5\%$ .

#### 4.2.4 Formação de uma fissura aberta numa viga

Com o intuito de se determinar a profundidade e a localização de uma fissura numa viga de Bernoulli-Euler, aplicando-se os fundamentos de transmissibilidade de deslocamentos, segue-se a metodologia descrita na secção 3.2.4.

No caso em estudo considera-se que a fissura se forma no centro do elemento 4 da viga modelada em elementos finitos e tem uma profundidade  $d_{cj} = 0,007 \text{ m}$ . Aplicou-se uma força com  $3000 \text{ N}$  de amplitude, no nó 3 da viga, com a finalidade de se excitarem os deslocamentos e rotações da estrutura. O caso descrito representa-se na figura 4.26.

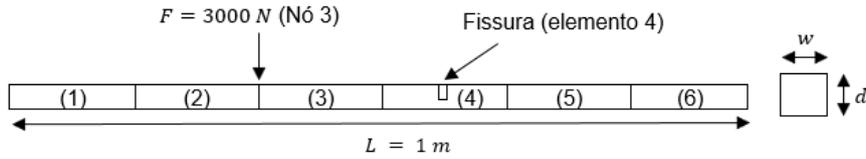


Figura 4.27: Viga livre nas extremidades discretizada em seis elementos finitos com uma fissura no elemento 4

A espessura e a altura da secção reta da viga são, respetivamente,  $w = 0,01 \text{ m}$  e  $d = 0,01 \text{ m}$ . O comprimento efetivo, que define a vizinhança de influência da fissura, determina-se aplicando-se a equação (2.103), deduzida na secção 2.6.4, e obteve-se o valor  $l_c = 1,5 \cdot d = 0,015 \text{ m}$ . Visto que a fissura se localiza no centro do elemento 4 e o comprimento dos elementos finitos é constante e de valor  $l_e = \frac{1}{6} \approx 0,167 \text{ m}$ , concluí-se que a zona de influência da fissura está compreendida entre os comprimentos  $\frac{l_e}{2} - l_c \approx 0,068 \text{ m}$  e  $\frac{l_e}{2} + l_c \approx 0,098 \text{ m}$ , medidos no referencial local do elemento onde se formou a fissura. Desta forma é imediato constatar que a zona de influência da fissura está confinada ao elemento.

A matriz de redução de rigidez,  $[\Delta K_{cj}]$ , introduzida na secção 2.6.4, tem dimensão  $14 \times 14$  e as únicas entradas não-nulas são aquelas correspondentes aos graus de liberdade do elemento 4. O elemento 4 contém os nós 4 e 5 e os seguintes graus de liberdade: grau de liberdade 7 (deslocamento transversal do nó 4), grau de liberdade 8 (rotação do nó 4), grau de liberdade 9 (deslocamento transversal do nó 5) e grau de liberdade 10 (rotação do nó 5).

Aplicando a equação (2.109) para o caso em estudo nesta secção,

$$\{F_D(\omega)\} = [K_{cj}^4] \begin{Bmatrix} Y_7(\omega) \\ Y_8(\omega) \\ Y_9(\omega) \\ Y_{10}(\omega) \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

onde  $[K_{cj}^4]$  é a matriz de redução de rigidez elementar do elemento fissurado, dada pela equação (2.106), e  $Y_7(\omega)$ ,  $Y_8(\omega)$ ,  $Y_9(\omega)$  e  $Y_{10}(\omega)$  são os valores dos deslocamentos e rotações dos graus de liberdade associados ao mesmo elemento. A equação (4.6) permite concluir que o método de identificação de forças, aplicando-se o conceito de transmissibilidade de deslocamentos, terá de identificar a localização de três forças e dois momentos. Nomeadamente, as duas forças e os dois momentos gerados pela fissura e a força harmónica aplicada no nó 3. Realça-se que, uma vez identificada a localização do vetor de forças  $\{F_D(\omega)\}$ , determina-se de forma imediata o elemento onde se formou a fissura. Pelas mesmas razões discutidas ao longo deste capítulo, o conjunto  $K$  terá de ter, pelo menos, dimensão cinco. Definiram-se os conjuntos  $U$  e  $K$  da seguinte forma:

- i. Conjunto  $U$ : graus de liberdade  $\{8,10\}$ ;
- ii. Conjunto  $K$ : graus de liberdade  $\{3,5,7,9,11,13\}$ .

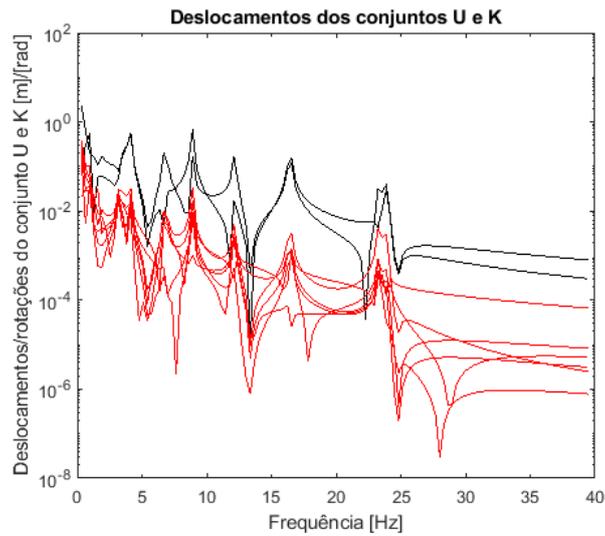


Figura 4.28: Deslocamentos/rotações dos conjuntos *U* e *K* da viga modificada

Na figura 4.27 apresenta-se o gráfico das rotações do conjunto *U*, a preto, e os deslocamentos do conjunto *K*, a vermelho. Na figura 4.28 representa-se a preto as rotações do conjunto *U* calculadas na estrutura modificada, e a vermelho apresenta-se as rotações do conjunto *U* calculadas na estrutura original, sem modificações estruturais. A diferença entre as rotações calculadas é bastante significativa, principalmente para frequências de vibração mais reduzidas.

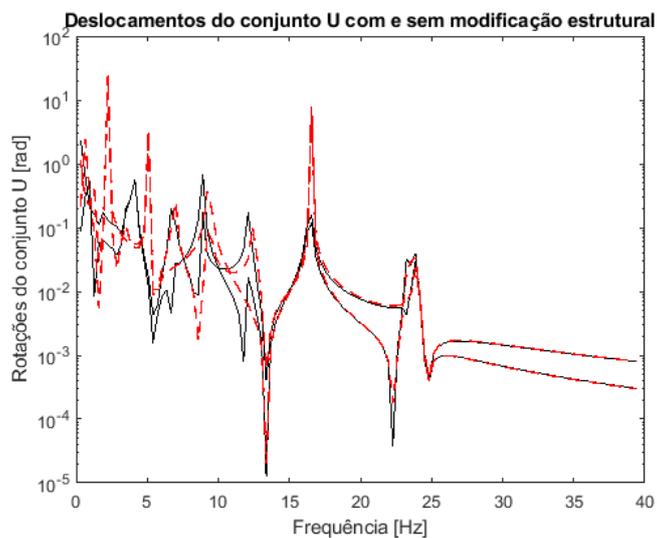


Figura 4.29: Rotações do conjunto *U* da viga original e da viga com alterações estruturais

Depois de concluído o cálculo dos deslocamentos/rotações dos conjuntos *U* e *K*, segue-se a identificação da localização das forças e momentos adicionais, gerados pela formação da fissura. No gráfico da figura 4.29 apresenta-se os erros acumulados corrigidos associados a todas as combinações de uma até seis incógnitas.

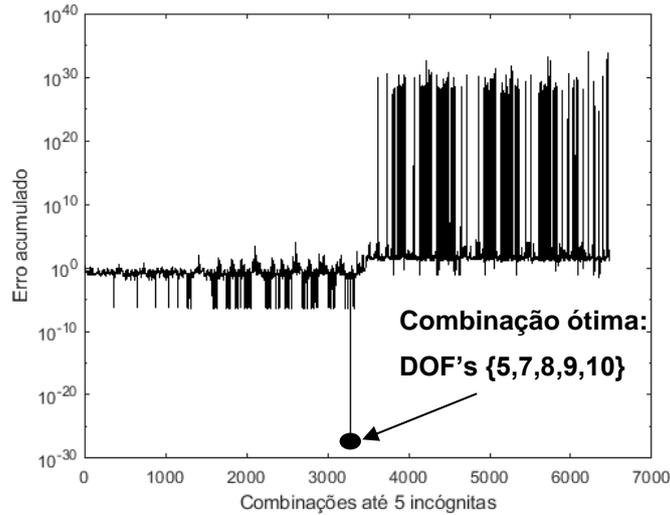


Figura 4.30: Erro acumulado corrigido para combinações até seis incógnitas

Analisando-se o gráfico da figura 4.29 constata-se de forma nítida que existe uma combinação que minimiza o erro acumulado corrigido. A combinação ótima contém os graus de liberdade {5, 7, 8, 9, 10}, precisamente o deslocamento transversal do nó onde está aplicada a força exterior, grau de liberdade 5, e o graus de liberdade associados ao elemento 4. Uma vez que a localização da força harmónica exterior é conhecida, conclui-se que a fissura se localiza no elemento 4 da viga modelada em elementos finitos.

Concluída a determinação do elemento onde se localiza a fissura, segue-se a determinação das constantes de redução de rigidez, que se calculam aplicando-se a equação (3.26). Adaptando a equação (3.26) ao caso em estudo resulta,

$$\begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{14} \\ k_{22} \\ k_{24} \\ k_{44} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [Q(\omega_1)] \\ \vdots \\ [Q(\omega_{124})] \end{bmatrix}^+ \begin{Bmatrix} \{F^4(\omega_1)\} \\ \vdots \\ \{F^4(\omega_{124})\} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

onde  $\{F^4(\omega_n)\}$  é o vetor de forças correspondente ao elemento 4, para  $n$  – ésima frequência. O vetor de forças associado ao elemento 4 obtém-se através da reconstrução das forças exteriores, aplicando-se a equação (3.10). Definindo a matriz  $[Q(\omega_n)]$  para o elemento onde se localiza a fissura obtém-se,

$$[Q(\omega_n)] = \begin{bmatrix} \Delta(\omega_n) & Y_8(\omega_n) & Y_{10}(\omega_n) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta(\omega_n) & 0 & Y_8(\omega_n) & Y_{10}(\omega_n) & 0 \\ -\Delta(\omega_n) & -Y_8(\omega_n) & -Y_{10}(\omega_n) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta(\omega_n) & 0 & Y_8(\omega_n) & Y_{10}(\omega_n) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

onde  $\Delta(\omega_n) = Y_7(\omega_n) - Y_9(\omega_n)$ ,  $Y_7$  e  $Y_9$  são os deslocamentos nodais do elemento 4 e  $Y_8$  e  $Y_{10}$  são as rotações nodais do mesmo elemento.

No gráfico da figura 4.30 apresenta-se o vetor das forças reconstruídas para toda a gama de frequências de vibração. Como seria expectável, obteve-se um valor de 3000 N, em toda a gama de frequências, para a força reconstruída no nó onde se aplicou a força de excitação, representada a azul.

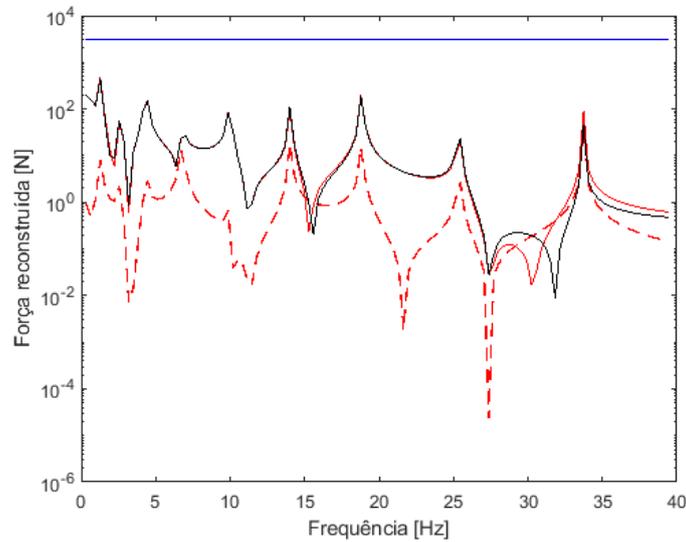


Figura 4.31: Forças reconstruídas para toda a gama de frequências

Uma vez calculadas as seis constantes de redução de rigidez, invertendo-se o sistema de equações apresentado na equação (4.7), procede-se a determinação do segundo momento de área na secção da fissura,  $I_{cj}$ , e da localização da fissura,  $\zeta_j$ . Para tal resolve-se o seguinte sistema de duas equações, onde ambas as equações foram previamente apresentadas na equação (2.107),

$$\begin{cases} k_{12} = \frac{12E(I_0 - I_{cj})}{l_e^3} \left[ \frac{l_c^3}{l_e^2} + l_c \left( 2 - \frac{7\zeta_j}{l_e} + \frac{6\zeta_j^2}{l_e^2} \right) \right] \\ k_{14} = \frac{12E(I_0 - I_{cj})}{l_e^3} \left[ \frac{l_c^3}{l_e^2} + l_c \left( 1 - \frac{5\zeta_j}{l_e} + \frac{6\zeta_j^2}{l_e^2} \right) \right] \end{cases} \quad (4.9)$$

A resolução do sistema de equações resulta nos seguintes valores:  $\zeta_j = 0,0833 \text{ m} = \frac{l_e}{2}$  e  $I_{cj} = 2,25 \times 10^{-11} \text{ m}^4$ .

Uma vez que se determinou um valor da localização da fissura correspondente a metade do comprimento do elemento, concluí-se que se determinou com exatidão a localização da fissura,  $\zeta_j$ . No referencial global da viga, a fissura localiza-se na coordenada longitudinal,

$$x_{fissura} = x(e) + \zeta_j = 3 \times l_e + \zeta_j \approx 0,583 \text{ m} \quad (4.10)$$

onde  $x(e)$  é a coordenada do primeiro nó do elemento onde se localiza a fissura, como se pode observar na figura 2.10.

Aplicando-se a equação (3.28) calculou-se o valor da profundidade da fissura,  $d_{cj} \approx 0,00699 \text{ m}$ , valor este aproximadamente igual ao valor real de  $0,007 \text{ m}$ .

### 4.3 Identificação de forças exteriores aplicadas numa placa

Na secção 4.1 demonstrou-se a aplicabilidade do conceito de transmissibilidade de forças e de deslocamentos na identificação de forças exteriores aplicadas numa viga. Nesta secção estende-se a complexibilidade do método de identificação de forças, aplicando-o ao caso de uma placa fina. Para o estudo desta estrutura bidimensional considera-se que a mesma se comporta segundo a teoria de placa de Kirchhoff-Love, descrita na secção 2.3.2. Os resultados do método de identificação de forças numa placa obtêm-se através da simulação do código *main\_placakirchhoff.m*, disponibilizado em anexo, em ambiente *MATLAB*. A placa analisada ao longo desta secção tem a propriedades apresentadas na tabela 3.2.

<b>Material</b>	Alumínio
<b>Massa específica (<math>\rho</math>)</b>	2768 kg/m <sup>3</sup>
<b>Coefficiente de Poisson (<math>\nu</math>)</b>	0,3
<b>Módulo de Young Longitudinal (<math>E</math>)</b>	70 GPa
<b>Comprimento (<math>L</math>)</b>	1 m
<b>Largura (<math>W</math>)</b>	0,5 m
<b>Espessura (<math>t</math>)</b>	0,002 m

Tabela 4.2: Propriedades da placa

As características da modelação da placa em elementos finitos apresentam-se na tabela 4.3. Na figura 4.31 representa-se a placa modelada em elementos finitos.

<b>Nº de nós no eixo longitudinal</b>	30
<b>Nº de nós no eixo transversal</b>	20
<b>Nº total de nós</b>	600
<b>Nº total de graus de liberdade</b>	1800
<b>Comprimento do elemento finito (<math>dx</math>)</b>	0,0345 m
<b>Largura do elemento finito (<math>dy</math>)</b>	0,0263 m
<b>Nº de elementos finitos</b>	551

Tabela 4.3: Propriedades da modelação da placa em elementos finitos

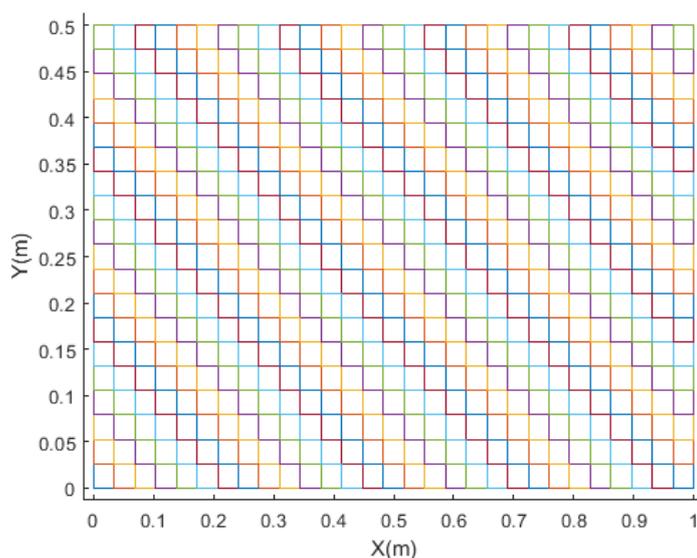


Figura 4.32: Placa modelada em elementos finitos

### 4.3.1 Transmissibilidade de deslocamentos

Nesta secção analisa-se a aplicabilidade do conceito de transmissibilidade de deslocamentos na identificação de forças exteriores aplicadas numa placa, seguindo-se a metodologia descrita na secção 3.1.2. A estrutura bidimensional a estudar possui todas as extremidades livres de apoios. Sendo assim, satisfaz-se a condição necessária para a dedução da equação da matriz de transmissibilidade de deslocamentos, equação (2.77).

A força de excitação harmónica a identificar tem uma amplitude de  $100\text{ N}$  e localiza-se no nó 225, representado na figura 4.32. Sendo assim, como o *conjunto A* tem dimensão unitária, o *conjunto K* terá de ter, no mínimo, dimensão unitária. No entanto, uma vez que durante o processo de identificação da força exterior analisa-se combinações com dimensão dois, definiu-se o *conjunto K* com dois graus de liberdade. Os *conjuntos U* e *K* definiram-se da seguinte forma:

- i. *Conjunto U*: deslocamento transversal do nó 324;
- ii. *Conjunto K*: deslocamento transversal dos nós {120, 400}.

A posição dos nós constituintes dos *conjuntos U* e *K* e a localização da força harmónica de excitação apresentam-se na figura 4.32.

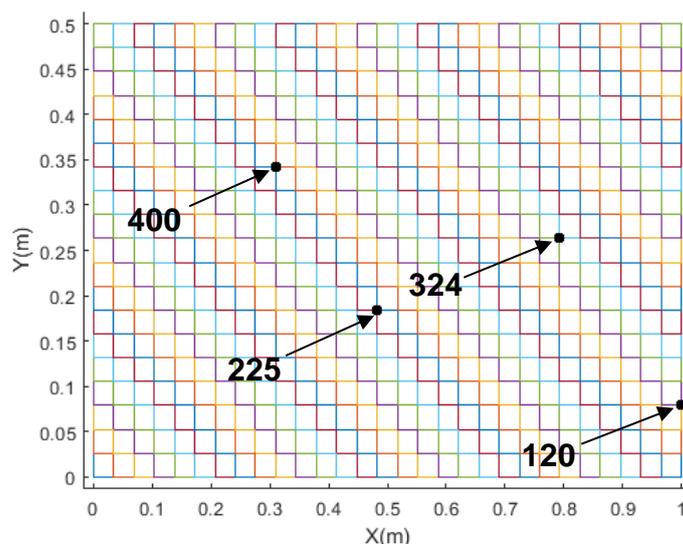


Figura 4.33: Nós dos *conjuntos U* e *K* e localização da força harmónica exterior

Uma vez definidos os nós dos *conjuntos U* e *K* segue-se o cálculo dos deslocamentos transversais correspondentes, para toda a gama de frequências. As frequências analisadas variam entre os 0 e 48  $\text{Hz}$ , em intervalos de 2  $\text{Hz}$ . Para o cálculo dos deslocamentos, a matriz de massa e de rigidez globais da placa resultam da assemblagem das matrizes de massa e de rigidez elementares da placa de Kirchhoff-Love, dadas pelas equações (2.62) e (2.56), respetivamente. Os deslocamentos calculados na gama de frequências considerada apresentam-se na figura 4.33.

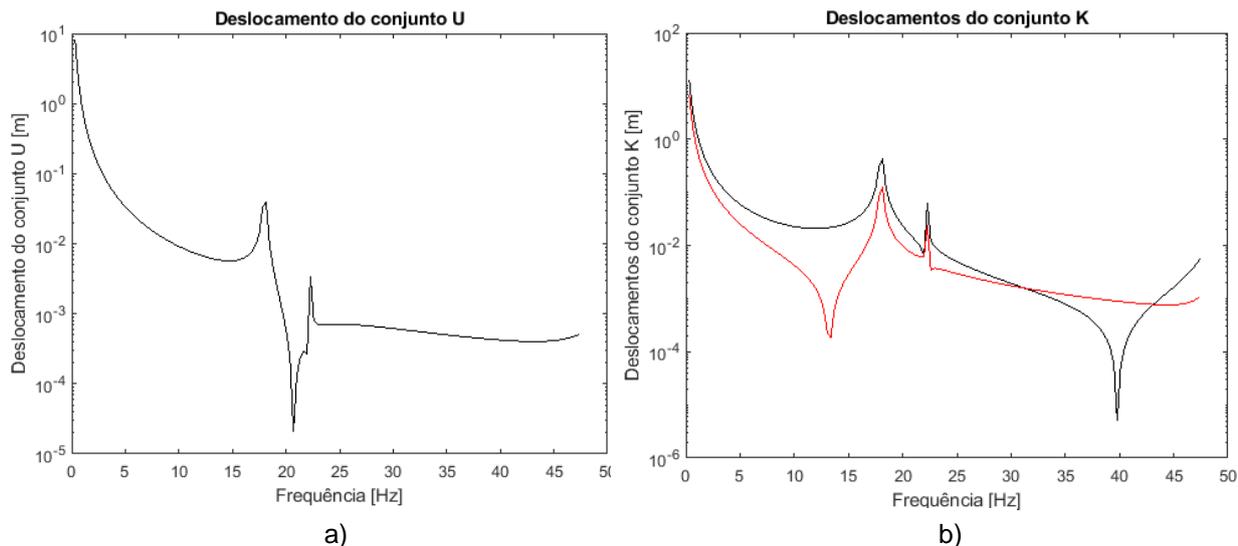


Figura 4.34: a) Deslocamento do *conjunto U* b) Deslocamentos do *conjunto K*

Concluído o cálculo dos deslocamentos inicia-se o processo de identificação de forças, visando-se determinar a matriz de transmissibilidade de deslocamentos que minimiza o erro acumulado. A metodologia de identificação de forças numa placa é equivalente à metodologia seguida na identificação de forças numa viga. No entanto, o caso da placa é mais moroso, uma vez que o número de combinações a analisar é muito superior, comparativamente ao caso da viga.

Com o intuito de minimizar o tempo da simulação do método de identificação de forças numa placa consideram-se apenas combinações de forças exteriores, estabelecendo-se *a priori* que não existem momentos aplicados. Com base nesta assunção, as combinações a analisar englobam apenas deslocamentos transversais, pelo que o número de combinações a considerar reduz-se para um terço do número total de combinações, visto que cada nó da placa contém um deslocamento transversal e duas rotações.

Na figura 4.34 apresenta-se o gráfico do erro acumulado corrigido para todas as combinações possíveis de 1 e 2 incógnitas. A análise do gráfico do erro acumulado corrigido permite concluir de forma indubitável que se identificou uma combinação ótima. A combinação ótima determinada é a combinação 225, que contém o grau de liberdade de deslocamento transversal do nó 225, local onde se encontra aplicada a força exterior. A principal diferença entre a viga e a placa, relativamente à aplicação do método de identificação de forças, é o número de graus de liberdade resultantes da modelação em elementos finitos das estruturas. O aumento muito significativo do número de nós da placa, comparativamente ao número de nós da viga, implica um maior número de localizações possíveis das forças exteriores, o que resulta num tempo de simulação acrescido.

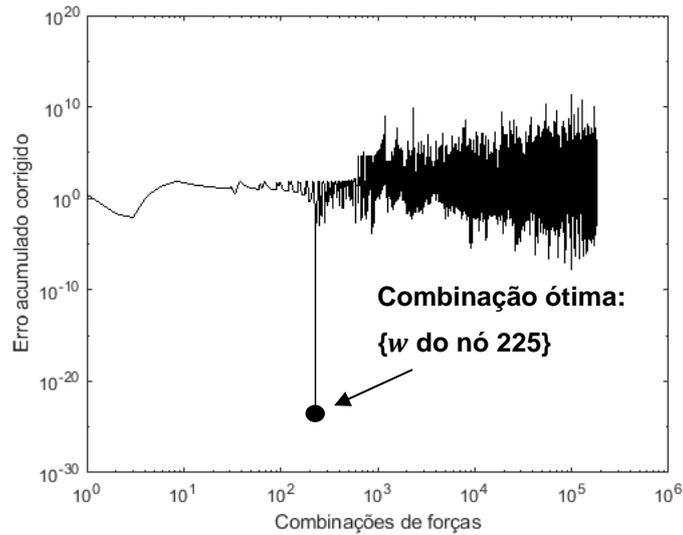


Figura 4.35: Erro acumulado corrigido para combinações de uma e duas incógnitas

Na figura 4.35 apresenta-se a reconstrução de forças de um falso positivo para fins ilustrativos. A combinação usada contém os deslocamentos transversais dos nós 225 e 215 e gera um erro acumulado de  $3,95 \times 10^{-25}$ , valor muito próximo do erro acumulado calculado para a combinação correta.

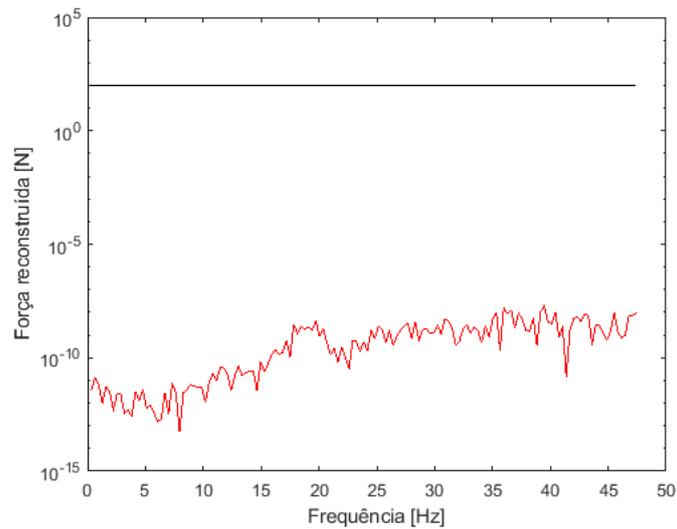


Figura 4.36: Reconstrução de forças para um falso positivo

Os valores apresentados na figura 4.35 correspondem à definição de falsos positivos. A preto apresenta-se a força associada ao nó 225, com amplitude de 100 N ao longo de todas as frequências e a vermelho representa-se a força associada ao nó 215, cujo valor é identicamente nulo para todas as frequências.

## 4.4 Adição de uma massa pontual na placa

Nesta secção estuda-se a aplicabilidade do conceito de transmissibilidade de deslocamentos na identificação de uma massa pontual adicionada numa placa. Para tal aplica-se a metodologia descrita na secção 3.2.1. A placa a estudar nesta secção tem as mesmas características físicas e dimensionais que a placa analisada na secção anterior. Os resultados do método de identificação de de uma massa pontual obtêm-se através da simulação do código *main\_placakirchhoff.m*, disponibilizado em anexo, em ambiente *MATLAB*.

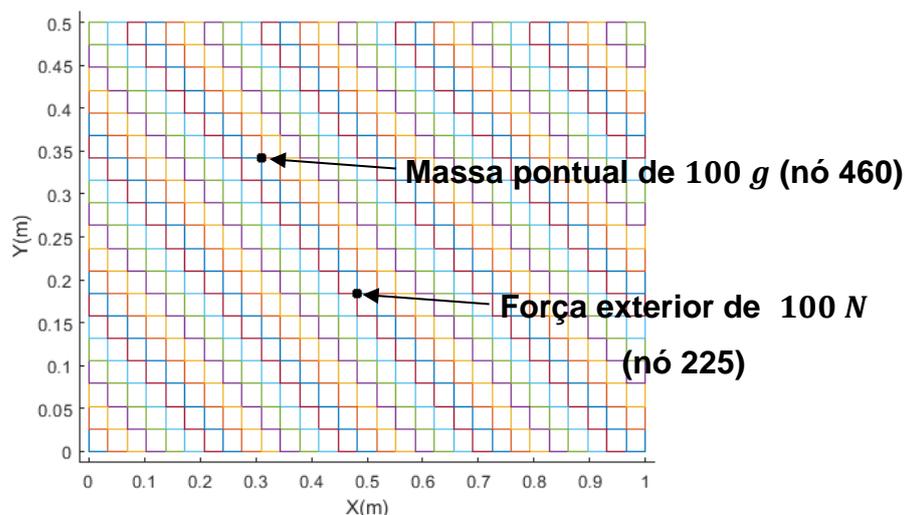


Figura 4.37: Localização da força harmónica de excitação e da massa pontual

A metodologia de identificação de dano estrutural requer a aplicação de uma força harmónica de localização conhecida para excitar os deslocamentos da placa, possibilitando assim a aplicação do conceito de transmissibilidade de deslocamentos. No caso da presente secção aplicou-se uma força harmónica de 100 N no nó 225 e adicionou-se uma massa de 100 g no nó 400, como se observa na figura 4.36.

Para o caso da placa em estudo, a matriz de variação de massa,  $[\Delta M]$ , é uma matriz com dimensão  $1800 \times 1800$ , uma vez que a placa descretizou-se em 600 nós e existem três graus de liberdade por nó. Assume-se novamente que a adição de uma massa pontual apenas influencia os deslocamentos transversais da estrutura. Por conseguinte, de todas as entradas da matriz  $[\Delta M]$ , a única entrada não-nula é aquela referente ao grau de liberdade de deslocamento transversal correspondente ao nó onde se adicionou a massa pontual. Para o caso representado na figura 4.36, a única entrada não nula da matriz  $[\Delta M]$  é a entrada  $1378 \times 1378$ , visto que o grau de liberdade 1378 corresponde ao deslocamento transversal do nó 460.

Visto ser necessário identificar duas forças, a força de inércia resultante da massa adicional e a força harmónica, o conjunto  $K$  necessita de ser constituído por dois graus de liberdade, pelo menos. Seguindo a linha de raciocínio usada ao longo deste capítulo, os conjuntos  $U$  e  $K$  definiram-se da seguinte forma:

- i. *Conjunto U*: deslocamento transversal do nó 324;
- ii. *Conjunto K*: deslocamento transversal dos nós {120, 400, 550}.

A localização dos nós constituintes dos *conjuntos U* e *K* apresenta-se na figura 4.37. No gráfico da figura 4.38 apresenta-se a vermelho os deslocamentos do *conjunto U* calculados na estrutura modificada, comparativamente aos deslocamentos do *conjunto U* calculados na estrutura original, representados a preto. Os deslocamentos dos *conjuntos U* e *K* calcularam-se para a gama de frequências utilizada na secção 4.3.1. Analisando o gráfico da figura 4.38 constata-se que a diferença entre os deslocamentos do *conjunto U* da estrutura original e da estrutura modificada é bastante significativa para frequências próximas das frequências de ressonância e de anti-ressonância.

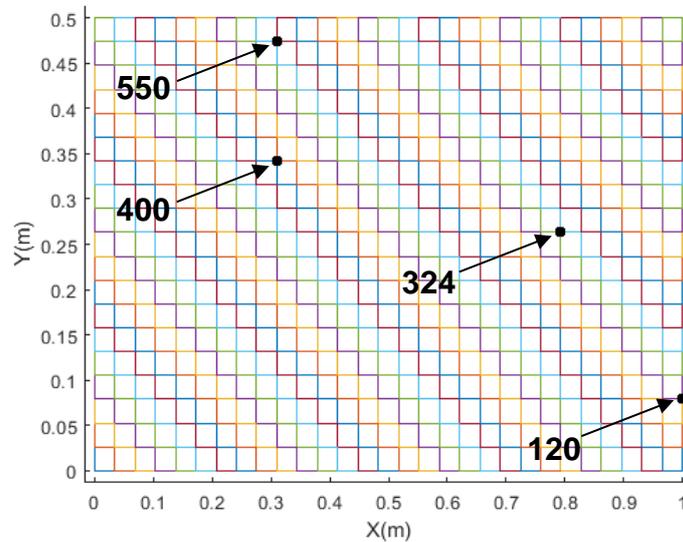


Figura 4.38: Localização dos nós dos *conjuntos U* e *K*

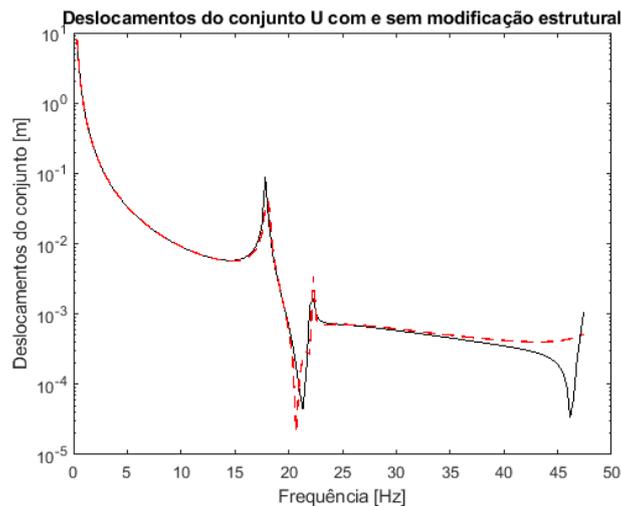


Figura 4.39: Deslocamentos do *conjunto U* da placa original e da placa modificada

No gráfico da figura 4.39 apresenta-se os erros acumulados associados a todas as combinações de uma e de duas incógnitas. A análise do gráfico permite concluir de forma imediata que existe uma combinação que minimiza o erro acumulado. A combinação que minimiza o erro é a

combinação 109435, que corresponde a forças aplicadas nos nós 225 e 460, sendo estes nós a localização da força exterior e da massa pontual.

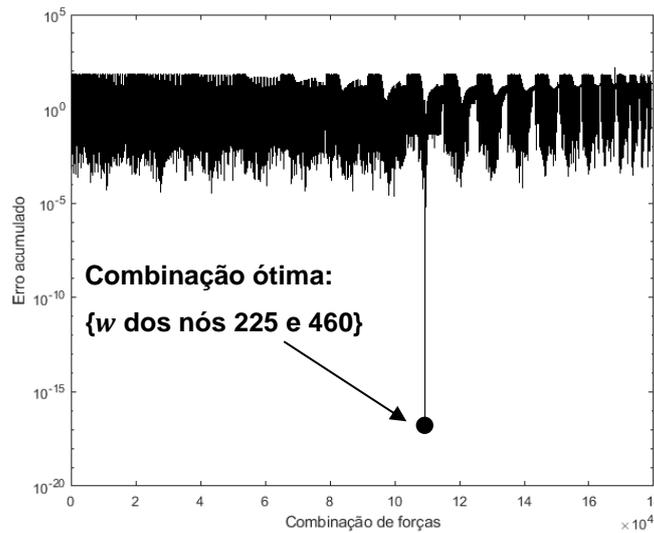


Figura 4.40: Erro acumulado para combinações de uma e duas incógnitas

Seguindo a linha de raciocínio utilizada ao longo deste capítulo, para se confirmar que a combinação referida no parágrafo anterior é a combinação ótima, teria de ser calculado o erro acumulado para todas as combinações de três incógnitas e, posteriormente, estabelecer-se a condição necessária reconstruindo-se as forças para combinações de dimensão três que geram erros mínimos locais. Todavia, caso se seguisse esta linha de pensamento para o caso em estudo, teriam de ser analisadas 35820200 combinações, o que implicaria uma simulação extremamente morosa. Alternativamente, considera-se que as combinações que geram erros mínimos locais para combinações de três incógnitas incluem a combinação que contém os deslocamentos transversais dos nós 225 e 460. Assim sendo, as combinações que geram erros mínimos locais para combinações de três incógnitas são combinações do tipo  $\{w_{225}, w_{460}, w_n\}$ , sendo que  $n \in [1, 2, \dots, 224, 226, \dots, 459, 461, \dots, 600]$ , visto que a discretização da placa contabiliza um total de 600 nós. As variáveis  $w_n$  referem-se ao deslocamento transversal do nó  $n$ . As combinações referidas são possíveis combinações ótimas até serem descartadas, caso se revelem falsos positivos, ou seja, caso a força reconstruída no nó  $a$  seja identicamente nula para toda a gama de frequências.

As forças aplicadas nos nós das possíveis combinações ótimas foram reconstruídas aplicando-se a equação (3.10), determinando-se que, para todos os nós adicionais do conjunto  $n$ , a força associada é identicamente nula em toda a gama de frequências. Por conseguinte, prova-se que todas as possíveis combinações ótimas de três incógnitas são falsos positivos e a combinação ótima é aquela que contém os nós 225 e 460. Uma vez que se conhece *a priori* a localização da força exterior no nó 225, constata-se imediatamente que a massa foi adicionada no nó 460.

No gráfico da figura 4.40 apresenta-se, de forma sobreposta, a reconstrução de forças para todas as possíveis combinações ótimas de três incógnitas. A força no nó 225, ponto de aplicação da força, representa-se a azul e a força de inércia no nó 460, local de adição da massa, representa-se a vermelho. A preto apresenta-se as forças nos nós adicionais. A análise da figura 4.40 permite concluir

que se calculou a amplitude correta da força de excitação exterior, para toda a gama de frequências. Concluí-se também que a força associada aos nós adicionais é nula para todas as frequências de vibração.

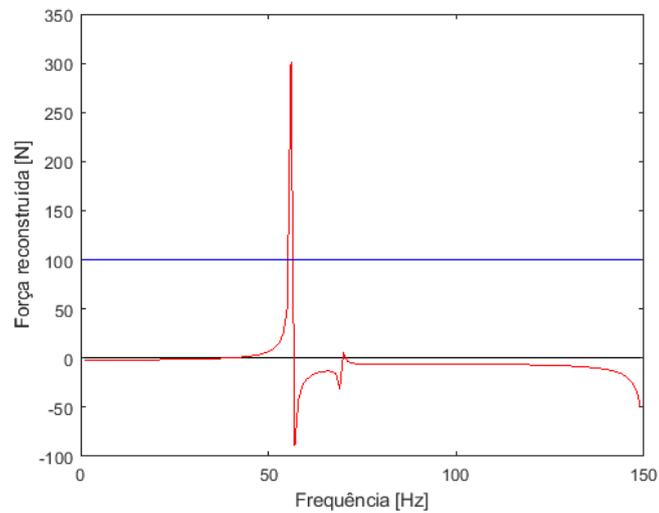


Figura 4.41: Reconstrução de forças nas possíveis combinações ótimas de três incógnitas

Uma vez identificada a localização da massa pontual, segue-se a quantificação da quantidade de massa que foi adicionada, aplicando-se a equação (3.14). Na figura 4.41 apresenta-se o gráfico da quantidade de massa adicionada calculada para cada frequência de vibração. Calculando-se a média dos valores apresentados obteve-se o valor exato e correto de  $0,1 \text{ kg}$ .

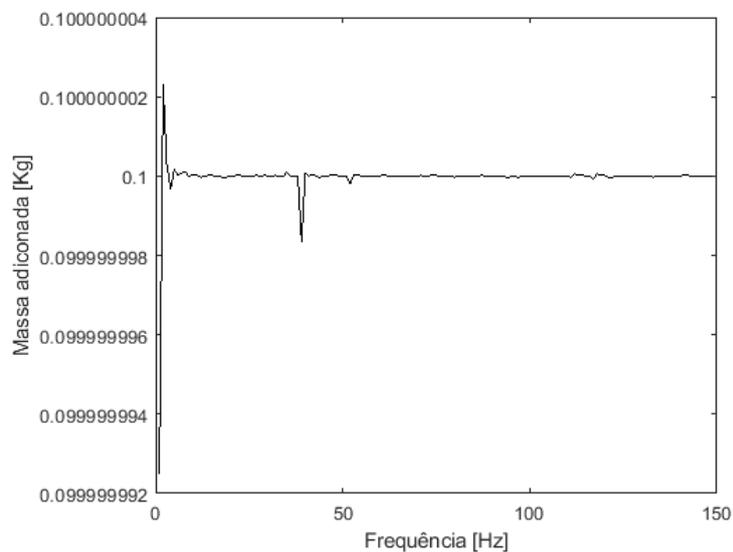


Figura 4.42: Massa pontual calculada para toda a gama de frequências de vibração



# Capítulo 5

## 5 Conclusões gerais e sugestões para trabalho futuro

Ao longo do capítulo 4 demonstrou-se que a aplicação numérica do método de identificação de forças, aplicando-se fundamentos de transmissibilidade, determina com sucesso a localização e a amplitude das forças exteriores aplicadas numa viga e numa placa, secções 4.1 e 4.3, respetivamente.

Nas secções 4.2 e 4.4 mostrou-se que o método de identificação numérica de modificações estruturais, através do conceito de transmissibilidade, determina com sucesso a localização das várias modificações estruturais estudadas, gerando resultados praticamente exatos relativamente à quantificação das mesmas.

Apesar dos bons resultados obtidos numericamente é necessário ter em consideração que, tipicamente, um problema inverso é bastante bastante sensível ao ruído dos sensores, utilizados na medição das forças de reação e dos deslocamentos da estrutura em ambiente de laboratório, o que pode resultar em desvios nos resultados pretendidos. No entanto, existem vários mecanismos para lidar com ruídos de sinais, como por exemplo a utilização de filtros passa-baixo caso os sensores experienciem ruído de fontes externas. A implementação de mecanismos que minimizam o efeito do ruído na identificação de forças e modificações estruturais é um tópico a ser analisado extensivamente no futuro.

Os resultados numéricos obtidos para o caso da placa, secções 4.3 e 4.4, espelham uma das possíveis limitações do método de identificação de forças e dano estrutural. Para uma estrutura modelada num número considerável de elementos finitos, o número de combinações de forças ou momentos exteriores a considerar torna-se bastante elevado. Tendo em linha de conta o caso estudado na secção 4.4, para se identificar a adição de uma massa pontual na placa calculou-se o erro

acumulado para mais de  $17 \times 10^4$  combinações de forças exteriores, o que implicou um tempo de simulação de aproximadamente uma hora. Porventura, devido a tempos de simulação bastante elevados, a implementação em tempo real deste método torna-se impraticável caso seja estritamente necessário avaliarem-se um número muito elevado de combinações.

No entanto, existem várias possibilidades que permitem reduzir o tempo de simulação. Uma das possibilidades é o uso de computação paralela, em que o cálculo dos erros é subdividido por vários computadores ou memórias. Este tipo de computação opera sob o princípio de que os problemas de grande dimensão podem ser divididos em problemas menores, que se resolvem de forma simultânea (em paralelo). Outra possibilidade de redução do tempo de simulação baseia-se na análise estrutural do problema. Caso seja possível prever *a priori* os locais da estrutura a analisar onde existe maior probabilidade de ocorrer uma modificação estrutural, as combinações de forças ou momentos exteriores a analisar podem ficar confinadas na vizinhança dos locais críticos referidos. Reduz-se assim o número de erros acumulados a calcular e, conseqüentemente, o tempo de simulação.

Embora o problema de localização de forças ou dano estrutural aplicando-se conceitos de transmissibilidade possa envolver a análise de um número elevado de combinações, quando comparado com outros métodos tradicionais, o cálculo do erro acumulado para cada uma das possíveis localizações de forças ou momentos exteriores é considerado numericamente eficiente. Tipicamente, os métodos tradicionais de identificação de forças ou modificações estruturais operam com matrizes completas, contrariamente ao método proposto, onde, para cada combinação, apenas se utilizam matrizes de transmissibilidade definidas nos graus de liberdade da combinação a analisar.

Um aspeto vantajoso do método de identificação de modificações estruturais apresentado é que os dados padrão da estrutura são definidos para a sua composição original. Nomeadamente, utiliza-se sempre a matriz de rigidez global da estrutura original para o cálculo das matrizes de transmissibilidade de deslocamentos e de forças. Conseqüentemente, uma vez que não se altera a matriz que caracteriza o comportamento dinâmico da estrutura a analisar, todas as matrizes de transmissibilidade requeridas durante a aplicação do método de identificação de forças ou modificações estruturais podem ser calculadas e guardadas em base de dados, previamente à simulação.

Sugere-se como trabalho futuro a aplicação numérica do método de identificação de forças em estruturas com nível de complexidade mais elevado. As matrizes de rigidez dinâmica global destas estruturas podem ser obtidas recorrendo-se a várias ferramentas computacionais de elementos finitos, como por exemplo os programas *ANSYS* e *SIEMENS NX*. Depois de obtidas estas matrizes, a metodologia a seguir não difere da metodologia apresentada na secção 3.1. O estudo da aplicação do método de identificação de modificações estruturais nestas estruturas iniciar-se-ia caso os resultados numéricos resultantes da aplicação do método de identificação de forças fossem satisfatórios.

Realça-se que é necessário efetuar uma validação experimental adicional dos métodos apresentados nesta trabalho, visando-se a corroboração e melhoria dos mesmos.

# Bibliografia

- [1] Y.E. Lage, N.M.M. Maia, M.M. Neves, "Force Magnitude Reconstruction Using the Force Transmissibility Concept", *Hindawi Publishing Corporation*, 2014.
- [2] C. W. Silva, *Sensor Systems Fundamentals and Applications*, CRS Press, Taylor and Francis Group.
- [3] A. N. Thite, D. J. Thompson, "The quantification of structure-borne transmission paths by inverse methods. Part 1: improved singular value rejection methods", *Journal of Sound and Vibration*, pp. 411-431, 2003.
- [4] A. N. Thite, D. J. Thompson, "The quantification of structure-borne transmission paths by inverse methods. Part 2: use of regularization methods", *Journal of Sound and Vibration*, pp. 433-451, 2003.
- [5] C. K. Ma, J. M. Chang, D. C. Lin, "Input Forces Estimation of Beam Structures by an Inverse Method", *Journal of Sound and Vibration*, pp. 387-407, 2003.
- [6] C. K. Ma, C.C. Ho, "An Inverse Method for the Estimation of Input Forces Acting On Non-Linear Structural Systems", *Journal of Sound and Vibration*, pp. 953-971, 2004.
- [7] J. E. Michaels, Y. H. Pao, "The inverse source problem for an oblique force on an elastic plate", *Journal of the Acoustic, Society of America*, pp. 2005-2011, 1984.
- [8] C.H. Huang, "An inverse non-linear force vibration problem of estimating the external forces in a damped system with time-dependent system parameters", *Journal of Sound and Vibration*, pp. 749-765, 2001.
- [9] N.M.M. Maia, Y.E. Lage, M.M. Neves, "Recent Advances on Force Identification in Structural Dynamics", in *INTECH open science*, Chapter 6, pages 103-132, 2012.
- [10] M.M. Neves, N.M.M. Maia, "Estimation of Applied Forces Using the Transmissibility Concepts", *Proceedings of ISMA 2010*, pp. 3887-3898, 2010.
- [11] Y.E. Lage, N.M.M. Maia, M.M. Neves, A.M.R Ribeiro, "Force identification using the concept of displacement transmissibility", *Journal of Sound and Vibration*, 332(2013):1674-1686, 2012.
- [12] Y.E.Lage, M.M. Neves, N.M.M. Maia, D. Tcherniak, "Force Transmissibility versus Displacement Transmissibility", *Journal of Sound and Vibration*, 333(22):5708-5722, 2014.
- [13] N.M.M. Maia, A.P.V. Urgueira, R.A.B. Almeida, "Whys and wherefores of transmissibility", in *Francisco Beltran-Carbajal(Ed.)*, *Vibration Analysis and Control – New Trends and Developments*, InTech, pp.187–216, 2001.
- [14] D. Ewins, W. Liu, "Transmissibility properties of MDOF systems", *16<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference*, pp. 847-854, Santa Barbara, Califórnia, EUA, 1998.
- [15] A. M. R. Ribeiro, "On the generalization of the transmissibility concept", *NATO/ASI Conference on Modal Analysis and Testing*, pp. 757-764, 1998.
- [16] N.M.M. Maia, M. Fontul, A.M.R. Ribeiro, "Transmissibility of Forces in Multiple-Degree-of-Freedom Systems", *Proceedings of ISMA 2006*, Leuven, Belgium, 2006.
- [17] T. J. Johnson, D. E. Adams, "Transmissibility as a differential indicator of structural damage", *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 124, no.4, pp. 634-641, 2002.

- [18] R.P.C. Sampaio, N.M.M. Maia, A.M.R. Ribeiro, J.M.M. Silva, "Damage Detection Using Transmissibility Concept", *Proceedings of the Sixth International Congress on Sound and Vibration (ICSV 6)*, Copenhagen, Dinamarca, 1999.
- [19] R.P.C. Sampaio, N.M.M. Maia, J.M.M. Silva, A.M.R. Ribeiro, "On the use of Transmissibility for Damage Detection and Location", *Proceedings of the European COST F3 Conference of System Identification & Structural Health Monitoring*, 363 376, Universidade Politécnica de Madrid, Espanha, 2000.
- [20] R.P.C. Sampaio, N.M.M. Maia, A.M.R. Ribeiro, J.M.M. Silva, "Transmissibility Techniques for Damage Detection", *Proceedings of 19<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference (IMAC XIX)*, 1524 1527, Kissimmee, Florida, EUA, 2001.
- [21] N.M.M. Maia, A.M.R. Ribeiro, D. Sampaio, "Using the Detection and Relative Damage Quantification Indicator (DRQ) with Transmissibility", *Key Engineering Materials*, 347 455 460, 1662-9795, 2007.
- [22] N. M. M. Maia, M. M. Neves, "Damage Detection in Structures using a Force Identification Algorithm based on Transmissibility", *2nd European Workshop on Structural Health Monitoring*, University of Sheffield, DEStech Publications Inc., 2004.
- [23] S. S. Rao, *Mechanical Vibrations*, fifth edition, Prentice Hall, Miami, EUA, 1952.
- [24] S. Timoshenko, J.N. Goodier, *Theory of elasticity*, 2<sup>nd</sup> edition, McGraw-Hill, Stanford University, EUA, 1951.
- [25] P. L. Gould, *Introduction to Linear Elasticity*, 2<sup>nd</sup> edition, Springer, Washington University, EUA, 1994.
- [26] J. N. Reddy, *An Introduction to the Finite Element Method*, third edition, McGraw-Hill, Texas A&M University College Station, Texas, EUA, 2006.
- [27] A. J.M. Ferreira, *Elementos Finitos em MATLAB*, 5 de Novembro, 2007.
- [28] T. Irvine, *Plate Bending via the finite element method with rectangular elements*, 6 de Maio, 2011.
- [29] O.C. Zienkiewicz, Y.K. Cheug, *The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs*, Proc. Inst. Civ. Eng, 1964.
- [30] T. A. N. Silva, M. M. Neves, N. M.M. Maia, "Transmissibility versus damage detection", *14<sup>th</sup> Conference on Dynamical Systems Theory and Applications DSTA 2017*, pp. 3901-3912, Łódź, 2017.
- [31] J.K. Sinha, M.I. Friswell, S. Edwards, "Simplified Models for the Location of Cracks in Beam Structures using Measured Vibration Data", *Journal of Sound and Vibration*, 251(1), 13-38, 2002.
- [32] S. Christides and A. D. S Barr, "One Dimensional Theory of Cracked Bernoulli-Euler Beams", *International Journal of Mechanical Science*, pp. 639-648, 1984.
- [33] A. M. R. Ribeiro, N. M. M. Maia, J. M. M. Silva, "Experimental evaluation of the transmissibility matrix", *17<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference*, pp. 1126-1129, 1999.
- [34] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu, *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, 6<sup>th</sup> edition, Elsevier Butterworth Heinemann, 2005.
- [35] A. W. Wegmuller, *Finite Element Analyses of Elastic-Plastic Plates and Eccentrically Stiffened Plates*, Fritz Engineering Laboratory Library, Lehigh University Bethlehem, Pennsylvania, 1971.
- [36] A. Adini, R.W. Clough, "Analysis of Plate Bending by the Finite Element Method", *Report submitted to the National Science Foundation*, 1960.

- [37] O.C. Zienkiewicz, Y.K. Cheung, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, 2<sup>nd</sup> edition, McGraw-Hill, New York, EUA, 1970.
- [38] R.J. Melosh, "Structural Analysis of Solids", *ASCE Structural Journal*, pp. 205-23, 1963.
- [39] N. M.M. Maia, J. M. Silva, *Vibrações e Ruído*, Sebentas Instituto Superior Técnico, SF Folhas.
- [40] G. Wei, W. Cheng, G. Jin, "Overview of the Latest Method and Development Direction for Dynamic Load Identification", *Applied Mechanics and Materials*, Vols 556-562 (2014), pp. 2573-2576, 2014.
- [41] W. Soedel, *Vibrations of Shells and Plates*, Third Edition, Marcel Dekker, New York, EUA, 2004.
- [42] K. K. Stevens, "Force identification problems—an overview," in *Proceedings of the 1987 SEM Spring Conference on Experimental Mechanics*, pp. 838–844, Houston, Texas, EUA, 1987.



# Anexo

## - Código main\_viga.m

Excerto do código main\_viga que implementa o método de identificação de forças numa através o conceito de transmissibilidade de forças (secção 4.1.1)

```
clear all;
clc;
%Propriedades da viga
rho=7850; %Massa especifica do aço inox em
kg/m3
A=1; %Área da secção reta
E=187500000000; %Módulo de Young aço inox
em Pa
I=2e-10; %Segundo momento de área
EI=E*I;
numx=6; %Número de elementos finitos na
discretização da viga
L=1; %Comprimento da viga
node=linspace(0,L,numx+1)'; %Vetor com a
posição dos 7 nós
xx=node;
numx=6; %Número de elementos finitos na
discretização da viga
L=1; %Comprimento da viga
node=linspace(0,L,numx+1)'; %Vetor com a
posição dos 7 nós
xx=node;
%Matriz de conectividades
for i=1:numx
    element(i,1)=i;
    element(i,2)=i+1;
end
numnode=size(node,1); %Número de nós (neste
caso 7)
numelem=size(element,1); %Número de
elementos (neste caso 6)
numnode=size(node,1); %Número de nós (neste
caso 7)
numelem=size(element,1); %Número de
elementos (neste caso 6)
%%Nota->2 graus de liberdade por nó%%
%Inicializações
f=zeros(2*numnode,1); %Vetor de forças
global
K=zeros(2*numnode,2*numnode); %Matriz
Rigidez Global
M=zeros(2*numnode,2*numnode); %Matriz de
Massa Global
q=0; %Carga distribuída nula

%Cálculo das Matrizes de Rigidez e de Massa
Globais da viga original
for e=1:numelem
    indexA=element(e,:);
    indexB=[2*(indexA(1)-1)+1 2*(indexA(2)-
1) 2*(indexA(2)-1)+1 2*(indexA(2)-1)+2];
    %Como cada nó tem 2 graus de liberdade
cria-se o vetor indexB
    nn=length(indexA);
    length_element=xx(indexA(2))-
xx(indexA(1)); %Comprimento de cada
elemento
```

```
he=length_element;
k=(EI/(he)^3)*[12 6*he -12 6*he;
               6*he 4*(he)^2 -6*he
               2*(he)^2;
               -12 -6*he 12 -6*he;
               6*he 2*(he)^2 -6*he
               4*(he)^2];
a=he/2;
m=((rho*A*a)/105)*[78 22*a 27 -13*a;
                  22*a 8*a*a 13*a -6*a*a;
                  27 13*a 78 -22*a;
                  -13*a -6*a*a -22*a 8*a*a];
K(indexB,indexB)=K(indexB,indexB)+k;
M(indexB,indexB)=M(indexB,indexB)+m;
end

choice = menu('Identificação de forças e
modificações estruturais numa
viga','Transmissibilidade de Forças' ,...
              'Trasmissibilidade de Deslocamentos',
              'Adição de Massa Pontual', 'Redução de
Rigidez Localizada',...
              'Adição de Massa Pontual e Redução de
Rigidez Localizada
Simultaneamente','Fissura');

if choice==1
    %Viga escastrada nas duas extremidades
discretizada
    %em 6 elementos de viga de Bernoulli-Euler
    clc;
    global ninc ciclos index Fb T sum_error
    format long
    %Definição do número de nós por conjunto
    nK=2; nU=4; nC=8; nE=nK+nC;

    f([5 7],1)=[500 500]; %Forças harmónicas
discretas com amplitude de 500N nos graus
de liberdade 5 e 7
    Fa=[500;500];
    w=[1:2:2*numnode]; %graus de liberdade de
deslocamento transversal
    teta=[2:2:2*numnode]; %graus de liberdade
de rotação
    %Encastramento nas duas extremidades
    fixedw=[1 (2*numnode)-1]'; %Deslocamentos
transversais nas extremidades
    fixedteta=[2 (2*numnode)]';
    %Graus de liberdade fixos e ativos
    fixeddofs=[1 2 13 14];
    alldofs=[1:2*numnode];
    activedofs=setdiff(alldofs,fixeddofs);
    maxvalue_freq=500; %Frequência Máxima
    freq=[0:2:maxvalue_freq-1]; %Gama das
frequências a analisar [rad/s]
    ciclos=size(freq,2); %Total de ciclos a
analisar
    %Inicializações
    T=zeros(nU,nK+nC,ciclos); %Matriz de
Trasmissibilidade de Forças
    Fb=zeros(nU,ciclos); %Vetor com as forças
de reação calculadas

    %Cálculo das Reações com forças exteriores
aplicadas nos
    %graus de liberdade 5 e 7
    for i=1:ciclos
```

```

Z = K - (freq(i)^2)*M; %Matriz de
Rigidez Dinâmica

U(activatedofs,i)=Z(activatedofs,activatedofs)\f(
activatedofs);
U(fixeddofs,i)=0;

R(alldofs,i)=Z(alldofs,alldofs)*U(alldofs,i
);
for j=1:2*numnode
if abs(R(j,i))<1e-12
R(j,i)=0.;
end
Zee=Z([3:12],[3:12]);
Zbe=Z([1 2 13 14],[3:12]);
T(1:nU,1:nE,i)=Zbe*inv(Zee);
Fb(1:nU,i)=T(1:nU,[3 5],i)*Fa;
end
end
wp=freq./(2*pi); %Frequência em Hz
%Gráfico das reações R(freq)
figure(1);
semilogy(wp,abs(R(1,:)),'-k','LineWidth',1)
hold on
semilogy(wp,abs(R(2,:)),'--
k','LineWidth',1)
hold on
semilogy(wp,abs(R(13,:)),'-
r','LineWidth',1)
hold on
semilogy(wp,abs(R(14,:)),'--
r','LineWidth',1)
legend('Reação F1','Reação F2','Reação
F13','Reação
F14','Location','NorthEastOutside')
title('Forças de reação calculadas')
ylabel('Forças de reação [N]');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf,'color','w');
%Gráfico das reações F1 calculadas através
da matriz de transmissibilidade de
%forças
figure(2);
semilogy(wp,abs(Fb(1,:)),'-
k','LineWidth',1)
hold on
semilogy(wp,abs(R(1,:)),'--
r','LineWidth',1)
legend('Reação R1 método direto','Reação R1
transmissibilidade de
forças','Location','NorthEastOutside')
ylabel('Forças de reação R1 [N]');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf,'color','w');
tecla = input('Cálculo das reações
concluído, prima Enter para iniciar a
identificação de forças');

%%%%% IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS USANDO
TRANSMISSIBILIDADE DE FORÇAS%%%%%
tic
Fb_indexes=[1 2 13 14]; %Graus de liberdade
com forças de reação
E=[3:12]; %Graus de liberdade onde existe a
possibilidade de estarem aplicadas forças
exteriores
dim_E=size(E,2); %Dimensão do conjunto E
npt=0; %Inicialização do número total de
combinações
%Número total de combinações
for ik=1:dim_E

npt=npt+factorial(dim_E)/(factorial(ik)*fac
torial(dim_E-ik));
end
Matriz_permut=zeros(npt,dim_E+1);
%Inicialização da Matriz de Permutação

is=0;
%Cálculo de todas as combinações de forças
e momentos exteriores possíveis
for ip=1:dim_E

np=factorial(dim_E)/(factorial(ip)*factoria
l(dim_E-ip));
nchoosek(E,ip); %Combinações possíveis
do conjunto s com ip incógnitas

Matriz_permut(is+1:is+np,1:ip)=nchoosek(E,i
p);
is=is+np;
end
%Cálculo do erro acumulado até se definir o
erro mínimo global
for ip=1:npt %%%Este ciclo estende-se até
ao final do código%%
clc;
ipermut=ip;
Matriz_permut(ipermut,1:dim_E);
ninc=0; %Número de forças ou momentos
que são incógnitas na permutação

%Número de incógnitas
for ipf=1:dim_E

index(ipf)=Matriz_permut(ipermut,ipf);
if index(ipf)>0
ninc=ninc+1;
end
end
F_estimada=ones(ninc,1);
%Inicialização do vetor com as amplitudes
das forças ou
%momentos
exteriores estimados
LB=(1.0).*ones(ninc,1); %Lower Bound

x=fmincon(@erro_vigaTF,F_estimada,[],[],[],
[],LB); %Cálculo da amplitude das forças
% e momentos que minimizam o erro
F_estimada=x;
error_i=erro_vigaTF(F_estimada); %Erro
acumulado para cada combinação
Matriz_permut(ipermut,dim_E+1)=error_i;

for iff=1:ninc
col=index(iff)-2;

Matriz_permut(ipermut,dim_E+1+col)=x(iff);
end
format short e
%Condições para continuação ou fim do
ciclo
if ninc==2

linhas_teste_1=factorial(dim_E)/(factorial(
1)*factorial(dim_E-1));
%Erro mínimo local para combinações
de 1 incógnita

erro_teste_1=min(Matriz_permut(linhas_teste
_1,1));
end
if ninc==3

linhas_teste_2=factorial(dim_E)/(factorial(
2)*factorial(dim_E-2));

linhas_total_2=linhas_teste_1+linhas_teste_
2;
%Erro mínimo local para combinações
de 2 incógnitas

```

```

erro_teste_2=min(Matriz_permut(linhas_teste
_1+1:linhas_total_2,11));
    if erro_teste_2>erro_teste_1
        disp('Solução ótima com 1 força
exterior');
        break
    else
        continue
    end
end

if ninc==4

linhas_teste_3=factorial(dim_E)/(factorial(
3)*factorial(dim_E-3));

linhas_total_3=linhas_total_2+linhas_teste_
3;
    %Erro mínimo local para combinações
de 3 incógnitas

erro_teste_3=min(Matriz_permut(linhas_total
_2+1:linhas_total_3,11));
    if erro_teste_3>erro_teste_2
        disp('Solução ótima com 2 forças
exteriores');
        erro_minimo=erro_teste_2;
        disp('O erro mínimo obtido tem o
valor:');
        disp(erro_minimo);

[row,col]=find(Matriz_permut==erro_minimo);
%Linha da matriz de permutação
correspondente ao erro mínimo
        disp('As forças exteriores
encontram-se aplicadas nos graus de
liberdade:');
        disp(Matriz_permut(row,1:2));
        disp('A amplitude das forças
exteriores é [N]:');
        disp(Matriz_permut(row,[14
16]));

        break
    else
        continue
    end
end
toc
ElapsedTime = toc;

%Gráfico do erro acumulado
comb=[1:linhas_total_3];
figure(3);
semilogy(comb,abs(Matriz_permut(comb,11)), '-
k', 'LineWidth',1)
ylabel('Erro acumulado');
xlabel('Combinações de forças ou momentos
exteriores');
set(gcf,'color','w');

Excerto do código main_viga que
implementa o método de identificação de
forças numa viga através do conceito de
transmissibilidade de deslocamentos
(secção 4.1.2)
elseif choice==2

```

```

%Viga livre nas duas extremidades
discretizada
%em 6 elementos de viga de Bernoulli-Euler
clc;
global ciclos nU nK YU YK H conjU conjK
YU_norm sum_error factor ninc
format long

%Definição dos conjuntos
conjU=[3 5 7]; %Conjunto U
conjK=[9 11 13]; %Conjunto K
conjC=[1 2 4 6 8 10 12 14]; %Conjunto de
todos os restantes graus de liberdade
nU=size(conjU,2); %Dimensão do conjunto U
nK=size(conjK,2); %Dimensão do conjunto K

f([5 7],1)=[500 500]; %Forças harmónicas
discretas com amplitude de 500N nos graus
de liberdade 5 e 7
w=[1:2:2*numnode]; %Graus de liberdade de
deslocamento transversal
teta=[2:2:2*numnode]; %Graus de liberdade
de rotação
%Nota -> Duas extremidades livres implica
que não há graus de liberdade fixos
%Graus de liberdade ativos
fixeddofs=[]; %Não há graus de liberdade
fixos
alldofs=[1:2*numnode]; %Todos os graus de
liberdade (total de 14)
activedofs=setdiff(alldofs,fixeddofs);
%Todos os graus de liberdade são graus de
liberdade ativos
maxvalue_freq=500; %Frequência Máxima
freq=[2:2:maxvalue_freq-1]; %Gama das
frequências a analisar [rad/s]
ciclos=size(freq,2); %Total de ciclos a
analisar

%Determinação dos deslocamentos do conjunto
U e K com forças aplicadas nos
%graus de liberdade 5 e 7
for i=1:ciclos
    Z = K - (freq(i)^2)*M; %Matriz de
Rigidez Dinâmica

U(activedofs,i)=Z(activedofs,activedofs)\f(
activedofs);
    YU(1:nU,i)=U(conjU,i); %Deslocamentos
do conjunto U calculados
    YK(1:nK,i)=U(conjK,i); %Deslocamentos
do conjunto K calculados
    factor=norm(YU(1:nU,1));
    H(1:2*numnode,1:2*numnode,i)=inv(Z);
%Matriz FRF
    YU_norm(1:nU,i)=YU(1:nU,i)/factor;
    wp=freq./(2*pi); %Frequência em Hz

    YU_teste(1:nU,i)=(H(conjU, [5
7],i))*(pinv(H(conjK, [5
7],i))*YK(1:nK,i));

end
wp=freq./(2*pi);
%Gráfico para testar a correta definição da
matriz de transmissibilidade de
%deslocamentos
figure(1);
semilogy(wp,abs(YU(:,:)),'-
k', 'LineWidth',1)
hold on
semilogy(wp,abs(YU_teste(:,:)),'--
r', 'LineWidth',1)
ylabel('Deslocamentos do conjunto U');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf,'color','w');

```

```

%Gráfico dos deslocamentos do conjunto U e
do conjunto K
figure(2);
semilogy(wp,abs(YU(:, :)), '-
k', 'LineWidth', 1)
hold on
semilogy(wp,abs(YK(:, :)), '-
r', 'LineWidth', 1)
title('Deslocamentos dos conjuntos U e K')
ylabel('Deslocamentos do conjunto U e K
[m]');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf, 'color', 'w');

tecla = input('Cálculo dos deslocamentos
concluído, prima ENTER para iniciar a
identificação de forças');

%%%%% IDENTIFICAÇÃO DA LOCALIZAÇÃO DAS
FORÇAS USANDO TRANSMISSIBILIDADE DE
DESLOCAMENTOS%%%%%
tic
s=[1:14]; %Graus de liberdade onde existe a
possibilidade de estarem aplicadas forças
exteriores
dim_s=size(s,2); %Dimensão do conjunto S
npt=0; %Inicialização do número total de
combinações
%Número total de combinações
for ik=1:dim_s

npt=npt+factorial(dim_s)/(factorial(ik)*fac
torial(dim_s-ik));
end

Matriz_permut=zeros(npt,dim_s+1);
%Inicialização da Matriz de Permutação
is=0;

%Criação das combinações de forças e
momentos exteriores possíveis
for ip=1:dim_s

np=factorial(dim_s)/(factorial(ip)*factoria
l(dim_s-ip));
nchoosek(s,ip); %Combinações possíveis
do conjunto S com ip incógnitas

Matriz_permut(is+1:is+np,1:ip)=nchoosek(s,i
p);
is=is+np;
end

%Cálculo do erro acumulado até se definir o
erro mínimo global
for ip=1:npt
clc;
ipermut=ip;
Matriz_permut(ipermut,1:dim_s);
ninc=0; %Inicialização do número de
incógnitas da combinação a analisar

%Número de incógnitas
for ipf=1:dim_s

index(ipf)=Matriz_permut(ipermut,ipf);
if index(ipf)>0
ninc=ninc+1;
end
end

conjA=Matriz_permut(ipermut,1:ninc);
%Conjunto A corresponde a cada combinação
possível
error_i=erro_vigaTD_simple(conjA);
%Erro acumulado para cada combinação
Matriz_permut(ipermut,dim_s+1)=error_i;

```

```

%Condições para continuação ou fim do
ciclo
if ninc==2

linhas_teste_1=factorial(dim_s)/(factorial(
1)*factorial(dim_s-1));

erro_teste_1=min(Matriz_permut(linhas_teste
_1,15)); %Erro mínimo acumulado para

%combinações de

%1 incógnita
end

if ninc==3

linhas_teste_2=factorial(dim_s)/(factorial(
2)*factorial(dim_s-2));

linhas_total_2=linhas_teste_1+linhas_teste_
2;
%Erro mínimo local para combinações
de 2 incógnitas

erro_teste_2=min(Matriz_permut(linhas_teste
_1+1:linhas_total_2,15));
if erro_teste_2>erro_teste_1
disp('Solução ótima com 1 força
ou momento exterior');
disp(Matriz_permut);
break
else
continue
end
end

if ninc==4

linhas_teste_3=factorial(dim_s)/(factorial(
3)*factorial(dim_s-3));

linhas_total_3=linhas_total_2+linhas_teste_
3;
%Erro mínimo local para combinações
de 3 incógnitas

erro_teste_3=min(Matriz_permut(linhas_total
_2+1:linhas_total_3,15));
if erro_teste_3>erro_teste_2
erro_minimo=erro_teste_2;

[row,col]=find(Matriz_permut==erro_minimo);
disp('Solução ótima com 2 forças
ou momentos exteriores');
disp('As forças localizam-se no
graus de liberdade');
disp(Matriz_permut(row,1:2));
%Localização das forças

force_location=Matriz_permut(row,1:2);
for ijk=1:ciclos

force_amplitude=H(conjK,force_location,ijk)
\YK(1:nK,ijk);
end

force_amplitude_1=mean(force_amplitude(1,:
));

force_amplitude_2=mean(force_amplitude(2,:
));

disp('A amplitude das forças
exteriores é [N]: ');
disp(force_amplitude_1);
disp(force_amplitude_2);

```

```

        break
    else
        continue
    end
end
end

comb=[1:linhas_total_3];
%Erro acumulado corrigido
figure(3);
semilogy(comb,abs(Matrix_permut(comb,15)), '-k', 'LineWidth',1)
ylabel('Erro acumulado corrigido');
xlabel('Combinações de forças ou momentos exteriores');
set(gcf, 'color', 'w');

```

### Excerto do código main\_viga que implementa o método de identificação da adição de uma massa pontual numa viga através do conceito de transmissibilidade de deslocamentos (secção 4.2.1)

```

elseif choice==3

%Viga livre nas duas extremidades discretizada
%em 6 elementos de viga de Bernoulli-Euler
clc;
global ciclos nU nK YU YK H conjU conjK
YU_norm sum_error factor ninc
format long

mass_node = menu('Indique o nó onde pretende adicionar a massa','1','2','3','4','5','6','7');
mass_dof=(2*mass_node)-1; %Grau de liberdade de deslocamento transversal no nó onde se encontra aplicada a massa
prompt={'Indique a massa pontual a adicionar em Kg'};
dlg_title='Input';
num_lines=1;
def='';
answer=inputdlg(prompt,dlg_title,num_lines,def);
mass_mass=str2double(answer); %Massa pontual a adicionar em [Kg]
%Definição dos conjuntos
conjU=[3 5 7]; %Graus de Liberdade do Conjunto U
conjK=[9 11 13]; %Graus de Liberdade do Conjunto K
conjC=[1 2 4 6 8 10 12 14]; %Conjunto com os restantes graus de liberdade
nU=size(conjU,2); %Dimensão do conjunto U
nK=size(conjK,2); %Dimensão do conjunto K

%Localização da força harmónica exterior
if mass_node==3
    f(7,1)=500; %Força harmónica discreta com amplitude de 500N no grau de liberdade 7
    force_dof=7; %Grau de liberdade onde se encontra aplicada a força de excitação
else
    f(5,1)=500; %Força harmónica discreta com amplitude de 500 N no grau de liberdade 5
    force_dof=5; %Grau de liberdade onde se encontra aplicada a força de excitação
end

```

```

w=[1:2:2*numnode]; %Graus de liberdade de deslocamento transversal
teta=[2:2:2*numnode]; %Graus de liberdade de rotação

```

```

%Nota -> Duas extremidades livres implica que não há graus de liberdade fixos
%Graus de liberdade ativos
fixeddofs=[]; %Não há graus de liberdade fixos
alldofs=[1:2*numnode]; %Todos os graus de liberdade (total de 14)
activedofs=setdiff(alldofs,fixeddofs);
%Todos os graus de liberdade são graus de liberdade ativos
maxvalue_freq=500; %Frequência Máxima
freq=[2:2:maxvalue_freq-1]; %Gama das frequências a analisar [rad/s]
ciclos=size(freq,2); %Total de ciclos a analisar

```

```

%Adição de massa no nó escolhido
%NOTA -> O nó escolhido tem o grau de liberdade de deslocamento transversal (2*nó)-1 e o grau de liberdade de rotação 2*nó
%Considera-se que a massa pontual apenas influencia o deslocamento %transversal
%Definição da matriz de massa global da viga com a massa adicionada
DELTAM=zeros(2*numnode,2*numnode);
DELTAM(mass_dof,mass_dof)=mass_mass;
M_Modified=M+DELTAM;

```

```

%Cálculo dos deslocamentos do conjunto U e K com adição de massa
for i=1:ciclos
    Z_Modified = K - (freq(i)^2)*M_Modified; %Matriz de Rigidez Dinâmica da viga modificada

```

```

U_Modified(activedofs,i)=Z_Modified(activedofs,activedofs)\f(activedofs);
YU(1:nU,i)=U_Modified(conjU,i);
%Deslocamentos do conjunto U calculados
YK(1:nK,i)=U_Modified(conjK,i);
%Deslocamentos do conjunto K calculados
%Normalização
factor=norm(YU(1:nU,1));
YU_norm(1:nU,i)=YU(1:nU,i)/factor;
wp=freq./(2*pi); %Frequência em Hz

```

```

Z = K - (freq(i)^2)*M; %Matriz de Rigidez Dinâmica da viga original

```

```

U(activedofs,i)=Z(activedofs,activedofs)\f(activedofs); %Deslocamentos sem modificação estrutural
H(1:2*numnode,1:2*numnode,i)=inv(Z);
%Matriz FRF da estrutura original

```

```

YU_teste(1:nU,i)=(H(conjU, [mass_dof force_dof],i))*(pinv(H(conjK, [mass_dof force_dof],i))*YK(1:nK,i));
end
wp=freq./(2*pi);
%Gráfico que testa a matriz de transmissibilidade de deslocamentos
figure(1);
semilogy(wp,abs(YU(:, :)), '-k', 'LineWidth',1)
hold on
semilogy(wp,abs(YU_teste(:, :)), '--r', 'LineWidth',1)

```

```

legend('Deslocamento Y_U método
direto','Deslocamento Y_U com
transmissibilidade de
deslocamentos','Location','NorthEastOutside
')
ylabel('Deslocamentos do conjunto U');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf,'color','w');
%Gráfico dos deslocamentos do conjunto U e
do conjunto K com modificação estrutural
figure(2);
semilogy(wp,abs(YU(:, :)), '-
k','LineWidth',1)
hold on
semilogy(wp,abs(YK(:, :)), '-
r','LineWidth',1)
title('Deslocamentos dos conjuntos U e K')
ylabel('Deslocamentos do conjunto U e K
[m]');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf,'color','w');
%Gráfico dos deslocamentos do conjunto U
com e sem modificação estrutural
figure(3);
semilogy(wp,abs(YU(:, :)), '-
k','LineWidth',1)
hold on
semilogy(wp,abs(U(conjU, :)), '--
r','LineWidth',1)
title('Deslocamentos do conjunto U com e
sem modificação estrutural')
ylabel('Deslocamentos do conjunto [m]');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf,'color','w');

%%%%% IDENTIFICAÇÃO DA LOCALIZAÇÃO DA
MASSA USANDO TRANSMISSIBILIDADE DE
DESLOCAMENTOS%%%%%
tic
s=[1:14]; %Graus de liberdade onde existe a
possibilidade de estarem aplicadas forças
%ou momentos exteriores
dim_s=size(s,2); %Dimensão do conjunto S
npt=0; %Inicialização do número total de
combinações

%Número total de combinações
for ik=1:dim_s

npt=npt+factorial(dim_s)/(factorial(ik)*fac
torial(dim_s-ik));
end

Matriz_permut=zeros(npt,dim_s+1);
%Inicialização da Matriz de Permutação
is=0;

%Criação das combinações de forças e
momentos exteriores possíveis
for ip=1:dim_s

np=factorial(dim_s)/(factorial(ip)*factoria
l(dim_s-ip));
nchoosek(s,ip); %Combinações possíveis
do conjunto s com ip incógnitas

Matriz_permut(is+1:is+np,1:ip)=nchoosek(s,i
p);
is=is+np;
end

%Cálculo do erro acumulado até se definir o
erro mínimo global
for ip=1:npt
clc;
ipermut=ip;
Matriz_permut(ipermut,1:dim_s);

ninc=0;
%Número de incógnitas da combinação a
analisar
for ipf=1:dim_s

index(ipf)=Matriz_permut(ipermut,ipf);
if index(ipf)>0
ninc=ninc+1;
end
end

conjA=Matriz_permut(ipermut,1:ninc);
%Conjunto A corresponde a cada combinação
possível
error_i=erro_vigaTD_simple(conjA);
Matriz_permut(ipermut,dim_s+1)=error_i;

%Condições para continuação ou fim do
ciclo
if ninc==2

linhas_teste_1=factorial(dim_s)/(factorial(
1)*factorial(dim_s-1));
%Erro mínimo local para combinações
de 1 incógnita

erro_teste_1=min(Matriz_permut(linhas_teste
_1,15));
end

if ninc==3

linhas_teste_2=factorial(dim_s)/(factorial(
2)*factorial(dim_s-2));

linhas_total_2=linhas_teste_1+linhas_teste_
2;
%Erro mínimo local para combinações
de 2 incógnitas

erro_teste_2=min(Matriz_permut(linhas_teste
_1+1:linhas_total_2,15));
if erro_teste_2>erro_teste_1
disp('Solução ótima com 1 força
ou momento exterior');
break
else
continue
end
end

if ninc==4

linhas_teste_3=factorial(dim_s)/(factorial(
3)*factorial(dim_s-3));

linhas_total_3=linhas_total_2+linhas_teste_
3;
%Erro mínimo local para combinações
de 3 incógnitas

erro_teste_3=min(Matriz_permut(linhas_total
_2+1:linhas_total_3,15));
if erro_teste_3>erro_teste_2
erro_minimo=erro_teste_2;

[row,col]=find(Matriz_permut==erro_minimo);

[row1,col1]=find(Matriz_permut(row,1:2)==fo
rce_dof);
if col1==1
%Localização da massa pontual
mass_location=Matriz_permut(row,2);
else
%Localização da massa pontual

```

```

mass_location=Matriz_permut(row,1);
    end
    disp('A massa pontual foi
adicionada no nó:');
    disp((mass_location+1)/2);
    %Quantificação da massa
adicionada
    for i=1:ciclos
        F_applied([1 2],i)=(H(conjK,
Matriz_permut(row,1:2),i))\YK(1:nK,i);
        if mass_dof<force_dof
            F_mass=F_applied(1,:);
        else
            F_mass=F_applied(2,:);
        end
    end

mass_added_vector(1,i)=F_mass(1,i)/((freq(i)
)^2*U_Modified(mass_dof,i));
    end

mass_added=mean(mass_added_vector);
    disp('A massa pontual em Kg
é:');
    disp(mass_added);

    break
else
    continue
end
end
end

toc
ElapsedTime = toc;
comb=[1:linhas_total_3];
%Gráfico do erro acumulado corrigido
figure(4);
semilogy(comb,abs(Matriz_permut(comb,15)), '-
k', 'LineWidth',1)
ylabel('Erro acumulado corrigido');
xlabel('Combinações de forças ou momentos
exteriores');
set(gcf, 'color', 'w');
figure(5)
plot(wp,mass_added_vector(1,:), '-
k', 'LineWidth',1)
ylabel('Massa adicionada [Kg]');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf, 'color', 'w');

```

**Excerto do código main\_viga que implementa o método de identificação da redução de rigidez localizada numa viga através do conceito de transmissibilidade de deslocamentos (secção 4.2.2)**

```

elseif choice==4
%Viga livre nas duas extremidades
discretizada
%em 6 elementos de viga de Bernoulli-Euler
clc;
global ciclos nU nK YU YK H conjU conjK
YU_norm sum_error factor ninc
format long
%Definição dos conjuntos
conjU=[3 5 7]; %Graus de liberdade do
conjunto U
conjK=[9 11 13]; %Graus de liberdade do
conjunto K
nU=size(conjU,2); %Dimensão do conjunto U

```

```

nK=size(conjK,2); %Dimensão do conjunto K
f(5,1)=500; %Força harmônica discreta com
amplitude de 500N no grau de liberdade 5
w=[1:2:2*numnode]; %graus de liberdade de
deslocamento transversal
teta=[2:2:2*numnode]; %graus de liberdade
de rotação

```

```

%Nota -> Duas extremidades livres implica
que não há graus de liberdade fixos
%Graus de liberdade ativos
fixeddofs=[]; %Não há graus de liberdade
fixos
alldofs=[1:2*numnode]; %Todos os graus de
liberdade (total de 14)
activedofs=setdiff(alldofs,fixeddofs);
%Todos os graus de liberdade são graus de
liberdade ativos
maxvalue_freq=500; %Frequência Máxima
freq=[2:2:maxvalue_freq-1]; %Gama das
frequências a analisar [rad/s]
ciclos=size(freq,2); %Número de ciclos a
analisar
%Redução de rigidez no grau de liberdade 4
(rotação do nó 2)
%Como simplificação apenas se considera a
redução de rigidez na rotação
DELTAK=zeros(2*numnode,2*numnode);
DELTAK(4,4)=-0.05*K(4,4); %Redução de 5% na
rigidez à rotação do nó 2
K_Modified=K+DELTAK; %Matriz de Rigidez
Global da viga modificada

```

```

%Determinação dos deslocamentos do conjunto
U e K com forças aplicadas nos
%graus de liberdade 5 e com redução de
rigidez localizada no nó 2
for i=1:ciclos
    Z_Modified = K_Modified -
(freq(i)^2)*M; %Matriz de Rigidez Dinâmica
da viga modificada

```

```

U_Modified(activedofs,i)=Z_Modified(actived
of,activedofs)\f(activedofs);
    YU(1:nU,i)=U_Modified(conjU,i);
%Deslocamentos do conjunto U calculados
    YK(1:nK,i)=U_Modified(conjK,i);
%Deslocamentos do conjunto K calculados
    %Normalização
    factor=norm(YU(1:nU,1));
    YU_norm(1:nU,i)=YU(1:nU,i)/factor;
    wp=freq./(2*pi); %Frequência em Hz

```

```

    Z = K - (freq(i)^2)*M; %Matriz de
Rigidez Dinâmica da viga original

```

```

U(activedofs,i)=Z(activedofs,activedofs)\f(
activedofs); %Deslocamentos sem a
modificação estrutural
    H(1:2*numnode,1:2*numnode,i)=inv(Z);
%Matriz FRF da viga original

```

```

    YU_teste(1:nU,i)=(H(conjU, [4
5],i))*(H(conjK, [4 5],i)\YK(1:nK,i));

```

```

end
wp=freq./(2*pi);
%Gráfico que testa se a matriz de
transmissibilidade de deslocamentos foi
bem definida
figure(1);
semilogy(wp,abs(YU(:, :)), '-
k', 'LineWidth',1)
hold on
semilogy(wp,abs(YU_teste(:, :)), '--
r', 'LineWidth',1)

```

```

legend('Deslocamento Y_U método
direto','Deslocamento Y_U com
transmissibilidade de
deslocamentos','Location','NorthEastOutside
')
ylabel('Deslocamentos do conjunto U');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf,'color','w');
%Gráfico dos deslocamentos do conjunto U e
do conjunto K da viga modificada
figure(2);
semilogy(wp,abs(YU(:,:)),'-
k','LineWidth',1)
hold on
semilogy(wp,abs(YK(:,:)),'-
r','LineWidth',1)
title('Deslocamentos dos conjuntos U e K')
ylabel('Deslocamentos do conjunto U e K
[m]');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf,'color','w');
%Gráfico dos deslocamentos do conjunto U
com e sem modificação estrutural
figure(3);
semilogy(wp,abs(YU(:,:)),'-
k','LineWidth',1)
hold on
semilogy(wp,abs(U(conjU,:)), '--
r','LineWidth',1)
title('Deslocamentos do conjunto U com e
sem modificação estrutural')
ylabel('Deslocamentos do conjunto [m]');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf,'color','w');

%%%%% IDENTIFICAÇÃO DA LOCALIZAÇÃO DA
REDUÇÃO DE RIGIDEZ USANDO
TRANSMISSIBILIDADE DE DESLOCAMENTOS%%%%%
tic
s=[1:14]; %Graus de liberdade onde existe a
possibilidade de estarem aplicadas
%forças ou momentos exteriores
dim_s=size(s,2); %Dimensão do conjunto S
npt=0; %Inicialização do número total de
combinações
%Número total de combinações
for ik=1:dim_s

npt=npt+factorial(dim_s)/(factorial(ik)*fac
torial(dim_s-ik));
end

Matriz_permut=zeros(npt,dim_s+1);
%Inicialização da Matriz de Permutação
is=0;

%Criação das combinações de forças e
momentos exteriores possíveis
for ip=1:dim_s

np=factorial(dim_s)/(factorial(ip)*factoria
l(dim_s-ip));
nchoosek(s,ip); %Combinações possíveis
do conjunto S com ip incógnitas

Matriz_permut(is+1:is+np,1:ip)=nchoosek(s,i
p);
is=is+np;
end

%Cálculo do erro acumulado até se definir o
erro mínimo global
for ip=1:npt
clc;
ipermut=ip;
Matriz_permut(ipermut,1:dim_s);
ninc=0;

%Número de incógnitas da combinação a
analisar
for ipf=1:dim_s

index(ipf)=Matriz_permut(ipermut,ipf);
if index(ipf)>0
ninc=ninc+1;
end
end

conjA=Matriz_permut(ipermut,1:ninc);
%Conjunto A corresponde a cada combinação
possível
error_i=erro_vigaTD_simple(conjA);
Matriz_permut(ipermut,dim_s+1)=error_i;

%Condições para continuação ou fim do
ciclo
if ninc==2

linhas_teste_1=factorial(dim_s)/(factorial(
1)*factorial(dim_s-1));
%Erro mínimo local para combinações
de 1 incógnita

erro_teste_1=min(Matriz_permut(linhas_teste
_1,15));
end

if ninc==3

linhas_teste_2=factorial(dim_s)/(factorial(
2)*factorial(dim_s-2));

linhas_total_2=linhas_teste_1+linhas_teste_
2;
%Erro mínimo local para combinações
de 2 incógnitas

erro_teste_2=min(Matriz_permut(linhas_teste
_1+1:linhas_total_2,15));
if erro_teste_2>erro_teste_1
disp('Solução ótima com 1 força
ou momento exterior');
disp(Matriz_permut);
break
else
continue
end
end

if ninc==4

linhas_teste_3=factorial(dim_s)/(factorial(
3)*factorial(dim_s-3));

linhas_total_3=linhas_total_2+linhas_teste_
3;
%Erro mínimo local para combinações
de 3 incógnitas

erro_teste_3=min(Matriz_permut(linhas_total
_2+1:linhas_total_3,15));
if erro_teste_3>erro_teste_2
erro_minimo=erro_teste_2;

[row,col]=find(Matriz_permut==erro_minimo);

[row1,col1]=find(Matriz_permut(row,1:2)==5)
;
%Localização da redução de
rigidez localizada
if col1==1

crack_location=Matriz_permut(row,2);
else

```

```

crack_location=Matriz_permut(row,1);
    end
    disp('A localização da redução
de rigidez localizada é no nó: ');
    disp(crack_location/2);

    %Quantificação da redução de
rigidez
    for i=1:ciclos
        %Reconstrução das forças
        F_applied([1 2],i)=(H(conjK,
[crack_location 5],i))\YK(1:nK,i);

K_reduction_vector(1,i)=F_applied(1,i)/U_Modified(crack_location,i);
    end

K_reduction=mean(K_reduction_vector);

percentage_of_reduction=K_reduction/K(crack_location,crack_location);

percentage_of_reduction_vector=(K_reduction_vector/K(crack_location,crack_location))*100;
    disp('A redução de rigidez à
rotação é de (%) ');

disp((percentage_of_reduction*100);
    break
    else
        continue
    end
end

comb=[1:linhas_total_3];
%Gráfico do erro acumulado corrigido
figure(4);
semilogy(comb,abs(Matriz_permut(comb,15)), '-k', 'LineWidth',1)
ylabel('Erro acumulado');
xlabel('Combinações de forças ou momentos exteriores');
set(gcf,'color','w');
%Gráfico da evolução da percentagem de redução de rigidez ao longo da gama de frequências
figure(5)
semilogy(wp,percentage_of_reduction_vector(1,:), '-k', 'LineWidth',1)
ylabel('Percentagem de redução de rigidez [%]');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf,'color','w');

```

**Excerto do código main\_viga que implementa o método de identificação de uma adição de massa pontual e de uma redução de rigidez localizada numa viga através do conceito de transmissibilidade de deslocamentos (secção 4.2.3)**

```

elseif choice==5
%Viga livre nas duas extremidades discretizada
%em 6 elementos de viga de Bernoulli-Euler
clc;
global ciclos nU nK YU YK H conjU conjK
YU_norm sum_error factor ninc
format long

```

```

%Definição dos conjuntos
conjU=[3 5 7]; %Graus de liberdade do conjunto U
conjK=[1 9 11 13]; %Graus de liberdade do conjunto K
nU=size(conjU,2); %Dimensão do conjunto U
nK=size(conjK,2); %Dimensão do conjunto K
f(5,1)=500; %Força harmónica discreta com amplitude de 500N no grau de liberdade 5
w=[1:2:2*numnode]; %Graus de liberdade de deslocamento transversal
teta=[2:2:2*numnode]; %Graus de liberdade de rotação
%Nota -> Duas extremidades livres implica que não há graus de liberdade fixos
%Graus de liberdade ativos
fixeddofs=[]; %Não há graus de liberdade fixos
alldofs=[1:2*numnode]; %Todos os graus de liberdade (total de 14)
activedofs=setdiff(alldofs,fixeddofs); %Todos os graus de liberdade são graus de liberdade ativos
maxvalue_freq=500; %Frequência Máxima
freq=[2:2:maxvalue_freq-1]; %Gama das frequências a analisar [rad/s]
ciclos=size(freq,2); %Total de ciclos a analisar

%Adição de massa nó 4
%NOTA -> O nó 4 tem o grau de liberdade de deslocamento transversal 7 e o grau de liberdade de rotação 8
%Com a simplificação considera-se que a massa pontual apenas influencia o deslocamento transversal, ou seja, grau de liberdade 7
%Definição da Matriz de Massa Global da viga modificada
DELTAM=zeros(2*numnode,2*numnode);
DELTAM(7,7)=0.02; %Adição de uma massa de 200 gramas no nó 4
M_Modified=M+DELTAM;

%Redução de rigidez no grau de liberdade 4 (rotação do nó 2)
%Como simplificação apenas se considera a redução de rigidez na rotação
%Definição da Matriz de Rigidez Global da viga modificada
DELTAK=zeros(2*numnode,2*numnode);
DELTAK(4,4)=-0.05*K(4,4); %Redução de rigidez de 5% no nó 2
K_Modified=K+DELTAK;

%Cálculo dos deslocamentos do conjunto U e K com forças aplicadas nos graus de liberdade 5 e com adição de massa no grau de liberdade 7
for i=1:ciclos
    Z_Modified = K_Modified -
(freq(i)^2)*M_Modified; %Matriz de Rigidez Dinâmica da viga

%modificada
U_Modified(activedofs,i)=Z_Modified(activedofs,activedofs)\f(activedofs);
    YU(1:nU,i)=U_Modified(conjU,i);
%Deslocamentos do conjunto U calculados
    YK(1:nK,i)=U_Modified(conjK,i);
%Deslocamentos do conjunto K calculados
%Normalização
    factor=norm(YU(1:nU,1));
    YU_norm(1:nU,i)=YU(1:nU,i)/factor;
    wp=freq./(2*pi); %Frequência em Hz

```

```

Z = K - (freq(i)^2)*M; %Matriz de
Rigidez Dinâmica da viga original

U(activatedofs,i)=Z(activatedofs,activatedofs)\f(
activatedofs); %Deslocamentos sem a
modificação estrutural
H(1:2*numnode,1:2*numnode,i)=inv(Z);
%Matriz FRF da estrutura sem modificação
estrutural

YU_teste(1:nU,i)=(H(conjU, [4 5
7],i))*((H(conjK, [4 5 7],i))\YK(1:nK,i));
end
wp=freq./(2*pi);
%Gráfico que testa a matriz de
transmissibilidade calculada
figure(1);
semilogy(wp,abs(YU(:, :)), '-
k', 'LineWidth', 1)
hold on
semilogy(wp,abs(YU_teste(:, :)), '--
r', 'LineWidth', 1)
legend('Deslocamento Y_U método
direto', 'Deslocamento Y_U com
transmissibilidade de
deslocamentos', 'Location', 'NorthEastOutside
')
ylabel('Deslocamentos do conjunto U');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf, 'color', 'w');
wp=freq./(2*pi); %Frequência em Hz
%Gráfico dos deslocamentos do conjunto U e
do conjunto K
figure(2);
semilogy(wp,abs(YU(:, :)), '-
k', 'LineWidth', 1)
hold on
semilogy(wp,abs(YK(:, :)), '-
r', 'LineWidth', 1)
title('Deslocamentos dos conjuntos U e K')
ylabel('Deslocamentos do conjunto U e K
[m]');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf, 'color', 'w');
%Gráfico dos deslocamentos do conjunto U
com e sem modificação estrutural
figure(3);
semilogy(wp,abs(YU(:, :)), '-
k', 'LineWidth', 1)
hold on
semilogy(wp,abs(U(conjU, :)), '--
r', 'LineWidth', 1)
title('Deslocamentos do conjunto U com e
sem modificação estrutural')
ylabel('Deslocamentos do conjunto [m]');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf, 'color', 'w');

%%%% IDENTIFICAÇÃO DA LOCALIZAÇÃO DAS
DUAS MODIFICAÇÕES ESTRUTURAIS USANDO
TRANSMISSIBILIDADE DE DESLOCAMENTOS%%%%
tic
s=[1:14]; %Graus de liberdade onde existe a
possibilidade de estarem aplicadas forças
% e momentos exteriores
dim_s=size(s,2); %Dimensão do conjunto S
npt=0; %Inicialização do número total de
combinações
%Número total de combinações
for ik=1:dim_s

npt=npt+factorial(dim_s)/(factorial(ik)*fac
torial(dim_s-ik));
end

Matriz_permut=zeros(npt,dim_s+1);
%Inicialização da Matriz de Permutação

```

```

is=0;

%Criação das combinações possíveis
for ip=1:dim_s

np=factorial(dim_s)/(factorial(ip)*factoria
l(dim_s-ip));
nchoosek(s,ip); %Combinações possíveis
do conjunto s com ip incógnitas

Matriz_permut(is+1:is+np,1:ip)=nchoosek(s,i
p);
is=is+np;
end

%Cálculo do erro acumulado até se definir o
erro mínimo global
for ip=1:npt
clc;
ipermut=ip;
Matriz_permut(ipermut,1:dim_s);
ninc=0;

%Número de incógnitas de cada
combinação a analisar
for ipf=1:dim_s

index(ipf)=Matriz_permut(ipermut,ipf);
if index(ipf)>0
ninc=ninc+1;
end
end

conjA=Matriz_permut(ipermut,1:ninc);
%Conjunto A corresponde a cada combinação
possível
error_i=erro_vigaTD_simple(conjA);
Matriz_permut(ipermut,dim_s+1)=error_i;
%Condições para continuação ou fim do
ciclo
if ninc==2

linhas_teste_1=factorial(dim_s)/(factorial(
1)*factorial(dim_s-1));
%Erro mínimo local para combinações
de 1 incógnita

erro_teste_1=min(Matriz_permut(linhas_teste
_1,15));
end

if ninc==3

linhas_teste_2=factorial(dim_s)/(factorial(
2)*factorial(dim_s-2));
%Erro mínimo local para combinações
de 2 incógnitas

erro_teste_2=min(Matriz_permut(linhas_teste
_1+1:linhas_total_2,15));
if erro_teste_2>erro_teste_1
disp('Solução ótima com 1 força
ou momento exterior');
break
else
continue
end
end

if ninc==4

linhas_teste_3=factorial(dim_s)/(factorial(
3)*factorial(dim_s-3));

```

```

linhas_total_3=linhas_total_2+linhas_teste_
3;
    %Erro mínimo local para combinações
de 3 incógnitas

erro_teste_3=min(Matriz_permut(linhas_total
_2+1:linhas_total_3,15));
    if erro_teste_3>erro_teste_2
        erro_minimo=erro_teste_2;
        disp('Solução ótima com 2 forças
ou momentos exteriores');
        break
    else
        continue
    end
end
end

if ninc==5

linhas_teste_4=factorial(dim_s)/(factorial(
4)*factorial(dim_s-4));

linhas_total_4=linhas_total_3+linhas_teste_
4;
    %Erro mínimo local para combinações
de 2 incógnitas

erro_teste_4=min(Matriz_permut(linhas_total
_3+1:linhas_total_4,15));
    if erro_teste_4>erro_teste_3
        erro_minimo=erro_teste_3;

[row,col]=find(Matriz_permut==erro_minimo);

[row1,col1]=find(Matriz_permut(row,1:3)==5)
;
        %Graus de liberdade dos nós onde
foi adicionada a massa e onde
        %se formou a figura
        %NOTA->Nesta fase ainda se
desconhece a localização da fissura e
        %da massa
        crack_mass_col=setdiff([1 2
3],col1);

crack_mass_location_1=Matriz_permut(row,cra
ck_mass_col(1,1));

crack_mass_location_2=Matriz_permut(row,cra
ck_mass_col(1,2));
        %0 grau de liberdade par
corresponde ao grau de liberdade da
        %redução de rigidez
        r1=rem(crack_mass_location_1,2);
        if r1==0

crack_location=crack_mass_location_1;

mass_location=crack_mass_location_2;
        end

        if r1==1

crack_location=crack_mass_location_2;

mass_location=crack_mass_location_1;
        end
        %Quantificação das
modificações estruturais
        for i=1:ciclos
            %Reconstrução de forças
            %Nota->É possível fazer a
reconstrução de forças
            %utilizando-se o conjunto U
visto que a dimensão do conjunto

```

```

        %U é igual à dimensão do
conjunto A
        F_applied([1 2
3],i)=(H(conjU, [crack_location
mass_location 5],i))\YU(1:nU,i);

K_reduction_vector(1,i)=F_applied(1,i)/U_Mo
dified(crack_location,i);

mass_added_vector(1,i)=F_applied(2,i)/((fre
q(i))^2*U_Modified(mass_location,i));

mass_added=mean(mass_added_vector);
        end

K_reduction=mean(K_reduction_vector);

percentage_of_reduction=K_reduction/K(crack
_location,crack_location);

percentage_of_reduction_vector=100*(K_reduc
tion_vector/K(crack_location,crack_location
));
        disp('A redução de rigidez
encontra-se localizada no nó: ');
        disp(crack_location/2);
        disp('A massa encontra-se
localizada no nó: ');
        disp((mass_location+1)/2);
        disp('A redução de rigidez
na rotação é de (%) ');

disp((percentage_of_reduction*100);
        disp('A quantidade de massa
é de [kg] ');
        disp(mass_added);
        end

        break
    else
        continue
    end
end
toc
ElapsedTime = toc;
comb=[1:linhas_total_4];
%Gráfico do erro acumulado corrigido
figure(4);
semilogy(comb,abs(Matriz_permut(comb,15)), '-
k','LineWidth',1)
ylabel('Erro acumulado');
xlabel('Combinações de forças ou momentos
exteriores');
set(gcf,'color','w');
%Gráfico da variação do valor da massa
adicionada com a frequência
figure(5);
semilogy(wp,mass_added_vector(1,:), '-
k','LineWidth',1)
ylabel('Massa adicionada [Kg]');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf,'color','w');
%Gráfico da variação do valor da redução de
rigidez com a frequência
figure(6);
semilogy(wp,percentage_of_reduction_vector(
1,:), '-k','LineWidth',1)
ylabel('Porcentagem de redução de rigidez
[%]');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf,'color','w');

```

**Excerto do código main\_viga que implementa o método de identificação de uma fissura formada numa viga através do**

## conceito de transmissibilidade de deslocamentos (secção 4.2.4)

```

elseif choice==6
%Viga livre nas duas extremidades
discretizada
%em 6 elementos de viga de Bernoulli-Euler
%Viga com fissura
clc;
clear I;
global ciclos nU nK YU YK H conjU conjK
sum_error ninc factor
format long

W=0.01; %Espessura da secção reta
D=0.01; %Altura da secção reta
I=(W*D^3)/12; %Segundo Momento de Área da
secção reta original
d_cg=0.007; %Profundidade da fissura
I_cj=(W*(D-d_cg)^3)/12; %Segundo Momento de
Área na secção da fissura
zeta_j=(1/6)/2; %Localização da fissura
lc=1.5*D; %Comprimento equivalente (define
a zona de influência da fissura no aumento
da flexibilidade/diminuição da
rigidez)
%Definição dos conjuntos
conjU=[8 10]; %Graus de liberdade do
conjunto U
conjK=[3 5 7 9 11 13]; %Graus de liberdade
do conjunto K
nU=size(conjU,2); %Número de graus de
liberdade do conjunto U
nK=size(conjK,2); %Número de graus de
liberdade do conjunto K

f(5,1)=3000; %Força harmónica de excitação
no grau de liberdade 5 (Nó 3)
w=[1:2:2*numnode]; %graus de liberdade de
deslocamento transversal
teta=[2:2:2*numnode]; %graus de liberdade
de rotação

%Nota -> Duas extremidades livres implica
que não há graus de liberdade fixos
%Graus de liberdade ativos
fixeddofs=[]; %Não há graus de liberdade
fixos
alldofs=[1:2*numnode]; %Todos os graus de
liberdade (total de 14)
activedofs=setdiff(alldofs,fixeddofs);
%Todos os graus de liberdade são graus de
liberdade ativos
%%% ESTE MODELAÇÃO DA FISSURA NÃO É
PRECISA PARA FREQUÊNCIAS ELEVADAS%
maxvalue_freq=250; %Frequência máxima
freq=[2:2:maxvalue_freq-1]; %Gama de
frequências
ciclos=size(freq,2); %Número de ciclos a
analisar
%Fissura no elemento 4
%Graus de liberdade do elemento onde a
matriz de rigidez elementar é afetada pela
fissura
dofs_crack=[(4*2)-1 4*2 (4*2)+1 (4*2)+2];
DELTAK=zeros(2*numnode,2*numnode);
%Inicialização da matriz de variação de
rigidez
%Definição das constantes de rigidez
K_11=((12*E*(I-
I_cj))/he^4)*((2*lc^3)/he^2)+((3*lc)*((2*
zeta_j)/he-1)^2));
K_12=((12*E*(I-
I_cj))/he^3)*((lc^3)/he^2)+(lc*(2-
(7*zeta_j)/he)+(6*zeta_j^2)/he^2));
K_14=((12*E*(I-
I_cj))/he^3)*((lc^3)/he^2)+(lc*(1-
(5*zeta_j)/he)+(6*zeta_j^2)/he^2));
K_22=((12*E*(I-
I_cj))/he^2)*(((3*lc^3)/he^2)+((2*lc)*((3*
zeta_j)/he-2)^2));
K_24=((12*E*(I-
I_cj))/he^2)*((3*lc^3)/he^2)+((2*lc)*(2-
(9*zeta_j)/he)+(9*zeta_j^2)/he^2));
K_44=((12*E*(I-
I_cj))/he^2)*(((3*lc^3)/he^2)+((2*lc)*((3*
zeta_j)/he-1)^2));
DELTAK_e=zeros(4,4); %Inicialização da
matriz de redução de rigidez elementar
%Definição da matriz de redução de rigidez
elementar
DELTAK_e(1,1)=K_11;
DELTAK_e(3,3)=K_11;
DELTAK_e(1,3)=-K_11;
DELTAK_e(3,1)=-K_11;
DELTAK_e(2,2)=K_22;
DELTAK_e(4,4)=K_44;
DELTAK_e(1,2)=K_12;
DELTAK_e(2,1)=K_12;
DELTAK_e(2,3)=-K_12;
DELTAK_e(3,2)=-K_12;
DELTAK_e(1,4)=K_14;
DELTAK_e(4,1)=K_14;
DELTAK_e(3,4)=-K_14;
DELTAK_e(4,3)=-K_14;
DELTAK_e(2,4)=K_24;
DELTAK_e(4,2)=K_24;
DELTAK(dofs_crack,dofs_crack)=DELTAK_e;
K_crack=K-DELTAK; %Matriz de Rigidez Global
da viga com fissura
%Determinação dos deslocamentos do conjunto
U e K da viga modificada
for i=1:ciclos
Z_crack = K_crack - (freq(i)^2)*M;
%Matriz de Rigidez Dinâmica da viga
modificada

U_crack(activedofs,i)=Z_crack(activedofs,ac
tivedofs)\f(activedofs);
YU(1:nU,i)=U_crack(conjU,i);
%Deslocamentos do conjunto U calculados
YK(1:nK,i)=U_crack(conjK,i);
%Deslocamentos do conjunto K calculados

wp=freq./(2*pi); %Frequência em Hz

Z = K - (freq(i)^2)*M; %Matriz de
Rigidez Dinâmica da viga original

U(activedofs,i)=Z(activedofs,activedofs)\f(
activedofs); %Deslocamentos sem a
modificação estrutural
H(1:2*numnode,1:2*numnode,i)=inv(Z);
%Matriz FRF da estrutura sem modificação
estrutural

end
wp=freq./(2*pi);
%Gráfico dos deslocamentos/rotações do
conjunto U e do conjunto K
figure(1);
semilogy(wp,abs(YU(:,:)),'-
k','LineWidth',1)
hold on
semilogy(wp,abs(YK(:,:)),'-
r','LineWidth',1)
title('Deslocamentos dos conjuntos U e K')
ylabel('Deslocamentos/rotações do conjunto
U e K [m]/[rad]');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf,'color','w');

```

```

%Gráfico das rotações do conjunto U com e
sem modificação estrutural
figure(2);
semilogy(wp, abs(YU(:, :)), '-
k', 'LineWidth', 1)
hold on
semilogy(wp, abs(U(conjU, :)), '--
r', 'LineWidth', 1)
title('Deslocamentos do conjunto U com e
sem modificação estrutural')
ylabel('Rotações do conjunto U [rad]');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf, 'color', 'w');
%%
##### IDENTIFICAÇÃO DA LOCALIZAÇÃO DA
FISSURA USANDO TRANSMISSIBILIDADE DE
DESLOCAMENTOS#####
tic
s=[1:14]; %Graus de liberdade onde existe a
possibilidade de estarem aplicadas forças
e momentos exteriores
dim_s=size(s,2); %Dimensão do conjunto S
npt=0; %Inicialização do número total de
combinações

%Número total de combinações
for ik=1:dim_s

npt=npt+factorial(dim_s)/(factorial(ik)*fac
torial(dim_s-ik));
end
Matriz_permut=zeros(npt,dim_s+1);
%Inicialização da Matriz de Permutação
is=0;
%Criação das combinações possíveis
for ip=1:dim_s

np=factorial(dim_s)/(factorial(ip)*factoria
l(dim_s-ip));
nchoosek(s,ip); %Combinações possíveis
do conjunto S com ip incógnitas

Matriz_permut(is+1:is+np,1:ip)=nchoosek(s,i
p);
is=is+np;
end

%Cálculo do erro acumulado até satisfazer a
condição necessária
for ip=1:npt
clc;
ipermut=ip;
Matriz_permut(ipermut,1:dim_s);
ninc=0; %Número de forças ou momentos
que são incógnitas na combinação
%Número de incógnitas da combinação a
analisar
for ipf=1:dim_s

index(ipf)=Matriz_permut(ipermut,ipf);
if index(ipf)>0
ninc=ninc+1;
end
end
%0 ciclo fica restringido a 6
incógnitas, valor necessário para se
estabelecer a condição necessária
if ninc==7
break
end
conjA=Matriz_permut(ipermut,1:ninc);
%Conjunto A corresponde a cada combinação
possível
error_i=erro_vigaTD_crack(conjA);
Matriz_permut(ipermut,dim_s+1)=error_i;
end
%%

```

```

%Total de combinações analisadas
linhas_total=0;
for ij=1:(ninc-1)

linhas_teste=factorial(dim_s)/(factorial(ij
)*factorial(dim_s-ij));
linhas_total=linhas_total+linhas_teste;
end
%Gráfico do erro acumulado corrigido
comb4=[1:linhas_total];
figure(3);
semilogy(comb4,abs(Matriz_permut(comb4,15)
,'k', 'LineWidth', 1)
ylabel('Erro acumulado');
xlabel('Combinações até 6 incógnitas');
set(gcf, 'color', 'w');
%Erro mínimo global
erro_min_global=min(Matriz_permut(1:linhas_
total,15));
%%Determinação do elemento onde se
localiza a fissura%%
%row->Linha da Matriz de permutação que
contém a combinação ótima
[row,col]=find(Matriz_permut==erro_min_glob
al);
%coll->Coluna da linha da combinação ótima
correspondente à força de
%localização conhecida
[row1,coll]=find(Matriz_permut(row,:)==5);
%Determinação do número de incógnitas da
combinação ótima
ninc_optimal=0;
for jj=1:dim_s
check=Matriz_permut(row,jj);
if check~=0
ninc_optimal=ninc_optimal+1;
end
if check==0
break
end
end
%Graus de liberdade do elemento onde se
localiza a fissura
dofs_elem=setdiff(Matriz_permut(row,1:ninc_
optimal),Matriz_permut(row,coll));
%0 primeiro nó do elemento x é o nó x e tem
a rotação x/2
dofs_test=dofs_elem(2);
node_test=dofs_elem(2)/2;
disp('A fissura localiza-se no elemento:
');
disp(node_test);

%Deslocamentos e rotações do elemento onde
se formou a fissura
Y7_i=U_crack(dofs_elem(1),:);
Y8_i=U_crack(dofs_elem(2),:);
Y9_i=U_crack(dofs_elem(3),:);
Y10_i=U_crack(dofs_elem(4),:);
%Reconstrução das forças
for i=1:ciclos

F_A(1:ninc_optimal,i)=(H(conjK,Matriz_permu
t(row,1:ninc_optimal,i))\YK(1:nK,i);

end
%Forças e momentos do elemento onde se
localiza a fissura
F7_i=F_A(2,:);
F8_i=F_A(3,:);
F9_i=F_A(4,:);
F10_i=F_A(5,:);

%Determinação das constantes de redução de
rigidez
ijk=1;

```

```

for i=1:ciclos
Q_W(ijk:ijk+3,1:6)=[Y7_i(i)-Y9_i(i) Y8_i(i)
Y10_i(i) 0 0 0;
0 Y7_i(i)-Y9_i(i) 0 Y8_i(i) Y10_i(i) 0;
-(Y7_i(i)-Y9_i(i)) -Y8_i(i) -Y10_i(i) 0
0 0;
0 0 Y7_i(i)-Y9_i(i) 0 Y8_i(i)
Y10_i(i)];

F_W(ijk:ijk+3,1)=[F7_i(i);F8_i(i);F9_i(i);F
10_i(i)];
ijk=ijk+4;
end
%Constantes de redução de rigidez
K_s=Q_W\F_W;
%%
%Cálculo do segundo momento de área na
secção da fissura e da localização
%da fissura
K12=K_s(2);
K14=K_s(3);
R=K12/K14;

a=((6*R*lc)-(6*lc))/he^2;
b=((7*lc)-(5*R*lc))/he;
c=((R*lc^3-lc^3)/he^2)+(R*lc)-(2*lc);
pol=[a b c];
r=roots(pol);

for i=1:2
if r(i)>0 || r(i)<he
crack_location_estimated=r(i);
end
end
disp('A fissura localiza-se na coordenada
longitudinal [m]')
disp((node_test-
1)*he+crack_location_estimated);
A_1=K14/((lc^3/he^2)+(lc*(1-
(5*crack_location_estimated)/he)+((6*crack
_location_estimated^2)/he^2)));
Icj_estimated=-(((A_1*he^3)/(12*E))-I);
%Cálculo da profundidade da fissura
dcj_estimated=-
(((12*Icj_estimated)/W)^(1/3))-D);
disp('A fissura tem uma profundidade de
[m]')
disp(dcj_estimated);
end

```

### Função que implementa o erro acumulado corrigido, utilizada nos códigos das secções 4.1.1, 4.1.2, 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3

```

function f = erro_vigaTD_simple(x)
global ciclos nU nK YK H conjU conjK
sum_error YU_norm YU factor ninc
sum_error=0;
for i=1:ciclos
%Cálculo do YU estimado utilizando-se a
matriz de transmissibilidade de
%deslocamentos

YU_estimado(1:nU,i)=H(conjU,x,i)*((H(conjK,
x,i))\YK(1:nK,i));
%Normalização de YU

YU_estimado_norm(1:nU,i)=YU_estimado(1:nU,i
)/factor;
%Cálculo do erro acumulado
sum_error = sum_error +
(abs(YU_norm(1,i))-
abs(YU_estimado_norm(1,i)))^2 +
(abs(YU_norm(2,i))-
abs(YU_estimado_norm(2,i)))^2 +

```

```

(abs(YU_norm(3,i))-
abs(YU_estimado_norm(3,i)))^2
%Reconstrução das forças

F_reconstructed(1:ninc,i)=(H(conjK,x,i))\YK
(1:nK,i);
end
%Cálculo do erro acumulado corrigido
for j=1:ninc

F_teste=mean(F_reconstructed(j,1:ciclos));
if F_teste<1e-6
sum_error=sum_error+10;
end
end
f=sum_error;
end

```

### Função que implementa o erro acumulado corrigido no código de identificação de uma fissura, utilizada o código da secção 4.2.4

```

function f = erro_vigaTD_crack(x)
global ciclos nU nK YU YK H conjU conjK
sum_error ninc
sum_error=0;
for i=1:ciclos
YU_estimado(1:nU,i)=(H(conjU,x,i))*((H(conj
K,x,i))\YK(1:nK,i)); %Cálculo dos
deslocamentos do conjunto U usando a
transmissibilidade de deslocamentos
sum_error = sum_error + (abs(YU(1,i))-
abs(YU_estimado(1,i)))^2 + (abs(YU(2,i))-
abs(YU_estimado(2,i)))^2
if ninc==6
%Reconstrução das forças

F_reconstructed(1:ninc,i)=(H(conjK,x,i))\YK
(1:nK,i);
end
end
if ninc==6
%Cálculo do erro acumulado corrigido
for j=1:ninc

F_teste=mean(F_reconstructed(j,1:ciclos));
if F_teste<1e-6
sum_error=sum_error+10;
end
end
end
f=sum_error;
end

```

## - Código

### main\_placakirchhoff.m

Nota: Devido à limitação do número de páginas imposta, não se apresentam as funções que implementam o cálculo do erro acumulado corrigido.

**Excerto do código main\_placakirchhoff que implementa o método de identificação de forças numa placa através do conceito de**

## transmissibilidade de deslocamentos (secção 4.3.1)

```

clc;
clear all;
close all;
suppressinputdlg=0
global ciclos nU nK YU YK H conjU conjK inc
tic
fig_num=1; %Início da numeração de figuras
%=====
%===== Malha da placa
%=====
[fig_num,number_nodes,node_matrix,element_m
atrix,nelem,nodex,nodey,nx,ny,node1,node2,n
ode3,node4,dof,L,W]=plate_mesh(fig_num);
%%%OUTPUTS%%%
%number_nodes->número total de nós
%node_matrix->matriz com as coordenadas dos
nós da mesh
%element_matrix->matriz com os nós globais
associados a cada elemento
%nelem->número de elementos
%nodex->coordenadas dos nós segundo x
%nodey->coordenadas dos nós segundo y
%nx->número de nós no eixo dos x's
%ny->número de nós no eixo dos y's
%noden->nó global associado ao n nó local
%dof->número total de graus de liberdade
%L->comprimento da placa
%W->largura da placa
%=====
%===== Propriedades da
placa =====
%=====
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[D,E,rho,mu,beta,thick]=plate_materials(L,W
);
rho_s=rho*thick;
%%%OUTPUTS%%%
%E->Módulo de Young
%rho->Massa especifica
%mu->Coeficiente de Poisson
%thick->Espessura
%=====
%===== Matrizes de massa e rigidez
globais =====
%=====
[mass,stiff,total_volume,total_mass]=plate_
mass_stiff(nelem,nodex,nodey,node1,node2,no
de3,node4,mu,beta,thick,dof,rho,D);
%%%OUTPUTS%%%
%mass->Matriz de Massa Global
%stiff->Matriz de Rigidez Global
%total_volume->Volume da placa
%total_mass->Massa da placa

choice = menu('Identificação de forças e
adição de massa numa placa',...
'Identificação de
forças','Identificação de uma massa
pontual');

if choice==1
clc;
%Identificação de localização de uma força
exterior numa placa

```

```

%através da aplicação do conceito de
transmissibilidade de
%deslocamentos
dof=3*number_nodes; %Nº de graus de
liberdade
sizeK=size(stiff); %Dimensão da Matriz de
Rigidez Global
sizeM=size(mass); %Dimensão da Matriz de
Massa Global
nnodeK=[120 400]; %Nós do conjunto K
%NOTA -> DIMENSAO DO
CONJUNTO K MAIOR OU IGUAL QUE A DIMENSAO
DO CONJUNTO A
nnodeU=324; %Nó do conjunto U
nnodeF=225; %Nó onde se encontra aplicada a
força exterior (conjunto A)
F_amp=100; %Amplitude da força exterior
conjU=3*(nnodeU-1)+1; %Grau de liberdade do
conjunto U (Deslocamento transversal)
conjK=3*(nnodeK-1)+1; %Graus de liberdade
do conjunto K (Deslocamentos transversais)
conjA=3*(nnodeF-1)+1; %Grau de liberdade do
conjunto A
nU=size(conjU,2); %Dimensão do conjunto U
nK=size(conjK,2); %Dimensão do conjunto K
FF=zeros(sizeK(1,1),1); %Inicialização do
vetor de forças
FF(3*(nnodeF-1)+1)=F_amp; %Vetor de forças
maxvalue_freq=300; %Frequência Máxima
freq=[2:2:maxvalue_freq-1]; %Gama das
frequências a analisar [rad/s]
ciclos=size(freq,2); %Total de ciclos a
analisar
%Ciclo que calcula a Matriz de Rigidez
Dinâmica e o vetor de deslocamentos
for i=1:ciclos
Z=stiff-(freq(i))^2*mass; %Matriz de
Rigidez Dinâmica
H(1:dof,1:dof,i)=inv(Z); %Matriz FRF
U(1:dof,i)=Z(1:dof,1:dof)\FF(1:dof);
%Deslocamentos
YU(1:nU,i)=U(conjU,i); %Deslocamentos
do conjunto U
YK(1:nK,i)=U(conjK,i); %Deslocamentos
do conjunto K
YU_teste(1:nU,i)=(H(conjU,
conjA,i))*(H(conjK, conjA,i)\YK(1:nK,i));
end
wp=freq./(2*pi); %frequência em Hz
%Gráfico que testa a correta definição da
matriz de transmissibilidade de
%deslocamentos
figure(fig_num);
fig_num=fig_num+1;
semilogy(wp,abs(YU(:,:)),'-
k','LineWidth',1)
hold on
semilogy(wp,abs(YU_teste(:,:)),'--
r','LineWidth',1)
legend('Deslocamento Y_U método
direto','Deslocamento Y_U com
transmissibilidade de
deslocamentos','Location','NorthEastOutside
')
ylabel('Deslocamentos do conjunto U');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf,'color','w');
%Gráfico dos deslocamentos do conjunto U
figure(fig_num);
fig_num=fig_num+1;
semilogy(wp,abs(YU(:,:)),'-
k','LineWidth',1)
hold on
title('Deslocamento do conjunto U')
ylabel('Deslocamento do conjunto U [m]');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf,'color','w');

```

```

%Gráfico dos deslocamentos do conjunto K
figure(fig_num);
fig_num=fig_num+1;
semilogy(wp,abs(YK(1,:)), '-
k', 'LineWidth', 1)
hold on
semilogy(wp,abs(YK(2,:)), '-
r', 'LineWidth', 1)
hold on
title('Deslocamentos do conjunto K')
ylabel('Deslocamentos do conjunto K [m]');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf, 'color', 'w');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Identificação de
forças %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Nota->Consideram-se apenas deslocamentos
transversais, logo não se
identificam possíveis momentos aplicados
s=[1:(1800/3)]; %Graus de liberdade onde
podem estar aplicadas forças
% (1/3 de todos os graus de
liberdade, os restantes 2/3 correspondem a
momentos
dim_s=size(s,2); %Dimensão do conjunto S
%Matriz que contém o erro mínimo associado
a combinações de inc incógnitas
%Cada linha da matriz contém a combinação
que minimiza o erro para inc
incógnitas e o erro mínimo respetivo
Matriz_erro=zeros(dim_s,dim_s+1);

%Determinação da localização da força
exterior
for inc=1:dim_s
%Uma vez que apenas existe uma força
exterior, a condição necessária
satisfaz-se com combinações de 1 e 2
incógnitas
if inc>2
break
end
if inc==1
%Número de combinações de 1 incógnita
np=factorial(sym(dim_s))/(factorial(sym(inc
))*factorial(sym(dim_s-inc)));
np=double(np);
%Inicialização da Matriz de Permutação para
combinações de 1 incógnita
Matriz_permut_1=zeros(np,inc+1);
%Criação das combinações possíveis com 1
incógnita
nchoosek(s,inc); %Combinações possíveis do
conjunto s com inc incógnitas
Matriz_permut_1(1:np,1:inc)=nchoosek(s,inc)
;
%Calculo do erro acumulado para todas as
combinações de 1 incógnita
for ip=1:np
ipermut=ip;
conjA=Matriz_permut_1(ipermut,1:inc);
%Conjunto A corresponde a cada combinação
possível

de 1 incógnita
error_i=erro_placaTD_simple(conjA);
Matriz_permut_1(ipermut,inc+1)=error_i;
end
Matriz_erro(inc,1)=min(Matriz_permut_1(:,in
c+1)); %Erro mínimo para combinações de 1
incógnita
[row,col]=find(Matriz_permut_1==Matriz_erro
(inc,1)); %Linha da matriz de permutação
correspondente ao erro mínimo
Matriz_erro(inc,2:inc+1)=Matriz_permut_1(ro
w,1:inc); %Combinação correspondente ao
erro mínimo
end

if inc~=1
%Número de combinações de 2 incógnitas
np=factorial(sym(dim_s))/(factorial(sym(inc
))*factorial(sym(dim_s-(inc))));
np=double(np);
%Inicialização da Matriz de Permutação para
combinações de 2 incógnitas
Matriz_permut_2=zeros(np,inc+1);
%Criação das combinações de 2 incógnitas
possíveis
nchoosek(s,inc);
Matriz_permut_2(1:np,1:inc)=nchoosek(s,inc)
;
%Cálculo do erro acumulado para todas as
combinações de 2 incógnitas
%possíveis
for ip=1:np
ipermut=ip;

conjA=Matriz_permut_2(ipermut,1:inc);
%Conjunto A corresponde a cada combinação
possível

de 2 incógnitas
error_i=erro_placaTD_simple(conjA);
Matriz_permut_2(ipermut,inc+1)=error_i;
end
Matriz_erro(inc,1)=min(Matriz_permut_2(:,in
c+1)); %Erro mínimo para combinações de 2
incógnitas
[row,col]=find(Matriz_permut_2==Matriz_erro
(inc,1)); %Linha da matriz de permutação
correspondente ao erro mínimo
Matriz_erro(inc,2:inc+1)=Matriz_permut_2(ro
w(1,1),1:inc); %Combinação correspondente
ao erro mínimo
end
end

if Matriz_erro(1,1)<Matriz_erro(2,1)
disp('A força localiza-se no nó');
disp(Matriz_erro(1,2));
for ij=1:cielos

F_reconstructed(1,ij)=H(conjK,3*(Matriz_err
o(1,2)-1)+1,ij)\YK(1:nK,ij);
end
disp('A amplitude da força exterior é
de: ');
disp(mean(F_reconstructed));
end
toc
total_time=toc;
np_total=(doF/3)+np;
Matriz_permut_final=zeros(np_total,1);
Matriz_permut_final(1:600,1)=Matriz_permut_
1(:,2);
Matriz_permut_final(601:np_total,1)=Matriz_
permut_2(:,3);
%Gráfico do erro acumulado corrigido
figure(fig_num);
fig_num=fig_num+1;
combf=[1:np_total];
loglog(combf,abs(Matriz_permut_final(1:np_t
otal,1)), 'k', 'LineWidth', 1)
ylabel('Erro acumulado corrigido');
xlabel('Combinações de forças');
set(gcf, 'color', 'w');

Excerto do código main_placakirchhoff que implementa o método de identificação de uma massa pontual adicionada numa placa

```

## através do conceito de transmissibilidade de deslocamentos (secção 2.4)

```
elseif choice==2
clc;
%Identificação de uma massa pontual
adicionada numa placa utilizando-se
%os fundamentos de transmissibilidade de
deslocamentos
global ciclos nU nK YU YK H conjU conjK inc
tic
dof=3*number_nodes; %Nº de graus de
liberdade
sizeK=size(stiff); %Dimensão da Matriz de
Rigidez Global
sizeM=size(mass); %Dimensão da Matriz de
Massa Global
nnodeK=[120 400 550]; %Nós do conjunto K
nnodeU=324; %Nó do conjunto U
nnodeF=225; %Nó onde se encontra aplicada a
força exterior (conjunto A)
F_amp=100; %Amplitude da força exterior
%Nota->apenas se consideram deslocamentos
transversais
conjU=3*(nnodeU-1)+1; %Grau de liberdade do
conjunto U
conjK=3*(nnodeK-1)+1; %Graus de liberdade
do conjunto K
conjA=3*(nnodeF-1)+1; %Grau de liberdade do
conjunto A
force_dof=3*(nnodeF-1)+1;
nU=size(conjU,2); %Dimensão do conjunto U
nK=size(conjK,2); %Dimensão do conjunto K
mass_node=460; %Nó onde foi adicionada a
massa
mass_dof=3*(mass_node-1)+1; %Grau de
liberdade de deslocamento transversal do nó
onde se adicionou a massa
mass_mass=0.1; %Massa adicionada em [Kg]
FF=zeros(sizeK(1,1),1); %Inicialização do
vetor de forças
FF(3*(nnodeF-1)+1)=F_amp; %Vetor de forças
maxvalue_freq=300; %Frequência Máxima
freq=[2:2:maxvalue_freq-1]; %Gama das
frequências a analisar [rad/s]
ciclos=size(freq,2); %Total de ciclos a
analisar
%Definição da Matriz de Massa Global da
placa modificada
DELTAM=zeros(dof,dof);
DELTAM(mass_dof,mass_dof)=mass_mass;
mass_modified=mass+DELTAM; %Matriz de massa
da estrutura modificada
%Ciclo que calcula a Matriz de Rigidez
Dinâmica e o vetor de deslocamentos
%da placa modificada
for i=1:ciclos
    Z_modified=stiff-
    (freq(i))^2*mass_modified; %Matriz de
    Rigidez Dinâmica da placa modificada
    U_modified(1:dof,i)=Z_modified(1:dof,1:dof)
    \FF(1:dof); %Deslocamentos da placa
    modificada
    YU(1:nU,i)=U_modified(conjU,i);
    %Deslocamentos do conjunto U
    YK(1:nK,i)=U_modified(conjK,i);
    %Deslocamentos do conjunto K
    Z=stiff-(freq(i))^2*mass; %Matriz de
    Rigidez Dinâmica da placa original
    H(1:dof,1:dof,i)=inv(Z); %Matriz FRF
    U(1:dof,i)=Z(1:dof,1:dof)\FF(1:dof);
    %Deslocamentos da placa original
end
wp=freq./(2*pi);
```

```
%Gráfico dos deslocamentos do conjunto U da
placa modificada
figure(fig_num);
fig_num=fig_num+1;
semilogy(wp,abs(YU(:,:)),'-
k','LineWidth',1)
hold on
title('Deslocamento do conjunto U')
ylabel('Deslocamento do conjunto U [m]');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf,'color','w');
%Gráfico dos deslocamentos do conjunto K da
placa modificada
figure(fig_num);
fig_num=fig_num+1;
semilogy(wp,abs(YK(1,:)),'-
k','LineWidth',1)
hold on
semilogy(wp,abs(YK(2,:)),'-
r','LineWidth',1)
hold on
semilogy(wp,abs(YK(3,:)),'-
b','LineWidth',1)
hold on
title('Deslocamentos do conjunto K')
ylabel('Deslocamentos do conjunto K [m]');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf,'color','w');
%Gráfico dos deslocamentos do conjunto U
com e sem modificação estrutural
figure(fig_num);
fig_num=fig_num+1;
semilogy(wp,abs(YU(:,:)),'-
k','LineWidth',1)
hold on
semilogy(wp,abs(U(conjU,:)),'--
r','LineWidth',1)
title('Deslocamentos do conjunto U com e
sem modificação estrutural')
ylabel('Deslocamentos do conjunto [m]');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf,'color','w');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Identificação da
%massa %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
s=[1:(1800/3)]; %Graus de liberdade onde
podem estar aplicadas forças
%(1/3 de todos os graus de
liberdade, os restantes 2/3
%correspondem a rotações
dim_s=size(s,2); %Dimensão do conjunto S
%Matriz que contém o erro mínimo associado
a combinações de inc incógnitas
%Cada linha da matriz contém a combinação
que minimiza o erro para inc
%incógnitas e o erro mínimo respetivo
Matriz_erro=zeros(dim_s,dim_s+1);

for inc=2:dim_s %Não é necessário analisar
combinações de 1 incógnita visto que
%se está a identificar uma
massa adicional, logo, pelo
%menos, a combinação ótima
tem dimensão 2

%A condição necessária satisfaz-se
analisando-se combinações de 2 e 3
%incógnitas
if inc>3
    break
end
if inc==2
%A localização da força harmónica de
excitação é conhecida (nó 225).
%Consequentemente apenas se consideram
combinações de 2 incógnitas que
%incluam o nó 225
```

```

%Número de combinações
np=factorial(sym(dim_s))/(factorial(sym(inc-1))*factorial(sym(dim_s-(inc-1))));
np=double(np);
Matriz_permut_1=zeros(np,inc+1);
%Inicialização da Matriz de Permutação
%Criação das combinações
nchoosek(s,inc-1); %Combinações possíveis de 1 incógnita
Matriz_permut_1(1:np,1)=nchoosek(s,inc-1);
Matriz_permut_1(1:np,2)=nnodeF;
%Cálculo do erro acumulado para as combinações previamente definidas
for ip=1:np
    ipermut=ip;
    %Conjunto A corresponde a cada combinação possível de 2 incógnitas que inclua o nó onde está aplicada a força de excitação
    conjA=Matriz_permut_1(ipermut,1:inc);
    error_i=erro_placaTD_DELTAM(conjA);
    Matriz_permut_1(ipermut,inc+1)=error_i;
end
Matriz_erro(inc,1)=min(Matriz_permut_1(:,inc+1)); %Erro mínimo para combinações de 2 incógnitas
[row,col]=find(Matriz_permut_1==Matriz_erro(inc,1)); %Row->linha da matriz de permutação correspondente ao erro mínimo
Matriz_erro(inc,2:inc+1)=Matriz_permut_1(row,1:inc); %Combinação correspondente ao erro mínimo
%Gráfico do erro acumulado
figure(fig_num);
fig_num=fig_num+1;
semilogy(1:np,abs(Matriz_permut_1(1:np,inc+1)),'k','LineWidth',1);
ylabel('Erro acumulado');
xlabel('Combinações de forças de 2 incógnitas');
set(gcf,'color','w');
end
if inc==3
%Analisa-se combinações de forças com 3 incógnitas que incluem a combinação dos graus de liberdade que minimizam o erro para combinações de 2 incógnitas
%Número de combinações
np=factorial(sym(dim_s))/(factorial(sym(inc-2))*factorial(sym(dim_s-(inc-2))));
np=double(np);
Matriz_permut_2=zeros(np,inc+1);
%Inicialização da Matriz de Permutação
%Criação das combinações
nchoosek(s,inc-2);
Matriz_permut_2(1:np,inc)=nchoosek(s,inc-2);
for ip=1:np
    Matriz_permut_2(ip,inc-2:inc-1)=Matriz_erro(inc-1,2:inc); %Combinação de 2 incógnitas que minimiza o erro
end
%Cálculo do erro acumulado para as combinações de 3 incógnitas previamente definidas
for ip=1:np
    ipermut=ip;
    conjA=Matriz_permut_2(ipermut,1:inc);
    error_i=erro_placaTD_DELTAM(conjA);
    Matriz_permut_2(ipermut,inc+1)=error_i;
end
Matriz_erro(inc,1)=min(Matriz_permut_2(:,inc+1)); %Erro mínimo para combinações de 3 incógnitas

```

```

[row1,col]=find(Matriz_permut_2(:,inc+1)==Matriz_erro(inc,1)); %Linha da matriz de permutação correspondente ao erro mínimo
Matriz_erro(inc,2:inc+1)=Matriz_permut_2(row1,1:inc); %Combinação correspondente ao erro mínimo
end
end
if Matriz_erro(3,1)>Matriz_erro(2,1)
%Combinação ótima
comb_optimal=Matriz_erro(2,[2 3]);
%Localização massa pontual
if comb_optimal(1,1)==225
    mass_node_estimated=comb_optimal(1,2);
else
    mass_node_estimated=comb_optimal(1,1);
end
disp('A massa pontual foi adicionada no nó: ');
disp(mass_node_estimated);
%Quantificação da massa adicionada
for i=1:ciclos
    F_applied([1 2],i)=(H(conjK,3*(comb_optimal-1)+1,i))\YK(1:nK,i);
    if mass_node_estimated<225
        F_mass=F_applied(2,:);
    else
        F_mass=F_applied(1,:);
    end
    mass_added_vector(1,i)=F_mass(1,i)/((freq(i))^2*U_modified(mass_dof,i));
end
mass_added=mean(mass_added_vector);
%Gráfico da massa adicionada calculada para cada frequência de vibração
figure(fig_num);
fig_num=fig_num+1;
plot([1:ciclos],mass_added_vector(1,:),'k','LineWidth',1);
ylabel('Massa adicionada [Kg]');
xlabel('Frequência [Hz]');
set(gcf,'color','w');
disp('A quantidade de massa adicionada é, em Kg: ');
disp(mass_added);
end
end

```

