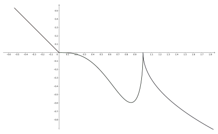
Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral I
LEIC-T, LEE, LETI, LEGI 1.º Semestre 2024/25

Capítulo 3.Diferenciabilidade. Soluções

1. .



2. $f'_e(0) = -1,\ f'_d(0) = 0.$

3. (a) $0,\ \mathbb{R} \setminus \{0\}$

   (b) $\operatorname{sen}|x| + |x|\cos x,\ \mathbb{R}$

   (c) $\frac{2(x+1)^2 - 4x(x+1)}{(x+1)^4},\ \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

   (d) $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}e^x + x^{\frac{3}{2}}e^x,\ \mathbb{R}^+$

   (e) $\sec^2 x - 1,\ \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

   (f) $\frac{(1-\operatorname{sen} x)^2 + \cos x(x + \cos x)}{(1-\operatorname{sen} x)^2},\ \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

   (g) $2x(1 + \ln x) + x,\ \mathbb{R}^+$

   (h) $-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3} + 5^x \ln 5},\ \mathbb{R} \setminus \{0\}$

   (i) $\frac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2},\ \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

4. (a) $a = 1\,, b = 2,$

   (b) $y = 1 + 2x.$

5. Indução.

6. (a) $3^x \ln 3 \operatorname{tg} x^2 + 3^x 2x \sec^2 x^2$

(b) $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} e^{\sqrt{x^2-1}}$

(c) $\frac{\sec^2 x}{3\sqrt{x}\sqrt[3]{\operatorname{tg}(\sqrt{x})+1}}$

(d) $\frac{-\cosh(1/x^2)}{x^3\sqrt{\operatorname{senh}(1/x^2)}}$

(e) $\frac{4x^3}{1+x^8} - \frac{4\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}$

(f) $8(e^{2x} + \operatorname{arcsen}(2x))^7(2e^{2x} + 2/\sqrt{1-4x^2})$

(g) $\frac{1}{\arccos(1/\sqrt{x})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3-x^2}}$

(h) $(\ln(\operatorname{sen} x) + x\cot x)(\operatorname{sen} x)^x$

(i) $\left(\frac{\ln(\operatorname{arctg} x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\operatorname{arcsen} x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\right)(\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arcsen} x}$

7. (a) 30,

   (b) 1/3,

   (c) 14,

   (d) 6/5.

8. (a) $2xf'(x^2)$,

   (b) $\operatorname{sen}(2x)(f'(\operatorname{sen}^2 x) - f'(\cos^2 x))$,

   (c) $\frac{f'(x)}{1+f^2x} + \frac{f'(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2}$,

   (d) $f'(f(x))f'(x)$.

9. (a) 1/4,

   (b) 4.

10. (a) 1/2,

    (b) 2.

11. (a) f resulta do produto e composta de funções contínuas no seu domínio. $f'(x) = 2x\operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)$ para $x \neq 0$,

    (b) O 1º termo tende para zero, qd. $x \to 0$, mas o 2º termo não tem limite qd $x \to 0$,

(c) $f'(0) = 0$ (use a def. de deivada.

12. (a) Sug. considere o intervalo $[0, 1]$,

    (b) Sug. considere o intervalo $[-\pi/2, 0]$,

    (c) Sug. considere os intervalos $[-1, 0]$,$[0, 1]$, e $[1, 10]$,

    (d) Sug. considere o intervalo $[0, 1]$ e $[1, 2]$.

13. (a) Sug. considere a função $f(x) = \operatorname{sen} x$, e $0 < \cos c < 1$,

    (b) Sug. considere a função $f(x) = \cos x$, e use a alínea a)

    (c) Sug. considere a função $f(x) = \operatorname{sen} x$, e use a alínea b). (erro inferior a $0,001$

14. Sugestão: Aplique o Teorema de Rolle a $f(x) - x$ e a $\big(f(x) - x\big)'$.

15. Sugestão: Verifique que as desigualdades são válidas se $x = y$ e caso contrário aplique o Teorema de Lagrange a uma função adequada e ao intervalo $[x, y]$ se $y > x$ ou $[y, x]$ se $x > y$.

16. Sugestão: Use o Teorema de Lagrange nos intervalos $[2n - 1, 2n]$ e $[2n, 2n + 1]$.

17. .

(a) $\ln 2$	(g) $-\infty$	(m) 0
(b) $-\frac{1}{6}$	(h) 0	(n) 1
(c) 1	(i) 0	(o) 1
(d) $\frac{1}{3}$	(j) 0	(p) $\frac{1}{2}$
(e) 1	(k) $-\frac{1}{2}$	(q) $e^{-\frac{1}{6}}$
(f) 0	(l) 1	

18. (a) Para $x \leq 0$ é claro. Se $x > 0$, aplique teorema de Lagrange a e^x em $[0, x]$ (ou mostre que $\mathrm{e}^x - x$ é estritamente crescente para $x > 0$). Domínio $= \mathbb{R}$

    (b) $0\,;\,1$.

    (c) Estritamente crescente: $]-\infty, 1]$; Estritamente decrescente: $[1, +\infty[$; Máximo (global) em $x = 1$.

    (d) $\left]0, \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} - 1}\right]$

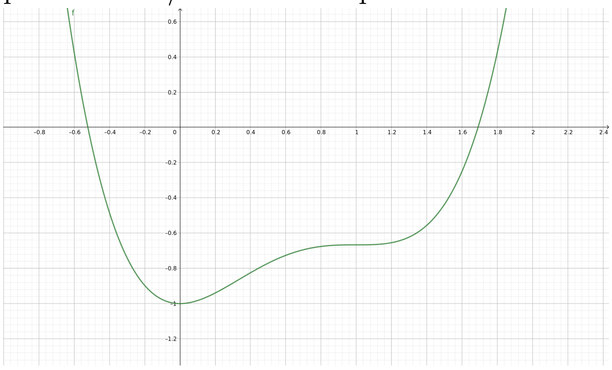
19. (a) Pontos de mínimo local: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, pontos de máximo local: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Note que f' é crescente e estude o sinal de g' (ou de g'' em pontos apropriados).

    (b) Sugestão: Teorema de Rolle.

20. (a) $f'(1) = f'(0) = 0$, $f''(1/3) = f''(1) = 0$ e (quadro resumo):

$-\infty$		0		$1/3$		1		$+\infty$
$+\infty$	$\cup \searrow$	min.	$\cup \nearrow$	infl.	$\cap \nearrow$	infl.	$\cup \nearrow$	$+\infty$

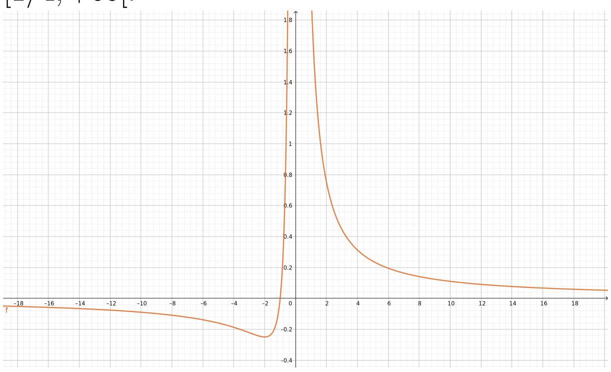
Assim, $D = \mathbb{R}$, f é estritamente crescente em $[0, +\infty[$, estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$. $f(0) = -1$ é um mínimo global, não há máximos. O contradomínio é o intervalo $[-1, +\infty[$. A função é convexa/tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 1/3[$ e côncava/tem a concavidade voltada para baixo em $]1/3, 1[$. Os pontos $x = 1/3$ e $x = 1$ são pontos de inflexão. O gráfico não tem assíntotas.



(b) $f'(-2) = 0$, $f''(3) = 0$ e (quadro resumo):

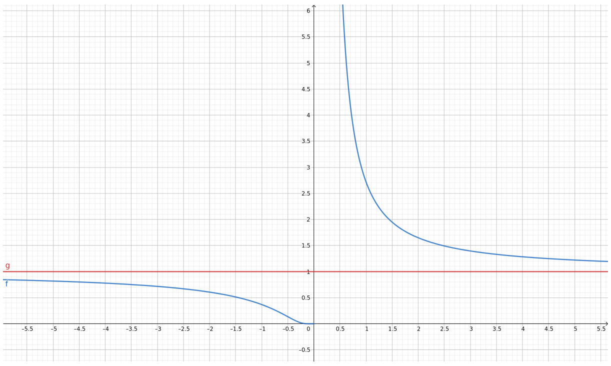
$-\infty$		-3		-2		0^-	0^+		$+\infty$
0	$\cap \searrow$	infl.	$\cup \searrow$	min.	$\cup \nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\cup \searrow$	0

Assim, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e f não é prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$. A função f é estritamente crescente em $[-2, 0[$, estritamente decrescente em $[-\infty, -2]$ e em $]0, +\infty[$. $f(-2) = -1/4$ é um mínimo global, sendo o único extremo. A função é côncava em $]-\infty, -3[$ e convexa nos pontos de $]-3, 0[\cup]0, +\infty[$. O ponto $x = -3$ é um ponto de inflexão. O gráfico tem assíntotas de equação $x = 0$ (assíntota vertical) e $y = 0$ (assíntota à esquerda e à direita). O contradomínio é $[1/4, +\infty[$.



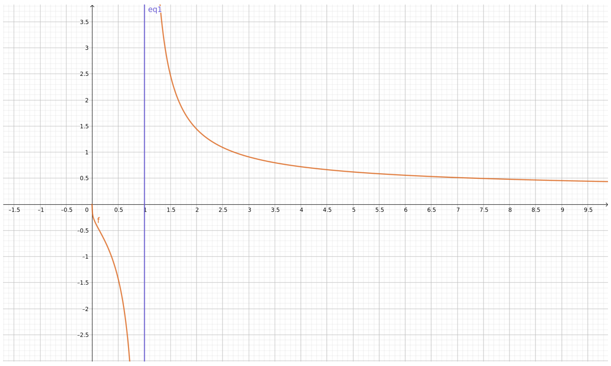
(c) Assímptotas: $y = 1$, $x = 0$; $f'_e(0) = 0$; $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $CD =]0, 1[\cup]0, +\infty[$

$-\infty$		$-1/2$		0^-	0^+		$+\infty$
1	$\cap \searrow$	infl.	$\cup \searrow$	0	$+\infty$	$\cup \searrow$	1



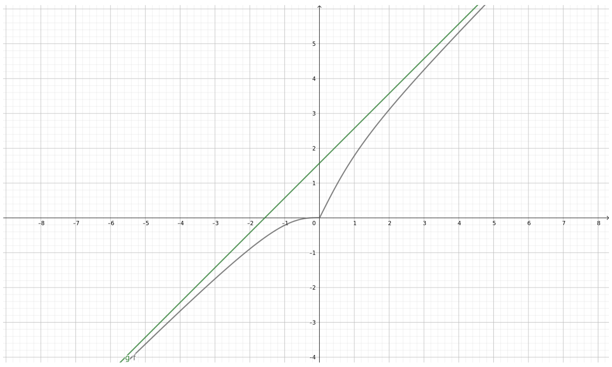
(d) Função inversa da função da alínea anterior; Assímptotas: $x = 1$, $y = 0$; Recta tangente vertical em $x = 0$;
Prolongável por continuidade a $x = 0$; $CD = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

0^+		-2		1^-	1^+		$+\infty$
0	$\cup \searrow$	infl.	$\cap \searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\cup \searrow$	0



(e) Assímptota: $y = x + \frac{\pi}{2}$; $f'_{(}(0) = 0$, $f'_{\mathrm{d}}(0) = 2$; $CD = \mathbb{R}$

$-\infty$		0		$+\infty$
$-\infty$	$\cap \nearrow$		$\cap \nearrow$	$+\infty$



21. (a) $p_2(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}(x-1)^2$

(b) $p_4(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-1 + 3\left(x + \dfrac{\pi}{12}\right) + \dfrac{3^2}{2}\left(x + \dfrac{\pi}{12}\right)^2 - \dfrac{3^3}{3!}\left(x + \dfrac{\pi}{12}\right)^3 - \dfrac{3^4}{4!}\left(x + \dfrac{\pi}{12}\right)^4\right)$

(c) $p(x) = -12 + 2(x-3) + (x-3)^2$.

22. $f(1) = p(1) = -1$, $f'(1) = p'(1) = 0$, $f''(1) = p''(1) = -2$, $f'''(1) = f^{(4)}(1) = 0$. f tem um máximo local em $a = 1$ porque $f'(1) = 0$ e $f''(1) < 0$.

23. (a)

    (b) $e^{-0{,}2} \approx 0{,}818\,733\,333\ldots$ (polinómio de ordem 4).

24. (a) Para cada função existem c_0 entre 0 e x e c_1 entre 1 e x tais que

$$
\begin{aligned}
e^{2x} &= 1 + 2x + 2x^2 + \tfrac{4}{3}e^{2c_0}x^3 = e^2 + 2e^2(x-1) + 2e^2(x-1)^2 + \tfrac{4}{3}e^{2c_1}(x-1)^3 \\
\ln(1+x) &= x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}(1+c_0)^{-3}x^3 = \ln 2 + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{8}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(1+c_1)^{-3}(x-1)^3 \\
\cos(\pi x) &= 1 - \tfrac{1}{2}\pi^2x^2 + \tfrac{1}{6}\pi^3\operatorname{sen}(\pi c_0)x^3 = -1 + \tfrac{1}{2}\pi^2(x-1)^2 + \tfrac{1}{6}\pi^3\operatorname{sen}(\pi c_1)(x-1)^3 \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}(1+c_0)^{-5/2}x^3 = \sqrt{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{4}(x-1) - \tfrac{\sqrt{2}}{32}(x-1)^2 + \tfrac{1}{16}(1+c_1)^{-5/2}(x-
\end{aligned}
$$

    (b) $f(x) = e^{2x}$: erro $< e/6 < 1/2$. $\quad f(x) = \ln(1+x)$: erro $< 1/24$.
    $f(x) = \cos(\pi x)$: erro $< \pi^3/48 < 1$. $\quad f(x) = \sqrt{1+x}$: erro $< 1/128$

25. $\left|f(x) - p(x)\right| = \frac{4}{3}e^{-2c}|x-1|^3 < \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{e}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{6e} < \frac{1}{12}$