DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral I
LEIC-T, LEE, LETI, LEGI 1.º Semestre 2024/25

Capítulo 3.Diferenciabilidade

Exercícios recomendados para as aulas práticas da 1ª semana do cap3 terão o símbolo *.

Derivadas (definição, derivadas laterais, relação com continuidade, regras algébricas, composta, inversa)

1. Esboce o gráfico de uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = f(1) = 0$, $f_e'(0) = -1$, $f_d'(0) = 0$, $f_e'(1) = +\infty$ e $f_d'(1) = -\infty$.

   (Nota: Nestas condições, dizemos que f tem derivada lateral à esquerda e à direita no ponto $x = 0$, mas não no ponto $x = 1$, uma vez que neste ponto os limites são infinito.)

   *

2. Usando a definição de derivada, calcule as derivadas laterais da seguinte função na origem:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}.$$

3. Calcule as derivadas das seguintes funções, indicando em que pontos elas são diferenciáveis.

   (a) $\frac{|x|}{x}$
   (b) $|x| \operatorname{sen} x$
   (c) $\frac{2x}{(x+1)^2}$
   (d) $x^{3/2}e^x$
   (e) $\operatorname{tg} x - x$ *
   (f) $\frac{x+\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$ *
   (g) $x^2(1+\ln x)$
   (h) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 5^x$
   (i) $\frac{e^x}{1+x}$

   *

4. Considere a função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & \text{se } x \leq 0 \\ 1 + (2\operatorname{sen}^2 x)/x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

   (a) Calcule as constantes a e b por forma a que f seja diferenciável no ponto 0.
   (b) Para esses valores de a e b determine a equação da recta tangente ao gráfico de f em cada ponto $c \leq 0$.

5. Mostre, usando o método de indução, que:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x\mathrm{e}^x) = (x+n)\mathrm{e}^x, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

   onde $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$ designa a derivada de ordem n da função xe^x.

6. Calcule $f'(x)$, sendo a função f definida pela expressão:

   (a) $3^x \operatorname{tg}(x^2)$
   (b) $e^{\sqrt{x^2-1}}$
   (c) $(1+\operatorname{tg}\sqrt{x}\,)^{2/3}$
   (d) $\sqrt{\operatorname{senh}(1/x^2)}$
   (e) $\operatorname{arctg}(x^4)$-$\operatorname{arctg}^4 x$
   (f) $\big(e^{2x}+\operatorname{arcsen}(2x)\big)^8$ *
   (g) $\ln\big(\arccos(1/\sqrt{x})\big)$ *
   (h) $\big(\operatorname{sen} x\big)^x$
   (i) $(\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arcsen} x}$

   *

7. A tabela seguinte representa alguns valores de uma função $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ injectiva e diferenciável:

x	1	3	5	7	9	11
$f(x)$	1	2	3	5	7	11
$f'(x)$	9	7	2	3	5	11

   Usando os valores desta tabela:

   (a) Calcule a derivada de $f(x^2)$ em $x=3$.
   (b) Calcule a derivada de $f^{-1}(x)$ em $x=5$.
   (c) Calcule a derivada de $f\circ f(x)$ em $x=5$.
   (d) Calcule a derivada de $f^{-1}(x^2-2)$ em $x=3$.

8. Determine a derivada da função g em termos de f' se:

   (a) $g(x)=f(x^2)$
   (b) $g(x)=f(\operatorname{sen}^2 x)+f(\cos^2 x)$ *
   (c) $g(x)=\operatorname{arctg}(f(x))+f(\operatorname{arctg} x)$
   (d) $g(x)=f\big(f(x)\big)$

   *

9. Seja $f(x)=\ln(1+\sqrt{x}\,)$ e seja $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função injectiva, diferenciável tal que $g(1)=4$, $g'(1)=3$ e $g(x)>0$ para todo o $x\in\mathbb{R}$. Considere a função $h(x)=f\big(g(x)\big)$.

   (a) Justifique que h é diferenciável em 1 e calcule $h'(1)$.
   (b) Justifique que h é injectiva e que a sua função inversa h^{-1} é diferenciável em $\ln 3 = h(1)$. Calcule $(h^{-1})'(\ln 3)$.

10. Seja $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável e estritamente monótona com $g(0)=2$ e $g'(0)=\frac{1}{2}$. Considere a função $f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=g(\operatorname{arcsen} x)$.

    (a) Justifique que f é diferenciável em $]-1,1[$ e calcule $f'(0)$.
    (b) Justifique que f é injectiva e, sendo f^{-1} a função inversa, calcule $(f^{-1})'(2)$.

11. Considere a função $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2\operatorname{sen}(1/x), & \text{se } x\neq 0;\\ 0, & \text{se } x=0.\end{cases}$$

(a) Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e calcule f' para $x \neq 0$.

(b) Mostre que $\lim_{x\to 0} f'(x)$ não existe.

(c) Justifique que f é diferenciável no ponto 0 e calcule $f'(0)$.

Exercícios recomendados para as aulas práticas da 2ª semana do cap3 terão o símbolo **.

Teoremas de Rolle e Lagrange

12. Mostre que:

    **

    (a) a equação $x^5 + 5x = 5$ tem exactamente uma solução.

    (b) a equação $\cos x = 2x + 3$ tem exactamente uma solução.

    (c) a equação $3x^2 = e^x$ tem exactamente três soluções.

    (d) o polinómio $p(x) = x^6 - 4x^4 + 2$ tem exactamente quatro zeros (sugestão: é par).

13. Aplicando o teorema de Lagrange ao intervalo $[0, x] \subset [0, \pi/2]$, mostre sucessivamente que

    (a) **$\operatorname{sen} x < x$ (b) $-x^2 < \cos x - 1$ (c) $x - x^3 < \operatorname{sen} x < x$

    Aproveite a alínea (c) para estimar o erro da aproximação $\operatorname{sen} 0.1 \approx 0.1$. **

14. Prove que, se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável e o seu gráfico cruza a recta $y = x$ em três pontos, então f'' tem pelo menos um zero.

15. Mostre que:

    (a) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ e $|\operatorname{arcsen} x - \operatorname{arcsen} y| \geq |x - y|\ \forall x, y \in [-1, 1]$.

    (b) $|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \geq |x - y|\ \forall x, y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x - y|\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

16. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(2n) = 0$ e $f(2n + 1) = n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Justifique que f' toma valores positivos e negativos arbitrariamente grandes em valor absoluto.

Regra de Cauchy

17. Calcule, se existirem, os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{10^x - 5^x}{\operatorname{sen} x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x) \operatorname{arctg}(x)}{x \ln(1+x)}$ **

(d) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{3x + \operatorname{sen} x}$

(e) $\lim_{x\to +\infty} x \cos(\operatorname{arctg} x)$ **

(f) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-1/x}}{x}$

(g) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{e^{-1/x}}{x}$

(h) $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) \ln\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)$

(i) $\lim_{x\to 0^+} x \ln\Big(\dfrac{x}{x+1}\Big)$ **

(j) $\lim_{x\to 0^+} \big(\ln(\operatorname{sen} x) - \ln(\operatorname{arcsen} x)\big)$

(k) $\lim_{x\to 0} \Big(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} - \dfrac{1}{x}\Big)$ **

(l) $\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}$

(m) $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x}$ **

(n) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

(o) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{sen}(1/x)}$

(p) $\lim_{x\to +\infty} x\big(1 - \cos(1/\sqrt{x}\,)\big)$ **

(q) $\lim_{x\to 0} \Big(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\Big)^{1/x^2}$

Estudo de Funções

18. Seja f a função definida por $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - x}$

(a) Mostre que $\mathrm{e}^x > x$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Qual o domínio de f?

(b) Calcule $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

(c) Determine os intervalos de monotonia e os extremos de f.

(d) Determine o contradomínio de f.

19. * Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, com $f'(0) = 0$ e $f''(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Considere a função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(\operatorname{sen} x)$.

(a) Determine e classifique os extremos locais da função g.

(b) O que pode dizer sobre o número de soluções da equação $g''(x) = 0$?

20. Estude as seguintes funções quanto ao domínio, possíveis prolongamentos por continuidade, diferenciabilidade, monotonia e extremos, contradomíno, concavidade e assímptotas, e use essa informação para esboçar o gráfico.

(a) $x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 - 1$

(b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

(c) $e^{1/x}$

(d) $1/\ln x$

(e) $x + \operatorname{arctg}|x|$

Polinómio de Taylor

21. **

    Determine o polinómio de Taylor de ordem 2 em $a = 1$ da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2) - x + 1$.

    (b) Escreva o polinómio de Taylor $p(x)$ de ordem 4 da função $f(x) = \operatorname{sen} 3x$ no ponto $x = -\pi/12$.

    (c) Use o polinómio de Taylor para escrever o polinómio $p(x) = x^2 - 4x - 9$ como um polinómio em potências de $(x - 3)$.

22. Seja f uma função 4 vezes diferenciável cujo polinómio de Taylor de ordem 4 no ponto $a = 1$ é dado por $p(x) = -2 + 2x - x^2$. Determine as derivadas $f^{(k)}(a)$ para $k = 1, \ldots, 4$ e verifique se f tem ou não um extremo local no ponto a, classificando-o.

23. Seja p_n o polinómio de Taylor de ordem n de e^x em $x = 0$.

    (a) Mostre que, para $x < 0$,
    $$\left|\mathrm{e}^x - p_n(x)\right| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

    (b) Aproveite para calcular $\mathrm{e}^{-0.2}$ com precisão de 5 casas decimais.

24. Considere as funções
    $$e^{2x}\,, \qquad \ln(1+x)\,, \qquad \cos(\pi x)\,, \qquad ** \quad \sqrt{1+x}$$

    (a) Determine a fórmula de Taylor de ordem 2 destas funções com resto de Lagrange relativa aos pontos $a = 0$ e $a = 1$. **

    (b) Para $a = 0$, determine estimativas para o erro cometido ao aproximar a função dada pelo polinómio de Taylor obtido no intervalo $]0, 1/2[$.

**

25. Determine, para $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, um majorante do erro que se comete ao aproximar $f(x) = e^{-2x} + \frac{1}{2}x$ pelo seu polinómio de Taylor de ordem 2 em $a = 1$.