DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Exercícios Resolvidos Extra de Cálculo Diferencial e Integral I LEIC-T, LEE, LEGI e LETI - 1.º Semestre 2024/25

1 Capítulo 1. Números reais: revisões e propriedades

Expressões algébricas, inequações. Supremo e ínfimo de um conjunto

1. Sejam A, B e C os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2|x| > 3\right\}, \qquad B = \left]0, \sqrt{2}\right],$$
$$C = \left\{\sqrt{2} - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

a) Calcule A sob a forma de uma reunião de intervalos.

b) Indique, caso exista, $\inf A$, $\min A \cap B$, $\text{máx}\, A \cap B$, $\text{máx}\, A \cap B \cap \mathbb{Q}$, $\inf A \cap B \cap \mathbb{Q}$, $\text{máx}\, C$, $\text{máx}\, B \setminus C$.

a) $x^2 + 2|x| > 3 \Leftrightarrow |x|^2 + 2|x| - 3 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \vee |x| < -3 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$.
(OU: Para $x \geq 0$: $x^2 + 2x > 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) > 0$. Logo, $x \in [0, +\infty[\cap (]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[) =]1, +\infty[$.
Para $x < 0$: $x^2 - 2x > 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) > 0$. Logo, $x \in]-\infty, 0[\cap (]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[) =]-\infty, -1[$.)
Assim, $A =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

b) $\inf A$ não existe, porque A não é minorado;
$A \cap B = \left]1, \sqrt{2}\right]$: $\min A \cap B$ não existe, $\text{máx}\, A \cap B = \sqrt{2}$, $\text{máx}\, A \cap B \cap \mathbb{Q}$ não existe, já que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, e $\inf A \cap B \cap \mathbb{Q} = 1$; $\text{máx}\, C$ não existe; $\text{máx}\, B \setminus C = \sqrt{2}$.

2. Considere os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x : x \geq 0 \ \wedge \ \frac{x^4 - 4}{|x - 1|} \leq 0\right\}, \qquad B = \{x : x \geq 0 \ \wedge \ \exists_{k \in \mathbb{N}}\, kx \notin \mathbb{Q}\}.$$

a) Mostre que $A = \left[0, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}$ e justifique que $B = [0, +\infty[\setminus \mathbb{Q}$.

b) Determine, ou mostre que não existem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de cada um dos conjuntos A e $A \setminus B$.

a) Começamos por notar que

$$\begin{aligned}\frac{x^4-4}{|x-1|}\leq 0 &\Leftrightarrow \frac{(x^2-2)(x^2+2)}{|x-1|}\leq 0\\ &\Leftrightarrow x^2-2\leq 0 \ \wedge\ |x-1|\neq 0 \quad (\text{porque } x^2+2>0 \text{ e } |x-1|\geq 0)\\ &\Leftrightarrow x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]\setminus\{1\}.\end{aligned}$$

Então,

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0 \ \wedge\ x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]\setminus\{1\}\right\}=\left[0,\sqrt{2}\right]\setminus\{1\}.$$

Relativamente a B começamos por notar que se existe um $k\in\mathbb{N}$ tal que $kx\notin\mathbb{Q}$ então $x\notin\mathbb{Q}$ pois, caso contrário, $kx\in\mathbb{Q}$ para todo o $k\in\mathbb{N}$. Portanto $B\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Reciprocamente, se $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ então $1\cdot x=x\notin\mathbb{Q}$. Portanto B é de facto o conjunto dos números irracionais positivos.

b) Notamos que $A\setminus B=\left(\left[0,\sqrt{2}\right[\setminus\{1\}\right)\cap\mathbb{Q}$. Então,

$$\begin{aligned}\sup A=\sup A\setminus B=\sqrt{2}=\text{máx}\, A,\\ \inf A=\inf A\setminus B=0=\min A=\min A\setminus B.\end{aligned}$$

$A\setminus B$ não tem máximo pois $\sup A\setminus B=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

3. Para $A\subset\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$, definimos $-A=\{-x: x\in A\}$. Justifique que A é minorado se e só se $-A$ é majorado e nesse caso temos $\inf A=-\sup(-A)$.

Temos $-A\neq\emptyset$. Por definição, A é minorado se existe $x\in\mathbb{R}$ com $x\leq a$, para todo $a\in A$. Como $x\leq a\Leftrightarrow -x\geq -a$, temos A é minorado $\Leftrightarrow$ $-A$ é majorado. Neste caso, existem $\inf(A)$ e $\sup(-A)$. Sendo $\alpha=\inf(A)$ o maior minorante de A, temos que $-\alpha$ é o menor majorante, ie, o supremo, de $-A$.

4. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $A\subset B$ e suponha que A é não vazio e B é majorado. Justifique que existem os supremos de A e B e prove que se verifica $\sup A\leq\sup B$.

Se B é majorado e $A\subset B$, então A é majorado e qualquer majorante de B é majorante de A (directamente da definição de majorante). Por outro lado $A\neq\emptyset\wedge A\subset B\Rightarrow B\neq\emptyset$. Logo como A e B são majorados e não-vazios, o axioma do supremo garante que $\sup A$ e $\sup B$ existem. Como $\sup B$ é majorante de B será também majorante de A, logo $\sup A\leq\sup B$.

5. Seja $A\subset\mathbb{R}$ e $s=\sup A$. Se existe $\varepsilon_0>0$ tal que $(V_{\varepsilon_0}(s)\setminus\{s\})\cap A=\emptyset$, então A tem máximo.

Como $s = \sup A$, sabemos que, para qualquer $\varepsilon > 0$, $V_\varepsilon(s) \cap A \neq \emptyset$. Como $(V_{\varepsilon_0}(s) \setminus \{s\}) \cap A = \emptyset = (V_{\varepsilon_0}(s) \cap A) \setminus \{s\}$, vemos que $V_{\varepsilon_0}(s) \cap A = \{s\}$, em particular, $s \in A$ e A tem máximo.

Indução Matemática

(a) Considere as sucessões reais (u_n) e (v_n) definidas por recorrência por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 + 1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 3, \\ v_{n+1} = \frac{3v_n}{(n+1)^2}\,. \end{cases}$$

Mostre, usando indução matemática, que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

i. $u_n = \sqrt{2^n - 1}$,

ii. $v_n = \dfrac{3^n}{(n!)^2}$.

i. Para $n = 1$, temos $u_1 = \sqrt{2^1 - 1} = 1$.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{2^n - 1}$.
Tese: $u_{n+1} = \sqrt{2^{n+1} - 1}$.
Temos por hipótese, $u_n^2 = 2^n - 1$. Assim, usando a fórmula de recorrência,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 + 1} = \sqrt{2(2^n - 1) + 1} = \sqrt{2^{n+1} - 2 + 1} = \sqrt{2^{n+1} - 1},$$

como queríamos mostrar.

ii. Para $n = 1$, temos $v_1 = \dfrac{3^1}{(1!)^2} = 3$.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3^n}{(n!)^2}$ (i.e $P(n)$ é verdadeira) e queremos provar:
Tese: $v_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{((n+1)!)^2}$.
Temos por hipótese, $v_n = \dfrac{3^n}{(n!)^2}$. Usando a fórmula de recorrência,

$$v_{n+1} = \frac{3v_n}{(n+1)^2} = \frac{3\frac{3^n}{(n!)^2}}{(n+1)^2} = \frac{3^{n+1}}{(n!)^2(n+1)^2} = \frac{3^{n+1}}{((n+1)!)^2}$$

como queríamos mostrar.

(b) Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

a) $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.[1]

b) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$.

c) Para $a \in \mathbb{R}$, $(a-1)(1 + a + \cdots + a^n) = a^{n+1} - 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.

[1] Esta expressão pode ser escrita na forma de somatório como $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$. Ver exercicios seguintes.

d) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$, para qualquer $n\in\mathbb{N}$.

a) $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2, \quad \forall n\in\mathbb{N}$:

Para $n=1$, temos $2\cdot 1-1=1$, que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n\in\mathbb{N}$, temos $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$.
Tese (a provar): $1+3+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1)=(n+1)^2$.
Usando a hipótese de indução, temos:

$$1+3+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1)=n^2+(2n+2-1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

como queríamos mostrar.

(Alternativamente, podemos escrever $1+3+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ e usar o facto $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+2(n+1)-1$.)

b) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$:

Para $n=1$, temos $\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1+1}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n\in\mathbb{N}$, temos $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.
Tese (a provar): $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$.
Usando a hipótese de indução, temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}.\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.
(Alternativamente: usando somatórios).

c) Dado $a\in\mathbb{R}$, $(a-1)(1+a+\cdots+a^n)=a^{n+1}-1$, para qualquer $n\in\mathbb{N}_0$:

Para $n=0$, a condição acima fica $a-1=a-1$ que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n\in\mathbb{N}$, $(a-1)(1+a+\cdots+a^n)=a^{n+1}-1$.
Tese: $(a-1)(1+a+\cdots+a^n+a^{n+1})=a^{n+2}-1$.
Simplificando o lado esquerdo da igualdade acima, temos que

$$(a-1)(1+a+\cdots+a^{n+1})= \quad (a-1)(1+a+\cdots+a^n)+(a-1)a^{n+1}.$$

Usando a hipótese de indução, temos agora

$$\begin{aligned}(a-1)(1+a+\cdots+a^{n+1}) &= a^{n+1}-1+(a-1)a^{n+1}.\\ &= a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}\\ &= a^{n+2}-1,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

d) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

Para $n = 1$, a condição fica $\frac{1}{2!} = 1 - \frac{1}{1+1!} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.
Tese: $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$.
Usando a hipótese de indução,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) + \left(\frac{n+1}{(n+2)!}\right) \\ &= 1 - \frac{n+2-n-1}{(n+2)!} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+2)!}\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

(c) Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

a) $(n+2)! \geq 2^{2n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
b) $2n - 3 < 2^{n-2}$, para todo o natural $n \geq 5$.
c) $(n!)^2 > 2^n n^2$, para todo o natural $n \geq 4$.
d) $7^n - 1$ é divisível por 6 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

a) $(n+2)! \geq 2^{2n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

Para $n = 1$, temos que $3! \geq 4$ que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$ com $n \in \mathbb{N}$, temos $(n+2)! \geq 2^{2n}$.
Tese: $(n+3)! \geq 2^{2n+2}$.
Temos que $(n+3)! \geq 2^{2n+2} \Leftrightarrow (n+3)(n+2)! \geq 4 \cdot 2^{2n}$. Como, por hipótese de indução, $(n+2)! \geq 2^{2n}$ e, para $n \geq 1$, $n + 3 \geq 4 > 0$, temos então que

$$(n+3)(n+2)! \geq 4 \cdot 2^{2n}$$

como queríamos mostrar.

b) $2n - 3 < 2^{n-2}$, para todo o natural $n \geq 5$:

Para $n = 5$, temos que $10 - 3 < 2^3 \Leftrightarrow 7 < 8$, que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 5$, temos $2n - 3 < 2^{n-2}$.
Tese: $2(n+1) - 3 < 2^{(n+1)-2}$.
Desenvolvendo o lado esquerdo da desigualdade acima e usando a hipótese, temos

$$2(n+1) - 3 = 2n + 2 - 3 = (2n-3) + 2 < 2^{n-2} + 2,$$

Como, para $n \geq 5$, temos $2 < 2^{n-2}$, conclui-se que $2^{n-2} + 2 < 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$. Logo

$$2(n+1) - 3 < 2^{n-1}.$$

c) $(n!)^2 > 2^n n^2$, para todo o natural $n \geq 4$:

Para $n = 4$, temos $(4!)^2 > 2^4 \cdot 4^2 \Leftrightarrow 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 > 2^4 \cdot 4^2 \Leftrightarrow 3^2 > 2^2$, que uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, temos $(n!)^2 > 2^n n^2$.
A provar: $((n+1)!)^2 > 2^{n+1}(n+1)^2$.
Temos $((n+1)!)^2 > 2^{n+1}(n+1)^2 \Leftrightarrow (n+1)^2(n!)^2 > 2^{n+1}(n+1)^2 \Leftrightarrow (n!)^2 > 2^n \cdot 2$.
Por hipotese, $(n!)^2 > 2^n n^2$ e como $n^2 > 2$, se $n \geq 4$, o resultado segue (da propriedade transitiva).

d) $7^n - 1$ é divisível por 6 para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

Para $n = 1$, temos $7^1 - 1 = 6$, que é divisível por 6.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ é divisível por 6. Isto significa que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $6k = 7^n - 1$.
Tese: $7^{n+1} - 1$ é divisível por 6, isto é, existe um natural positivo j tal que $7^{n+1} - 1 = 6j$.
Então:

$$7^{n+1} - 1 = 7 \cdot 7^n - 1 = 7(7^n - 1 + 1) - 1 = 7(6k+1) - 1 = 6 \cdot 7k + 7 - 1 = 6(7k+1)$$

em que na terceira igualdade usámos a hipótese de indução. Demonstrámos então a tese com $j = 7k + 1$.
(Alternativamente, escrever $7^{n+1} - 1 = (6+1)7^n - 1 = 6 \cdot 7^n + 6k$.)

(d) Prove a desigualdade de Bernoulli:

$$\textit{Sendo } a > -1 \textit{ e } n \in \mathbb{N}_0, \quad (1+a)^n \geq 1 + na.$$

Sendo $a > -1$ e $n \in \mathbb{N}_0$, $(1+a)^n \geq 1 + na$:
Para $n = 0$, a condição fica $(1+a)^0 \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq 1$, que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.
Tese: $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$.
Desenvolvendo o lado esquerdo e usando a hipótese de indução, temos que

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a),$$

dado que $a + 1 > 0$. Como

$$(1+na)(1+a) = 1 + a + na + na^2 = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$$

uma vez que $na^2 \geq 0$, temos agora $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$, como queríamos mostrar.

(e) Prove por indução matemática que para qualquer $n \in \mathbb{N}$

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{5-2k}{3^k} = 1 + \frac{n-1}{3^n}$.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

Para $n = 1$, temos $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2+1} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, temos $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

Tese (a provar): $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n+1}{2n+3}$.

Temos, usando a HI na segunda igualdade:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} \\
&= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}
\end{aligned}$$

já que $(n+1)(2n+1) = 2n^2 + 3n + 1$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{5-2k}{3^k} = 1 + \frac{n-1}{3^n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

Para $n = 1$, temos $\sum_{k=1}^{1} \frac{5-2k}{3^k} = 1$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, temos $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{5-2k}{3^k} = 1 + \frac{n-1}{3^n}$.

Tese (a provar): $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{5-2k}{3^k} = 1 + \frac{n}{3^{n+1}}$.

Temos, usando a HI na segunda igualdade:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{5-2k}{3^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{5-2k}{3^k} + \frac{5-2(n+1)}{3^{n+1}} \\
&= 1 + \frac{n-1}{3^n} + \frac{3-2n}{3^{n+1}} = 1 + \frac{3n-3+3-2n}{3^{n+1}} \\
&= 1 + \frac{n}{3^{n+1}} ,
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

(a) Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{2} \end{cases}.$$

a) Mostre usando indução que $u_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
b) Mostre que (u_n) é uma sucessão crescente.
c) Mostre que (u_n) é convergente e indique $\lim u_n$.

a) $u_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$:
Para $n = 0$ temos $u_0 = 1 \leq 2$. Supondo $u_n \leq 2$ para um certo $n \in \mathbb{N}$, consideremos u_{n+1}:

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2} \leq 1 + \frac{2}{2} = 2.$$

Por indução conclui-se que $u_n \leq 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

b) (u_n) é uma sucessão crescente:
Com $n \geq 0$ e tendo em conta a alínea (a):

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{u_n}{2} - u_n = 1 - \frac{u_n}{2} \geq 1 - \frac{2}{2} = 0$$

e portanto (u_n) é uma sucessão crescente.

c) De (a) e (b) decorre que (u_n) é crescente e majorada, pelo que é convergente. Da definição de (u_n), e uma vez que sendo (u_{n+1}) uma subsucessão de (u_n), teremos (u_{n+1}) convergente com $\lim u_{n+1} = \lim u_n$, segue que

$$\lim u_n = 1 + \frac{\lim u_n}{2}.$$

Resolvendo a equação em ordem a $\lim u_n$, obtem-se

$$\lim u_n - \frac{\lim u_n}{2} = 1 \Leftrightarrow \lim u_n = 2.$$

(b) Seja $u_1 > 1$ e $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ para $n \in \mathbb{N}_1$. Mostre que u_n é convergente e calcule $\lim u_n$.
(Sugestão: comece por provar por indução matemática que $1 < u_n < 2$, para todo o inteiro $n \geq 2$.)

Notemos que, se $x > 1$, então $0 < \frac{1}{x} < 1$ e, portanto $1 < 2 - \frac{1}{x} < 2$. Como $u_1 > 1$, concluimos que $1 < u_2 < 2$. Por outro lado, se, como hipótese de indução, considerarmos $1 < u_n < 2$, então, usando o mesmo argumento concluimos que $1 < u_{n+1} < 2$. Provamos assim que $\forall_{n \in \mathbb{N}_2}$, $1 < u_n < 2$, e que, portanto, a sucessão é limitada.
Como $u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{u_n} - u_n = -\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n} = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n} < 0$, dado que, como vimos $u_n > 1$, concluimos que u_n é decrescente. Logo a sucessão é monótona e limitada e, portanto, convergente.

Seja $l = \lim u_n$. Então, dado que $\lim u_{n+1} = \lim u_n$, temos

$$\lim u_{n+1} = \lim \left(2 - \frac{1}{u_n}\right) \quad \Leftrightarrow \quad l = 2 - \frac{1}{l} \quad \Leftrightarrow \quad l = 1.$$

(c) Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência por $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

a) Prove por indução que $1 \leq u_n < 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

b) Prove por indução que (u_n) é crescente.
(Alternativamente, verifique que $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+\sqrt{2+u_n}}$.)

c) Justifique que (u_n) é convergente.

d) Aplicando limites a ambos os membros da expressão de recorrência, determine o limite de (u_n).

a) $1 \leq u_n < 2$, para $n \in \mathbb{N}$:
- $n = 1$: $u_1 = 1$, logo $1 \leq u_1 < 2$ é uma proposição verdadeira.
- Hipótese de indução: $1 \leq u_n < 2$, para certo $n \in \mathbb{N}$. Queremos ver que também $1 \leq u_{n+1} < 2$. Como $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, usando a hipótese de indução temos $\sqrt{2+1} \leq u_{n+1} < \sqrt{2+2} \Leftrightarrow \sqrt{3} \leq u_{n+1} < 2 \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} < 2$.

b) (u_n) é crescente: vamos usar indução matemática para mostrar que $u_{n+1} \geq u_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
- $n = 1$: $u_1 = 1$, $u_2 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$, logo $u_2 > u_1$ é uma proposição verdadeira.
- Hipótese de indução: $u_{n+1} \geq u_n$, para certo $n \in \mathbb{N}$. Queremos ver que também $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. Temos $u_{n+2} = \sqrt{2 + u_{n+1}}$, e, de $u_{n+1} \geq u_n$, vem que $\sqrt{2 + u_{n+1}} \geq \sqrt{2 + u_n}$, ou seja, que $u_{n+2} \geq u_{n+1}$, como queriamos mostrar.

c) (u_n) é monótona crescente e limitada, logo convergente.

d) Seja $l = \lim u_n$. Então, dado que $\lim u_{n+1} = \lim u_n$, temos

$$\lim u_{n+1} = \lim \sqrt{2 + u_n} \Leftrightarrow l = \sqrt{2 + l} \Leftrightarrow l^2 = 2 + l \wedge l \geq 0 \Leftrightarrow l = 2.$$