Medida e Integração
2022/2023

Teste de 14 de Abril de 2023 - 19h00
Duração: 45 minutos

Sugestão de Resolução

1. (1.5 val.) Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Mostre que

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) \quad \text{para quaisquer } A, B \in \mathcal{A}.$$

R. Como $A \cup B = A + (B \setminus A)$ (conjuntos em $\mathcal{A}$), pela aditividade da medida,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

Como uma medida positiva é monótona e $B \setminus A \subset B$, concluímos que

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

2. (1.5 val.) Seja X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de partes de X. Dada $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável, mostre que $g : X \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ é mensurável.

R. Para ver que g é mensurável, basta verificar que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$g^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{A}.$$

Dado $a \in \mathbb{R}$,

$$g^{-1}((a, +\infty)) = \{x \in X : g(x) > a\} = \{x \in X : f(x) > a^3\} = f^{-1}((a^3, +\infty)).$$

Como f é mensurável, $f^{-1}((a^3, +\infty)) \in \mathcal{A}$. Concluímos que g é mensurável.

3. (1.5 val.) Calcule

$$\lim_n \int_0^1 \frac{e^{-nx^4}}{\sqrt{x}} dx.$$

R. Em primeiro lugar, repare-se que $f_n(x) = e^{-nx^4}/\sqrt{x}$ são contínuas em $]0, 1]$ e portanto mensuráveis para a σ-álgebra de Lebesgue. Vamos ver se se verificam as condições do teorema da convergência dominada:

- Para qualquer $x > 0$, $f_n(x) = e^{-nx^4}/\sqrt{x} \to 0$ quando $n \to \infty$.
- Temos a estimativa $|f_n(x)| \leq 1/\sqrt{x}$, que é mensurável (por ser contínua, ver acima) e integrável, já que

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \lim_n \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{[1/n,1]}(x) dx = (\text{TCM}) = \lim_n \int_{1/n}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_n 2 - 2/\sqrt{n} = 2.$$

(O teorema da convergência monótona aplica-se porque $0 \leq 1/\sqrt{x} \cdot \mathbb{1}_{[1/n,1]}(x) \nearrow 1/\sqrt{x}$ para $x \in]0, 1]$).

Assim sendo, pelo teorema da convergência dominada,

$$\lim_n \int_0^1 \frac{e^{-nx^4}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \lim_n \frac{e^{-nx^4}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

4. (1.5 val.) Seja $f :]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$ uma função mensurável definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y}\sin(x^2y)}{y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Mostre que f é integrável (para a medida de Lebesgue).

R. Como f é mensurável, $|f|$ é mensurável e positiva. Sendo a medida de Lebesgue uma medida σ-finita, podemos aplicar o teorema de Tonelli da seguinte forma:

$$\int_{]0,1[\times]0,1[} |f(x,y)|dxdy = \int_{]0,1[} \left(\int_{]0,1[} |f(x,y)|dx \right) dy = \int_{]0,1[} \left(\int_{]0,y[} \frac{e^{-x/y}|\sin(x^2y)|}{y} dx \right) dy$$
$$\leq \int_{]0,1[} \left(\int_{]0,y[} \frac{1}{y} dx \right) dy \leq \int_{]0,1[} 1 dy = 1.$$

Logo f é integrável.

OU

R. Como

$$|f(x,y)| \leq \frac{|\sin(x^2y)|}{y} \leq \frac{x^2y}{y} \leq 1,$$

temos que

$$\int_{]0,1[\times]0,1[} |f(x,y)|dxdy \leq \int_{]0,1[\times]0,1[} 1 dxdy = 1.$$

Logo f é integrável.