DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cdi2 (LMAC)
1ª Lista de problemas opcionais

1. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que
   (a) se A é aberto, $A^c := \mathbb{R}^n \setminus A$ é fechado;
   (b) se A é fechado, A^c é aberto;
   (c) A é aberto *sse* A^c é fechado.

2. Seja I um conjunto e sejam $A_i \subset \mathbb{R}^n, i \in I$. Mostre que
   (a) se A_i é aberto, para todo $i \in I$, então $\cup_{i\in I} A_i$ é aberto;
   (b) se A_i é fechado, para todo $i \in I$, então $\cap_{i\in I} A_i$ é fechado;
   (c) se $J \subset I$ é finito e A_i é aberto para todo $i \in J$, então $\cap_{i\in J} A_i$ é aberto;
   (d) se $J \subset I$ é finito e A_i é fechado para todo $i \in J$, então $\cup_{i\in J} A_i$ é fechado.

3. Calcule $\operatorname{int}(\mathbb{N}^n)$, $\operatorname{ext}(\mathbb{N}^n)$, $\partial(\mathbb{N}^n)$ e $\overline{\mathbb{N}^n}$.

4. Calcule $\operatorname{int}(\mathbb{Q}^n)$, $\operatorname{ext}(\mathbb{Q}^n)$, $\partial(\mathbb{Q}^n)$ e $\overline{\mathbb{Q}^n}$.

5. Sejam $A, U \subset \mathbb{R}^n$ tais que $U \subset A$ e U é aberto. Mostre que $U \subset \operatorname{int}(A)$. Ou seja, $\operatorname{int}(A)$ é o maior aberto contido em A.

6. Sejam $A, F \subset \mathbb{R}^n$ tais que $A \subset F$ e F é fechado. Mostre que $\overline{A} \subset F$. Ou seja, $\overline{A}$ é o menor fechado contendo A.

7. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto e fechado. Mostre que $A = \varnothing$ ou $A = \mathbb{R}$.
   Sugestão: Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
   $$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$
   e mostre que f é contínua.