DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

1^{o} **Semestre**
2022/2023

Exame A de Álgebra Linear

10 de fevereiro 2023 (10:30)

Duração: 2h

Nome:

IST id:

Instruções

Este exame é constituído por 2 grupos de questões: grupo 1 com 4 questões de resposta fechada, grupo 2 com 5 questões de resposta aberta. O grupo 1 está cotado para 6 valores e o grupo 2 tem a cotação total de 14 valores.
Nas questões de resposta fechada serão consideradas apenas as respostas assinaladas nos quadrados disponíveis.
Para as questões de resposta aberta deves responder no caderno de respostas. Deves **indicar nas tuas respostas todos os cálculos e justificações**.

Correção das questões de resposta fechada:
Temos para as questões de escolha múltipla, Certa: 1 val. Errada: - 0.3 val. Branco: 0 val.
Temos para as questões de validação de hipóteses, Opção correta (Verdadeira ou Falsa): Cotação total/Nº de hipóteses, Errada ou em Branco: 0 val.

Boa sorte!

		Classificação
1	1.0	
2	2.0	
3a)	1.0	
3b)	1.0	
4	1.0	
5a)	1.0	
5b)	1.0	
5c)	1.0	
6a)	1.5	
6b)	1.5	
7a)	1.5	
7b)	1.5	
8a)	1.0	
8b)	1.0	
8c)	0.5	
9a)	1.0	
9b)	1.5	

O meu nível de confiança para realizar o exame, a que vou responder de seguida é

- [ ] de 0% a 20%
- [ ] de 20% a 40%
- [ ] de 40% a 60%
- [ ] de 60% a 80%
- [ ] de 80% a 100%

Obrigada por responder a esta questão!

Grupo 1 (6 val.)

Questão 1 (1 val.) Seja W um espaço vetorial, e V o subespaço gerado por quatro vetores não nulos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$, de W, ou seja, V é a expansão linear do conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. Neste caso, escrevemos $V = Span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. Tem-se ainda

- $\mathbf{v}_2 \notin Span\{\mathbf{v}_1\}$;
- $\mathbf{v}_3 \notin Span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$
- $\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_3 + 4\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$;

Assinale com um $\mathbf{X}$ o quadrado correspondente à **única** afirmação que **NÃO** está correta.

☐ O conjunto $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é linearmente independente;
☐ O conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$ é uma base para V;
☐ $Span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} = Span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$;
☐ A dimensão de V é igual a 4.

Questão 2 (2 val.) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Assinale com um $\mathbf{V}$ o quadrado correspondente a uma afirmação **verdadeira**, e com um $\mathbf{F}$ o quadrado correspondente a uma afirmação **falsa**, quanto estiver a avaliar as seguintes afirmações.

☐ A transformação linear $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ é invertível;
☐ A matriz A é a composição de uma rotação com uma contração;
☐ A matriz A é diagonalizável;
☐ O sistema dinâmico $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ tem a origem como um atrator.
☐ O sistema dinâmico $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ tem trajetórias fechadas no espaço de fase.

Questão 3 (2 val.) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) **(1 val.)** Assinale com um $\mathbf{X}$ no quadrado correspondente à **única** afirmação correta sobre as colunas e/ou linhas da matriz A.

- ☐ As colunas de A são linearmente dependentes;
- ☐ As linhas de A são uma base para $\mathbb{R}^5$;
- ☐ A tem quatro colunas pivot;
- ☐ As linhas de A geram $\mathbb{R}^5$.

(b) **(1 val.)** Quanto às seguintes propriedades da matriz A e/ou da matriz transposta A^T, assinale com um $\mathbf{V}$ o quadrado correspondente a uma afirmação **verdadeira**, e com um $\mathbf{F}$ o quadrado correspondente a uma afirmação **falsa**.

- ☐ A equação $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem infinitas soluções;
- ☐ A equação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível e determinada para todo o $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$;
- ☐ Se A é a matriz que representa uma transformação linear T, então T é injetiva;
- ☐ Se A é a matriz que representa uma transformação linear T, então T é sobrejetiva;

Questão 4 (1 val.) Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$

$$W = \{\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ e } x_1 - x_3 = 0\ \},$$

e o seu complemento ortogonal $W^\perp$ (usando o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$).
Assinale com um $\mathbf{V}$ o quadrado correspondente a uma afirmação que considera **verdadeira**, e com um $\mathbf{F}$ o quadrado correspondente a uma afirmação que considera **falsa** relativamente ao subespaço W ou ao seu complemento ortogonal $W^\perp$.

- ☐ o vetor $(1, 0, 1)$ pertence ao subespaço W;
- ☐ o vetor $(1, 1, 1)$ pertence ao subespaço $W^\perp$;
- ☐ o conjunto $\{(1, 0, -1)\}$ é uma base para $W^\perp$;
- ☐ o subespaço W tem dimensão igual a 2;
- ☐ o subespaço $W^\perp$ tem dimensão igual a 2.

Grupo 2 (14 val.)

Questão 5 (3 val.) Considere os polinómios $\mathbf{p}_1(t) = 1 + t$, $\mathbf{p}_2(t) = 1 - t$, $\mathbf{p}_3(t) = 5$, $\mathbf{p}_4(t) = t + t^2$ e $\mathbf{p}_5(t) = 1 + 2t + t^2$. Seja W o subespaço de P_4 gerado pelo conjunto $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5\}$

(a) (1 val.) Construa, justificando, uma base para W.

(b) (1 val.) Diga, justificando, a dimensão de W.

(c) (1 val.) Escreva o vetor de coordenadas de $\mathbf{p}_6(t) = t - t^2$ na base escolhida na primeira alínea.

Questão 6 (3 val.) Seja $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ com os seguintes vetores próprios

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

associados aos valores próprios 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, respetivamente.

(a) (1.5 val.) Para $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix}$, calcule a solução geral da equação $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$.

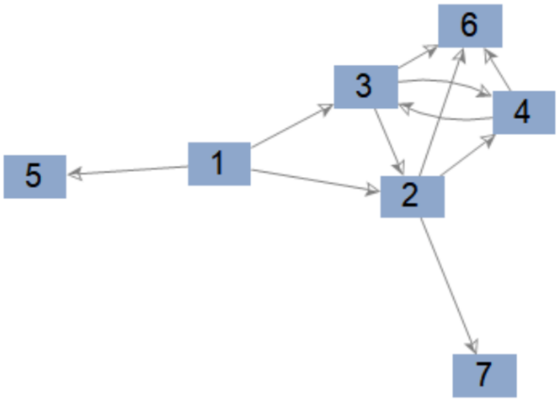
(b) (1.5 val.) Descreva o que acontece à sucessão $\{\mathbf{x}_k\}$ quando $k \to \infty$.

Questão 7 (3 val.) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) (1.5 val.) Para que valores de α e β é que A é uma matriz simétrica? Sabendo que um dos va.p. de A simétrica é o -4, calcule todos os va.p. de A.

(b) (1.5 val.) Diagonalize ortogonalmente A no caso de ser simétrica, ou seja, indique uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tal que $A = PDP^T$.

Questão 8 (2.5 val.) Considere o conjunto de páginas web com os links respetivos que constituem o grafo orientado da figura abaixo.



(a) (1 val.) Escreva a "matriz do Google"deste grafo.

(b) (1 val.) O que significa a afirmação: $\begin{bmatrix} 0.07 & 0.18 & 0.15 & 0.12 & 0.09 & 0.26 & 0.13 \end{bmatrix}^T$ é uma boa aproximação para o vetor do estado estacionário da "matriz do Google"deste grafo?

(c) (0.5 val.) De acordo com a alínea anterior, qual é a página mais popular do conjunto das páginas web. Justifique.

Questão 9 (2.5 val.) Seja A uma matriz $m \times n$ e A^T a sua matriz transposta.

(a) (1 val.) Mostre que tanto $A^T A$, como AA^T, são matrizes simétricas, indicando os seus respetivos tamanhos.

(b) (1.5 val.) Seja $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base ortonormal para $\mathbb{R}^n$ construída com vetores próprios L.I. de $A^T A$. Mostre que todos os valores próprios λ_i, $1 \leq i \leq n$ associados a esses vetores próprios são positivos. (*Sugestão*: pense na norma de um vetor $A^T A\mathbf{v}_i$.)

Ao responder às questões deste exame, o meu nível de confiança geral foi

- ☐ de 0% a 20%
- ☐ de 20% a 40%
- ☐ de 40% a 60%
- ☐ de 60% a 80%
- ☐ de 80% a 100%

Obrigada por responder a esta questão!