TÉCNICO LISBOA

Data: 10 de Fevereiro 2023 (13h00)
Duração: 1h30
Professora: Patricia Conde Muíño

TERMODINÂMICA E FÍSICA ESTATÍSTICA

Exame de Recurso - LMAC 2022-23

VERSÃO - A

O exame terá a duração de 1.5 horas e deve ser resolvido numa folha de ponto devidamente identificada. O exame consiste em 3 problemas com várias alíneas. Leia com atenção o enunciado e justifique claramente as suas respostas em todas as alíneas.

Problema 1

A entropia de um certo gás ideal é dada em função de sua energia interna E e do seu volume V pela seguinte expressão:

$$S = \frac{\nu}{2}\left[\sigma + 5R\ln\frac{E}{\nu} + 2R\ln\frac{V}{\nu}\right]$$

onde σ e R são constantes e ν é o número de moles.

a) [2 valores] Derive a expressão da energia interna em função da temperatura para este gas.

b) [2 valores] Calcule a capacidade calorífica a volume constante para este gás.

c) [2 valores] Derive a relação entre C_p e C_V e calcule C_p.

Problema 2

Um sistema de ar condicionado é constituído por uma máquina de Carnot. Durante o inverno, o aparelho é usado como bomba de calor para aquecer uma sala. Ou seja, o aparelho retira o calor de fora (a uma temperatura mais fria) e o introduz na casa a uma temperatura mais quente. Quando a temperatura externa é de 12°C e a temperatura interna é de 22°C, o aparelho em operação constante retira 10^6 J do exterior por unidade de tempo.

a) [2 valores] Calcule a eficiência ϵ da bomba de calor.

b) [2 valores] Calcule o valor da energia mecânica fornecida ao aparelho e a energia térmica transferida para a sala, por unidade de tempo.

c) [2 valores] Se a sala perde calor a uma taxa $Q = A(T_{int} - T_{ext})$, o mesmo dispositivo (é dizer, o sistema de ar acondicionado a funcionar como uma bomba de calor) deve fornecer 1200 kJ para o interior da sala para manter a temperatura constante em 22 °C, em quanto a temperatura no exterior continua a ser de 12°C. Calcule o valor da constante A.

Problema 3

Considere um sistema composto por N osciladores mecânicos quânticos não interativos em equilíbrio à temperatura T. Os níveis de energia de um único oscilador são

$$\epsilon_m = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\gamma}{V}$$

onde γ é uma constante, V o volume e m um número inteiro positivo ($m = 0, 1, 2, ...$). Assumindo que a temperatura é tão baixa que só estão ocupados os dois níveis de energia mais baixos (é dizer $m = 0$ e $m = 1$):

a) [2 valores] Demonstre que a energia interna de este sistema de N osciladores é
$E = \frac{N\gamma}{2V}\frac{1 + 3e^{-\gamma/(kTV)}}{1 + e^{-\gamma/(kTV)}}$

b) [2 valores] Determine a equação de estado do sistema.

c) [2 valores] A partir de que temperatura a ocupação média do primeiro nível de energia (é dizer, com $m = 1$) é maior ou igual que 10%? Assuma que só os dois níveis de energia mais baixos estão ocupados.

d) [2 valores] Pode este sistema ter temperaturas negativas? Em que condições é que isso pode acontecer?

Exame 2 - TFE - 2022/23

1º Gás ideal $\rightarrow$ $S = \frac{\nu}{2}\left[\sigma + 5R \ln \frac{E}{\nu} + 2R \ln \frac{V}{\nu}\right]$

a) Energia interna em função de T

↳ Eq. do estado

$$\beta = \frac{1}{kT} = \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{\partial k \ln \Omega}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial E}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\nu}{2}\left[5R \cdot \frac{1}{E/\cancel{\nu}} \cdot \frac{1}{\cancel{\nu}}\right] = \frac{5}{2}\frac{\nu R}{E} \Leftrightarrow \boxed{E = \frac{5}{2}\nu R T}$$

b)

$C_V = ?$ $\quad C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V \underset{\text{P}}{=} T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$

Processo quasiestático

Gás ideal $\Rightarrow$ $E = E(T)$ (não depende de V)

$$T dS = dE + dV \Rightarrow V = const \Rightarrow T dS = dE$$

$$C_V = T\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{5}{2}\nu R \Rightarrow \boxed{C_V = \frac{5}{2}\nu R}$$

c) $C_P = C_V + R\nu$ $\Rightarrow$ $C_P = \frac{5}{2}\nu R + \nu R = \frac{7}{2}\nu R$

$$C_p = \left(\frac{\bar{d}Q}{dT}\right)_P \qquad C_v = \left(\frac{\bar{d}Q}{dT}\right)_V$$

→ Por em função de T, P para obter C_p

$$\bar{d}Q = T\,dS = T\left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T dP\right] =$$

$$= C_p\,dT + T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T dP = C_p\,dT - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P T\,dP =$$

$$= C_p\,dT - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP$$

→ precisamos disto em função de T, V para obter C_v

$V \to V(T, P)$

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV$$

$$\bar{d}Q = C_p\,dT - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \cdot \left[\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV\right] =$$

$$= \underbrace{\left[C_p - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\right]}_{C_v} dT + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV$$

$$C_v = C_p - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \Rightarrow C_p = C_v + T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

Gás ideal → $PV = \nu R T \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\nu R T}{V}\right)\right]_V =$

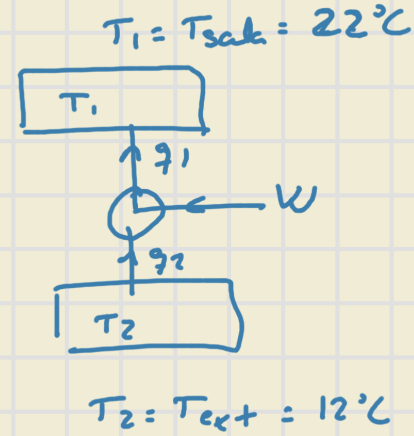
$$= \frac{\nu R}{V}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{\nu R}{P} \Rightarrow C_p = C_v + \underbrace{T\,\frac{\nu R}{P}}_{V} \cdot \frac{\nu R}{V} = C_v + \nu R$$

// q.e.d

2º

Máquina Carnot = reversível



a) $\varepsilon = \dfrac{T_2}{T_1 - T_2} = \dfrac{12 + 273}{22 - 12} =$

$= \dfrac{285}{10} = 28,5$

$\boxed{\varepsilon = 28,5}$

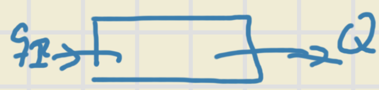
b) W? q_1?

$\varepsilon = \dfrac{q_2}{W} \Rightarrow W = \dfrac{q_2}{\varepsilon} = \dfrac{10^6}{28,5} = 0,035 \cdot 10^6 =$

$= 35 \cdot 10^3 \, J = 35 \, kJ$

$q_1 = W + q_2 = 35 \, kJ + 1000 \, kJ = 1035 \, kJ$

c)



$q_1 = Q$

$1200 \, kJ = A(\underbrace{22°C - 12°C}_{10 \, K}) \Rightarrow A = \dfrac{1200 \, kJ}{10 \, K}$

$\boxed{A = 120 \, kJ/K}$

3º

N osciladores $\rightarrow$ $\varepsilon_m = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\gamma}{V}$

$m=0$, $m=1$ $\rightarrow$ ocupados

a) $\bar{E} = ?$

$$z = e^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{V}\beta} + e^{-\frac{3}{2}\frac{\gamma}{V}\beta} \rightarrow 1 \text{ oscilador}$$

N osciladores $\Rightarrow$ $Z_N = z^N = \left(e^{-\beta\frac{1}{2}\frac{\gamma}{V}} + e^{-\beta\frac{3}{2}\frac{\gamma}{V}}\right)^N$

$$\bar{E} = -\frac{\partial \ln Z_N}{\partial \beta} = -N\frac{\partial \ln z}{\partial \beta} = -N\frac{e^{-\beta\frac{\gamma}{2V}}\cdot\left(-\frac{\gamma}{2V}\right) + e^{-\frac{\beta\gamma 3}{2V}}\cdot\left(-\frac{3\gamma}{2V}\right)}{e^{-\beta\frac{\gamma}{2V}} + e^{-\beta\frac{3\gamma}{2V}}}$$

$$= \frac{N\gamma}{2V}\cdot\frac{e^{-\frac{\beta\gamma}{2V}} + 3e^{-\frac{\beta\gamma 3}{2V}}}{e^{-\frac{\beta\gamma}{2V}} + e^{-\frac{\beta\gamma 3}{2V}}} = \frac{N\gamma}{2V}\cdot\frac{1+3e^{-\frac{\beta\gamma}{V}}}{1+e^{-\beta\gamma/V}}$$

$$\boxed{E = \frac{N\gamma}{2V}\cdot\frac{1+3e^{-\frac{\gamma}{kTV}}}{1+e^{-\frac{\gamma}{kTV}}}}$$

b) $\bar{P} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial Z_N}{\partial V} \Rightarrow$ $Z_N = z^N = \left(e^{-\beta\frac{1}{2}\frac{\gamma}{V}} + e^{-\beta\frac{3}{2}\frac{\gamma}{V}}\right)^N$

$$\bar{P} = \frac{N}{\beta}\frac{\partial \ln z}{\partial V} = \frac{N}{\beta}\frac{e^{-\beta\frac{\gamma}{2V}}\cdot\left(-\frac{\beta\gamma}{2}\cdot\frac{-1}{V^2}\right) + e^{-\beta\frac{3\gamma}{2V}}\cdot\left(-\frac{\beta 3\gamma}{2}\cdot\frac{-1}{V^2}\right)}{e^{-\beta\frac{1}{2}\frac{\gamma}{V}} + e^{-\beta\frac{3}{2}\frac{\gamma}{V}}}$$

$$\bar{P} = \frac{N}{\cancel{\beta}}\frac{\cancel{\beta}\gamma}{2V^2}\frac{e^{-\beta\frac{\gamma}{2V}} + 3e^{-3\beta\gamma/2V}}{\left(e^{-\beta\gamma/2V} + e^{-3\beta\gamma/2V}\right)} \Rightarrow \boxed{\bar{P} = \frac{N\gamma}{2V^2}\frac{1+3e^{-\frac{\gamma}{VkT}}}{1+e^{-\frac{\gamma}{VkT}}}}$$

c) $T \to n_1 = 10\%$?

$$Z = \left(e^{-\beta\frac{1}{2}\frac{\gamma}{V}} + e^{-\beta\frac{3}{2}\frac{\gamma}{V}}\right)$$

$$n_1 = P_1 \cdot N = \frac{e^{-\beta\frac{3\gamma}{2V}}}{e^{-\frac{\beta\gamma}{2V}} + e^{-\frac{\beta\gamma 3}{2V}}} N = \frac{1}{1+e^{-\frac{\beta\gamma}{V}}} N$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{10} \Rightarrow 1+e^{-\frac{\beta\gamma}{V}} = 10 \Rightarrow e^{-\frac{\beta\gamma}{V}} = 9$$

$$\beta\frac{\gamma}{V} = \ln 9 \Rightarrow \frac{1}{kT}\frac{\gamma}{V} = \ln 9 \Rightarrow \boxed{T = \frac{\gamma}{kV\ln 9}}$$

d) As temperaturas negativas podem acontecer quando um certo sistema tem um número máximo de estados (é dizer, que chega um momento no que o número de estados decrece quando a energia aumenta). Em este sistema não se dá esa situação $\Rightarrow$ não pode haver temperaturas negativas.