

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEIC-T, LERC, LEGI E LEE. 1º SEMESTRE 2022/23

INFORMAÇÕES GERAIS

Docente Responsável António Bravo <antonio.j.v.bravo@tecnico.ulisboa.pt>

Programa.

1. **Números reais: revisões e propriedades.** O princípio do supremo. Método de indução.
2. **Funções reais de variável real: limite e continuidade.** Funções elementares (módulo, polinómios, raiz de índice n , funções trigonométricas e hiperbólicas, função exponencial e logaritmo). Funções inversas (incluindo inversas trigonométricas e hiperbólicas) Propriedades globais de funções contínuas: o Teorema do Valor Intermédio e de Weierstrass.
3. **Cálculo diferencial em \mathbb{R} .** O conceito de derivada; derivadas das funções elementares. Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy. Regra de l'Hôpital. Derivadas de ordem superior. Polinómio de Taylor.
4. Primitivação: primitivas imediatas e quase-imediatas; primitivação por partes e por substituição; primitivas de funções racionais. Equações Diferenciais Ordinárias.
5. **Cálculo integral em \mathbb{R} .** Integral de Riemann; teorema fundamental do cálculo e fórmula de Barrow; fórmulas de integração por partes e por substituição. Aplicações: cálculo de áreas, definição de funções.
6. **Sucessões e séries numéricas.** convergência; sucessões e séries geométricas; critérios de comparação; séries absolutamente convergentes; séries de potências; séries de Taylor.

1. SUCESSÕES E SÉRIES

Conteúdo

A. SUCESSÕES	2
A1. Introdução e exemplos.	2
A2. Limite de uma Sucessão	3
A3. Propriedades do Limite de Sucessões	5
A4. Sucessões Monótonas e Limitadas	6
A5. Escala de Sucessões	7
B. SÉRIES NUMÉRICAS	9
B1. Introdução e exemplos	9
B2. Operações algébricas sobre séries	12
B3. Condição necessária para convergência	13
B4. Séries de Termos Não-Negativos e Critérios de Convergência	14
B5. Convergência Simples e Absoluta	20
B6. Séries Alternadas e Critérios de Convergência	21
C. SÉRIES DE POTÊNCIAS	23
C1. Definições e resultados gerais	23
C2. Séries de Taylor	28

A. SUCESSÕES.

A1. Introdução e exemplos. Uma sucessão real não é mais do que uma sequência infinita de números reais, como por exemplo

$$2, 21, 3001, 3, 2, 5, \dots$$

Usa-se normalmente o conjunto \mathbb{N} dos números naturais para indexar os termos dessa sequência:

$$u(1) = 2, u(2) = 21, u(3) = 3001, u(4) = 3, u(5) = 2, u(6) = 5, \dots$$

Temos assim a seguinte:

Definição 1.1

Uma **sucessão real** é uma função de domínio \mathbb{N} :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n). \end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, designaremos $u(n)$ por **termo geral** ou **termo de ordem** n da sucessão u , representando-o normalmente por u_n . Para o exemplo acima, escrevemos:

$$u_1 = 2, u_2 = 21, u_3 = 3001, u_4 = 3, u_5 = 2, u_6 = 5, \dots$$

Usaremos qualquer dos símbolos u , $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (u_n) para representar uma mesma sucessão real.

Existem várias maneiras de explicitar exemplos particulares de sucessões reais, como se ilustra de seguida.

Exemplo 1.2

Uma sucessão real pode ser definida através de uma fórmula explícita para o seu termo geral. Por exemplo:

$$\begin{aligned} u_n &= 3 && (3, 3, 3, \dots); \\ u_n &= 2 + 3n && (5, 8, 11, \dots); \\ u_n &= 3 \cdot 2^n && (6, 12, 24, \dots). \end{aligned}$$

Há duas classes muito importantes de sucessões reais, cuja definição pode ser feita usando uma fórmula explícita para o seu termo geral.

Exemplo 1.3: Progressões aritméticas

Progressões aritméticas são sucessões caracterizadas pelo facto de

$$u_{n+1} - u_n = \text{constante}, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

O seu termo geral é da forma

$$u_n = a + (n - 1)r,$$

onde $a, r \in \mathbb{R}$ são respectivamente o **primeiro termo** e **razão** da progressão aritmética (u_n) (notem que a diferença $u_{n+1} - u_n = r$ é, de facto, constante).

A sucessão $u_n = 2 + 3n$, do Exemplo 1.2, é uma progressão aritmética, com primeiro termo $a = 5$ e razão $r = 3$.

Exemplo 1.4: Progressões geométricas

Progressões geométricas são sucessões caracterizadas pelo facto de

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \text{constante}, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

O seu termo geral é da forma

$$u_n = a \cdot r^{n-1},$$

onde $a, r \in \mathbb{R}$ são respectivamente o **primeiro termo** e **razão** da progressão geométrica (u_n) (notem que o quociente $u_{n+1}/u_n = r$ é de facto constante).

A sucessão $u_n = 3 \cdot 2^n$ do Exemplo 1.2, é uma progressão geométrica, com primeiro termo $a = 6$ e razão $r = 2$.

Exemplo 1.5: Sucessões definidas por recorrência

O termo geral de uma sucessão real pode também ser definido por **recorrência**. Um exemplo famoso é dado pela **sucessão de Fibonacci**:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 = 1, \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

cuja lista de termos é pois:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$$

Exercício 1.1. Defina progressões aritméticas e geométricas **por recorrência**, com primeiro termo $a \in \mathbb{R}$ e razão $r \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.6

Sucessões reais podem também ser definidas por uma regra clara que permita identificar, um a um, todos os seus termos. Um exemplo é a sucessão de todos os números naturais primos, i.e. a sucessão (u_n) cuja lista de termos é

$$(1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots).$$

Não se conhece uma fórmula em termos de funções elementares que forneça o termo geral desta sucessão.

A2. Limite de uma Sucessão.

Intuitivamente, dizemos que uma sucessão (u_n) tem por *limite* o número real $a \in \mathbb{R}$ se eventualmente todos os termos da sucessão (u_n) se aproximam de $a \in \mathbb{R}$. De uma forma matematicamente mais precisa, temos a seguinte

Definição 1.7

A sucessão real (u_n) diz-se **convergente** para o número real $a \in \mathbb{R}$, ou que possui **limite** a , se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon.$$

Neste caso, escrevemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \quad \text{ou} \quad \lim u_n = a \quad \text{ou ainda} \quad u_n \rightarrow a.$$

A sucessão real (u_n) diz-se **convergente** para $+\infty$ (resp. $-\infty$), ou que possui **limite** $+\infty$ (resp. $-\infty$), se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : (n > N \Rightarrow u_n > \frac{1}{\varepsilon}) \quad (\text{resp. } n > N \Rightarrow u_n < -\frac{1}{\varepsilon}).$$

Nestes casos escrevemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim u_n = \pm\infty \quad \text{ou ainda} \quad u_n \rightarrow \pm\infty.$$

Exemplo 1.8

Vamos provar que $u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Suponhamos dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário. Existe um natural $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{N} < \varepsilon$. É imediato verificar que

$$n > N \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon,$$

provando-se assim que, de facto,

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Nota 1.2. Observem que, se pensarmos numa sucessão (u_n) como uma função $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, então a definição de limite de sucessões coincide precisamente com a noção de limite de funções que estudámos anteriormente, i.e., temos que

$$\lim u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u(n).$$

Proposição 1.9

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}},$$

então a sucessão $u_n := f(n)$ é convergente e $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$.

Demonstração. Recordando o conceito de limite relativo de uma função, é claro que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \in \mathbb{N}}} f(x). \quad \square$$

Esta proposição reduz muitas vezes o cálculo de limites de sucessões ao cálculo de limite de funções.

Exemplo 1.10

(1) Para mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

observamos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(1+1/x)} = e^1 = e,$$

pois

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + 1/x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{RC}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1/(1+y)}{1} = 1.$$

(2) Seja $0 < a < 1$. Para mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0,$$

observamos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln a} = 0,$$

pois $\ln a < 0$.

Exercício 1.3. Completam este exemplo mostrando que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} \text{não existe, se } a \leq -1, \\ 0, & \text{se } |a| < 1, \\ 1, & \text{se } a = 1, \\ +\infty, & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

A3. Propriedades do Limite de Sucessões.

A correspondência entre limites de sucessões e limites de funções leva a que muitas das propriedades dos limites de funções se estendam imediatamente a propriedades de limites de sucessões. Por exemplo, o limite de uma sucessão, quando existe é único. Listamos de seguida outras propriedades básicas, que vocês devem também verificar.

Teorema 1.11: Limites e Propriedades Algébricas

Se $u_n \rightarrow a$, $v_n \rightarrow b$, $w_n \rightarrow c$ com $w_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e se $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante, então:

- (i) $(u_n \pm v_n) \rightarrow a \pm b$ (limite da soma = soma dos limites);
- (ii) $(u_n \cdot v_n) \rightarrow a \cdot b$ (limite do produto = produto dos limites);
- (iii) $(u_n/w_n) \rightarrow a/c$ (limite do quociente = quociente dos limites);
- (iv) $(\alpha \cdot u_n) \rightarrow \alpha \cdot a$.

Com as convenções introduzidas no Capítulo 2 (secção **Operações algébricas na reta acabada e resultados sobre limites**) estes resultados são válidos para $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$, excepto no caso em que temos uma indeterminação.

Exemplo 1.12

Usando as propriedades algébricas do limite, especificadas no Teorema 1.11:

$$\lim \frac{3n+2}{n+1} = \lim \frac{n \cdot (3 + \frac{2}{n})}{n \cdot (1 + \frac{1}{n})} = \lim \frac{3 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{3+0}{1+0} = 3,$$

onde usámos e o facto de que $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Teorema 1.13: Limites e Relação de Ordem

Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões convergentes tais que $u_n \leq v_n$ para $n > N$, então.

$$\lim u_n \leq \lim v_n.$$

Exemplo 1.14

Para as sucessões

$$u_n := \text{sen}(1/n) \text{ e } v_n := \text{sen}(1/n) + 1/n^2$$

temos que $u_n \leq v_n$. Logo os seus limites, caso existam, satisfazem $\lim u_n \leq \lim v_n$. Na verdade, estas sucessões convergem e podemos calcular facilmente estes limites:

$$\begin{aligned} \lim \text{sen} \left(\frac{1}{n} \right) &= 0, \text{ pois } \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) = \text{sen}(0) = 0, \\ \lim \left[\text{sen} \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n^2} \right] &= 0, \text{ pois } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x^2} \right] = \text{sen}(0) + 0 = 0. \end{aligned}$$

Notem que apesar de $u_n < v_n$ temos $\lim u_n = \lim v_n = 0$.

Teorema 1.15: Princípio do Encaixe ou da Sucessão Enquadrada

Sejam (u_n) , (v_n) e (w_n) sucessões reais para as quais existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Se (u_n) e (w_n) são convergentes com $\lim u_n = a = \lim w_n$, então (v_n) também é convergente e $\lim v_n = a$.

Exemplo 1.16

Para determinar $\lim \frac{(-1)^n}{n}$, observemos que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Como $\lim -\frac{1}{n} = 0 = \lim \frac{1}{n}$, concluímos pelo Princípio do Encaixe que

$$(2) \quad \lim \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Nota 1.4. É altura de ir ao final do Capítulo 2 ler ou reler o **Material Extra: Equivalência entre as definições de limite segundo Heine e segundo Cauchy** e ver em particular o Teorema ??, onde se explica a equivalência entre a definição de continuidade (segundo Heine) que deram no secundário, e que usa sucessões, e a definição à Cauchy que vimos pela primeira vez nesta cadeira, que usa $\varepsilon - \delta$.

A4. Sucessões Monótonas e Limitadas.

Os resultados que vimos anteriormente permitem calcular os limites de muitas sucessões a partir de manipulações no seu termo geral. No entanto, por vezes, estamos interessados em saber se uma dada sucessão é ou não convergente, sem entrar numa análise detalhada do seu termo geral. Vamos agora estudar critérios gerais que permitem decidir se uma sucessão é convergente.

As seguintes definições são inteiramente análogas ao que se passa com funções (recordem que uma sucessão real $u = (u_n)$ não é mais que uma função $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$).

Definição 1.17

Seja (u_n) uma sucessão real. Então:

- (i) (u_n) diz-se **crecente** (resp. **estritamente crescente**) se $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n < u_{n+1}$) para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) (u_n) diz-se **decrecente** (resp. **estritamente decrescente**) se $u_n \geq u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$) para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (iii) (u_n) diz-se **majorada** se existir $M \in \mathbb{R}$ tal que $u_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (iv) (u_n) diz-se **minorada** se existir $m \in \mathbb{R}$ tal que $u_n \geq m$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Uma sucessão diz-se **monótona** (resp. **estritamente monótona**) se for crescente ou decrescente (resp. estritamente crescente ou decrescente). Uma sucessão diz-se **limitada** se for majorada e minorada.

Exercício 1.5. Mostre que, se uma sucessão (u_n) é convergente, então é limitada.

Notem que uma sucessão limitada pode não ser convergente: a sucessão $u_n = (-1)^n$ é claramente limitada, mas não é convergente. No entanto, temos o seguinte resultado, que já conhecem desde o secundário mas que só após o que vimos nesta disciplina podemos demonstrar com rigor. Notem da demonstração como, tal como foi dito de forma mais vaga no Capítulo 1, este resultado é uma consequência do Princípio do Supremo!

Teorema 1.18

Seja (u_n) uma sucessão real.

- (i) Se (u_n) é crescente e majorada então é convergente e

$$\lim u_n = \sup \{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

- (ii) Se (u_n) é decrescente e minorada então é convergente e

$$\lim u_n = \inf \{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Em particular, **toda a sucessão monótona e limitada é convergente.**

Demonstração. Faremos o caso em que (u_n) é crescente e majorada (o caso em que (u_n) é decrescente e minorada é completamente análogo).

Como a sucessão (u_n) é majorada, temos (pelo Princípio do Supremo) que existe

$$a = \sup \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Queremos portanto provar que

$$u_n \rightarrow a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : (n > N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon).$$

Seja então dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário. Pela Proposição ??, existe algum u_N tal que $a - \varepsilon < u_N \leq a$. Como (u_n) é crescente, vemos que para todo $n > N$:

$$u_N \leq u_n \leq a \Rightarrow a - \varepsilon < u_n \leq a.$$

Temos então que

$$|u_n - a| < \varepsilon \text{ para todo } n > N,$$

como se pretendia mostrar. □

Nota 1.6. Decidir se uma dada sucessão monótona é ou não limitada pode ser um problema difícil. Por exemplo, tentem decidir se a seguinte sucessão crescente é ou não majorada:

$$1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \dots$$

A5. Escala de Sucessões. Suponhamos que $u_n, v_n \rightarrow +\infty$. Tal como para funções, também o limite

$$\lim \frac{u_n}{v_n}$$

é uma indeterminação (do tipo $\frac{\infty}{\infty}$). O resultado depende da “velocidade” com que u_n e v_n vão para infinito. Tal como já foi visto para funções, também para sucessões. Terminamos esta breve incursão pelas sucessões

Em geral, se $u_n, v_n > 0$, dizemos que

$$u_n \ll v_n \quad \text{se} \quad \lim \frac{u_n}{v_n} = 0 \rightarrow +\infty \text{ (ou, equivalentemente, } \lim \frac{v_n}{u_n} = +\infty \text{)}.$$

Diz-se nesta situação que u_n é desprezável em relação a v_n , ou que u_n é muito menor que v_n . Quando $u_n, v_n \rightarrow +\infty$ e $u_n \ll v_n$, isso significa (informalmente) que v_n vai para mais infinito “muito mais depressa” que u_n .

Teorema 1.19: Escala de sucessões

Escala de sucessões: se $p > 0$ e $a > 1$, então

$$\ln n \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n.$$

Vamos usar o seguinte lema na prova de todas as afirmações; note-se no entanto que as duas primeiras podem fazer-se com recurso à Regra de Cauchy e ao estudo de funções (combine-se (??) com a Proposição 1.9).

Proposição 1.20

Seja $a_n > 0$. Se

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = L,$$

então

- (1) se $L > 1$ então $\lim u_n = +\infty$;
- (2) se $L < 1$ então $\lim u_n = 0$.

Se $L = 1$ nada se pode concluir.

Demonstração da Proposição 1.20. Note-se em primeiro lugar que, para qualquer sucessão convergente $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, temos $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$ (porquê?). Por outro lado se $a_n = n \rightarrow +\infty$ ou $a_n = 1/n \rightarrow 0$, também temos $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$. Em particular, vemos que se $L = 1$ nada se pode concluir acerca de $\lim a_n$.

Para (1): se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1$, então $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ para n suficientemente grande, logo a_n é crescente, a partir de determinada ordem $n > N$. Se a_n fosse majorada, seria convergente $a_n \rightarrow a > 0$ (já que a_n é crescente e positiva) e nesse caso tínhamos $L = 1$ - o que é contrário ao assumido. Assim a_n é não majorada e como é crescente para $n > N$, tem-se $a_n \rightarrow +\infty$.

Para (2): se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, toma-se $b_n = \frac{1}{a_n}$ e aplica-se (1) a b_n . □

Demonstração do Teorema 1.19.

- (i) $\lim \frac{n^p}{a^n} = 0$ porque fazendo $u_n = \frac{n^p}{a^n}$, temos $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{a} < 1$ para $a > 1$.

Usando uma mudança de variável, deste resultado segue também que $\lim \frac{\ln n}{n^p} = 0$.

- (ii) $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ porque fazendo $u_n = \frac{a^n}{n!}$, temos

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim \frac{a^{n+1}}{a^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{a}{n+1} = 0 < 1.$$

(iii) $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$ porque fazendo $u_n = \frac{n!}{n^n}$, temos

$$\begin{aligned} \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.21

- (1) $\lim \frac{1,00001^n}{n^{10000}} = +\infty$ directamente da escala de sucessões $n^p \ll a^n$ para $a > 1, p > 0$.
- (2) $\lim \frac{2^{2n} + n^3}{5^n + n^2} = \lim \frac{2^{2n} \left(1 + \frac{n^3}{2^{2n}} \right)}{5^n \left(1 + \frac{n^2}{5^n} \right)} = \lim \left(\frac{4}{5} \right)^n = 0$
- (3) $\lim \frac{2^n + n^5}{n! + 1} = 0$ (complete os detalhes)
- (4) $\lim \frac{n^n}{n! + 100^n} = +\infty$ (complete os detalhes)
- (5) $\lim \frac{n^5 2^n}{n! + 1} = 0$. Não sai da escala de sucessões directamente - aplica-se a Proposição 1.20 visto acima.
- (6) $\lim \frac{n^n}{3^n n!} = 0$: também não sai da escala de sucessões directamente.
Em geral: $\lim \frac{n^n}{a^n n!} = 0$, se $a > e$ e $\lim \frac{n^n}{a^n n!} = +\infty$, se $a < e$.

B. SÉRIES NUMÉRICAS.

B1. Introdução e exemplos.

O tema que agora vamos iniciar é motivado pelo seguinte problema: dada uma sucessão real (u_k) , determinar quando é que é possível atribuir significado preciso à *soma de todos os elementos da sucessão* (u_k) :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

Não definimos ainda uma soma com um número infinito de parcelas. Podemos no entanto definir as **somas parciais**:

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1, \\ s_2 &= u_1 + u_2, \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ &\vdots \\ s_k &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

e definir a soma de todos os termos da sucessão como o $\lim s_k$. É claro que este limite pode ou não existir.

Definição 1.22: Séries

Uma sucessão (u_n) diz-se **somável** se a sucessão (s_k) das somas parciais:

$$s_k := u_1 + \cdots + u_k = \sum_{n=1}^k u_n,$$

é convergente com limite finito. Usaremos a notação

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \equiv u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots$$

a que chamamos **série**. Quando a sucessão (u_n) é somável dizemos que a **série é convergente** e que a sua soma é $\lim s_n$. Caso contrário dizemos que a **série é divergente**.

Exemplo 1.23

Consideremos a série:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Será que esta série diverge ou converge? Para isso consideramos a sucessão das somas parciais:

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, \\ s_1 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}, \\ s_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}, \\ &\vdots \\ s_k &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^k}. \end{aligned}$$

Podem verificar esta última fórmula por indução. Como temos:

$$\lim s_k = \lim \frac{2^{k+1} - 1}{2^k} = \lim \left(2 - \frac{1}{2^k} \right) = 2,$$

concluimos que a série é convergente e a sua soma é igual a 2.

Este é um caso particular do seguinte:

Séries Geométricas

Suponhamos que (u_n) é uma progressão geométrica com primeiro termo igual a 1 e razão $r \in \mathbb{R}$, i.e., $u_n := r^n$, $(n \in \mathbb{N}_0)$. A série correspondente é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

Séries deste tipo são designadas por **séries geométricas**. A sucessão das somas parciais é dada por (vejam o ??):

$$s_k = \sum_{n=0}^k u_n = \sum_{n=0}^k r^n = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \text{ e } r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Logo, se $|r| < 1$, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$

Portanto a série é convergente quando $|r| < 1$, e a sua soma é:

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}, \quad (|r| < 1).$$

O Exemplo 1.23 corresponde ao caso $r = 1/2$. Para a descrição completa da convergência ou divergência para um $r \in \mathbb{R}$ arbitrário, veja-se (6) à frente.

Nota 1.7. Notem que (se $|r| < 1$) e começarmos a somar a partir de $n = 1$, o resultado é:

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n - 1 = \frac{1}{1 - r} - 1 = \frac{r}{1 - r}, r^n = \frac{r}{1 - r}.$$

Exemplo 1.24

Consideremos a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Esta série diverge, pois a sucessão das somas parciais é dada por:

$$\begin{aligned} s_1 &= -1, \\ s_2 &= -1 + 1 = 0, \\ s_3 &= -1 + 1 - 1 = -1, \\ s_4 &= -1 + 1 - 1 + 1 = 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

que é uma sucessão divergente.

Séries de Mengoli ou Telescópicas.

São séries em que a sucessão de somas parciais se pode calcular usando a propriedade telescópica dos somatórios (relembrar Capítulo 1), por exemplo da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}).$$

Neste caso, temos

$$s_k = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_{k-1} - b_k) + (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{k+1}$$

(é a propriedade telescópica dos somatórios) logo a série é convergente $\Leftrightarrow s_k$ é convergente $\Leftrightarrow b_1 - b_{k+1}$ é convergente $\Leftrightarrow b_n$ é convergente e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = \lim (b_1 - b_{n+1}) = b_1 - \lim b_n.$$

Mais geralmente, se tivermos uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+p})$$

para algum $p \in \mathbb{N}$, a série converge se b_n é convergente em \mathbb{R} e $s_k = b_1 + \dots + b_p - b_{k+1} - \dots - b_{k+p}$, donde a soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+p}) = b_1 + \dots + b_p - p \lim b_n$$

Exemplo 1.25

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$: série de Mengoli da forma $\sum (b_n - b_{n+1})$ em que $b_n = \frac{1}{n}$. Como $\lim b_n = 0$ existe em \mathbb{R} , temos que a série é convergente e a sua soma é

$$s = b_1 - \lim b_n = 1.$$

- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \left(\frac{\pi}{n} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{n+1} \right) \right)$: série de Mengoli da forma $\sum (b_n - b_{n+1})$ em que $b_n = \cos \left(\frac{\pi}{n} \right)$. Como $\lim b_n = \cos 0 = 1$ existe em \mathbb{R} , temos que a série é convergente e a sua soma é

$$s = b_1 - \lim b_n = \cos \pi - 1 = -2.$$

- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \right)$: Mengoli da forma $\sum (b_{n+1} - b_n) = -\sum (b_n - b_{n+1})$, convergente, $s = -(b_1 - \lim b_n) = -1/2 + 1 = 1/2$.

- (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n) - \ln(n+1))$: série de Mengoli da forma $\sum (b_n - b_{n+1})$ em que $b_n = \ln(n)$. Como $\lim b_n = +\infty$, temos que a série é divergente. (Teríamos $s_k = b_1 - b_{k+1} = \ln 1 - \ln(k+1) \rightarrow -\infty$.)

- (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$: para ver que é de Mengoli, podemos escrever

$$\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+3} = \frac{An + 3A + Bn + B}{(n+1)(n+3)}$$

logo $A = -B = 1/2$ e temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right),$$

série de Mengoli da forma $\sum (b_n - b_{n+2})$, em que $b_n = \frac{1}{n+1}$. Como $\lim b_n = 0$, temos que a série é convergente e a sua soma é

$$s = b_1 + b_2 - 2 \lim b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{5}{6}.$$

Nota 1.8. É fácil ver que a natureza de uma série não depende de um número **finito** de valores - embora a sua soma sim!. Ou seja, se $u_n = v_n$ para $n \neq n_1, \dots, n_p$, então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge. Em particular, as primeiras p parcelas são irrelevantes para determinar a natureza da série (mas não para determinar a sua soma!) **É isso que justifica que por vezes passemos a escrever apenas $\sum_n u_n$ ou até $\sum u_n$ para designar uma série, sem especificar os índices.**

B2. Operações algébricas sobre séries.

É um exercício muito simples mostrar, a partir da definição, as seguintes operações algébricas sobre séries convergentes:

Proposição 1.26: Soma e multiplicação por escalar

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries convergentes e $c \in \mathbb{R}$.

Então, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n)$ também são convergentes e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Exemplo 1.27

Consideremos a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$$

Tendo em conta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3}{3^n} = 6 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

vemos que a série é geométrica com razão $r = 1/3$. Concluimos assim que se trata de uma série convergente, pois $|r| = 1/3 < 1$, e podemos usar a fórmula (4) para calcular a sua soma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 6 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 6 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

B3. Condição necessária para convergência.

Em geral, dada uma série, é difícil calcular a sucessão das somas parciais e verificar se converge ou não. Precisamos pois de critérios que permitam decidir facilmente se uma série converge ou diverge.

Teorema 1.28: Condição necessária para convergência

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ convergente} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Demonstração. Sendo a série convergente, sabemos então que a sucessão de somas parciais

$$s_k = \sum_{n=1}^k u_n$$

é convergente com limite finito: $\lim s_k = l \in \mathbb{R}$. Temos então

$$\begin{aligned} 0 = l - l &= \lim_{k \rightarrow \infty} s_k - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{k-1} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^k u_n - \sum_{n=1}^{k-1} u_n \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k. \end{aligned} \quad \square$$

Importância prática deste resultado: O Teorema 1.28 pode ser usado como critério de divergência para séries numéricas, pois o seu resultado é logicamente equivalente ao seguinte:

$$(5) \quad u_n \not\rightarrow 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ divergente.}$$

Por exemplo, no caso das séries geométricas, tendo em conta que

$$r^n \not\rightarrow 0 \text{ quando } |r| \geq 1$$

e que séries geométricas são convergente quando $|r| < 1$, isso permite-nos concluir que

Classificação de séries geométricas.

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n \text{ é } \begin{cases} \text{convergente (com soma } \frac{1}{1-r}), & \text{se } |r| < 1; \\ \text{divergente,} & \text{se } |r| \geq 1. \end{cases}$$

Nota 1.9. A implicação contrária à especificada no Teorema 1.28 não é verdadeira, ou seja, podemos ter $u_n \rightarrow 0$ e ainda assim a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ divergente.

Um exemplo é dado por $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ em que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge:

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \rightarrow +\infty.$$

As séries da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

chamam-se **séries de Dirichlet**, e a sua natureza depende de α . Usando o mesmo argumento que acima, pode ver-se que divergem se $0 < \alpha < 1$ (se $\alpha \leq 0$ também divergem, porquê?). Veremos á frente que se $\alpha > 1$ então a série converge.

O caso $\alpha = 1$, ou seja tomando a sucessão $u_n = \frac{1}{n}$ converge para 0, mas a série correspondente é a chamada **série harmónica** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que, como veremos adiante, é divergente.

B4. Séries de Termos Não-Negativos e Critérios de Convergência.

Séries de termos não-negativos (STNN) são séries da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{com } a_n \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Proposição 1.10. Uma STNN $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se e só se a sua sucessão de somas parciais (s_k) for majorada.

Demonstração. Por definição, a série é convergente se e só se a sucessão das somas parciais $s_k = \sum_{n=1}^k a_n$ for convergente. Como

$$s_{k+1} - s_k = a_{k+1} \geq 0,$$

vemos que a sucessão (s_k) é monótona crescente. Logo, segue do Exercício 1.5 e do Teorema 1.18 que (s_k) é convergente se, e só se, for majorada. \square

Este resultado **não é muito útil na prática**, pois pode ser difícil verificar se a sucessão de somas parciais é ou não majorada. Vejam o exemplo da Nota 1.6, que não é mais do que a sucessão de somas parciais da série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ referida na Nota 1.9. No entanto leva a um critério muito útil.

Teorema 1.29: Critério Geral de Comparação para STNN

Sejam (a_n) e (b_n) duas sucessões reais tais que

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Então:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} &\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_n \text{ converge;} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge} &\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge.} \end{aligned}$$

Demonstração. Sejam (s_k) e (t_k) as sucessões de somas parciais das séries dadas, i.e.

$$s_k = \sum_{n=1}^k a_n \quad \text{e} \quad t_k = \sum_{n=1}^k b_n.$$

Temos naturalmente que

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq s_k \leq t_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Usando a Proposição 1.10, podemos então concluir que:

- $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow (t_k)$ majorada $\Rightarrow (s_k)$ majorada $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge.
- $\sum_n a_n$ diverge $\Rightarrow (s_k)$ não-majorada $\Rightarrow (t_k)$ não-majorada $\Rightarrow \sum_n b_n$ diverge. \square

Nota 1.11. Nas condições do Teorema 1.29, ou seja assumindo que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, as implicações contrárias às especificadas **não são verdadeiras**. Assim, em geral,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge} \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge.}$$

Exemplo 1.30

- (1) O critério de comparação para STNN permite, por vezes, mostrar a convergência de uma série cujo termo geral é muito complicado, como no seguinte exemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \operatorname{sen}^3(n+1)}{3^{n-1} + n^2}.$$

Como temos:

$$0 \leq \frac{1 + \operatorname{sen}^3(n+1)}{3^{n-1} + n^2} \leq \frac{2}{3^{n-1}},$$

e já sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$ converge (vejam o Exemplo 1.27), concluímos que a série original converge. Pensem no que é que podemos dizer sobre a soma desta série.

(2) $\sum \frac{1}{3^n + n}$ é convergente do critério de comparação, já que

$$0 < \frac{1}{3^n + n} < \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

e a série $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ é convergente, por ser geométrica de razão $r = 1/3 \in]-1, 1[$.

(3) $\sum \frac{1 + (-1)^n}{2^n + 1}$ é convergente do critério de comparação, já que

$$0 \leq \frac{1 + (-1)^n}{2^n + 1} < \frac{2}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

e a série $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ é convergente, por ser geométrica de razão $r = 1/2 \in]-1, 1[$.

Teorema 1.31: Outro Critério de Comparação para STNN

Sejam (a_n) e (b_n) duas sucessões reais de termos positivos, tais que

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = L \text{ com } 0 < L < +\infty.$$

Então, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são da mesma natureza, i.e., ou ambas convergem ou ambas divergem.

Demonstração. A hipótese

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = L \text{ com } 0 < L < +\infty,$$

garante que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Rightarrow \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 2L \Rightarrow \frac{L}{2} \cdot b_n < a_n < 2L \cdot b_n.$$

Basta agora aplicar o Critério Geral de Comparação do Teorema 1.29 a estas desigualdades. \square

Exercício 1.12. O que é que se pode dizer quando $L = 0$ ou $L = +\infty$? **Escrevam o teorema que corresponde a estes dois casos!**

Exemplo 1.32

Queremos determinar a natureza da série

$$\sum \frac{1}{3^n - 2^n}.$$

Tendo em conta a ordem de grandeza do termo geral desta série, é natural compará-la com a série geométrica $\sum 1/3^n$. De facto, como

$$\lim \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n - 2^n}} = \lim \frac{3^n - 2^n}{3^n} = 1 - \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - 0 = 1 \text{ e } 0 < 1 < +\infty,$$

sabemos pelo Teorema 1.31 que as séries são da mesma natureza. Como a série geométrica $\sum \frac{1}{3^n}$ de razão $r = 1/3 < 1$ converge, concluímos que a série $\sum \frac{1}{3^n - 2^n}$ também converge.

Para aplicar o critério de comparação, é útil usar a notação $u_n \sim v_n$ se $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$ (informalmente, u_n e v_n são semelhantes / têm o “mesmo comportamento” no infinito). Assim, no exemplo

anterior, usámos o facto de

$$\frac{1}{3^n - 2^n} \sim \frac{1}{3^n}.$$

Para aplicar o critério de comparação também é útil e essencial recordar a escala de sucessões: para $a > 1$ e $p > 0$,

$$\ln n \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n.$$

Exemplo 1.33

(1) $\sum \frac{1}{3^n - n}$ é convergente: de facto $\frac{1}{3^n - n} \sim \frac{1}{3^n}$, ou seja

$$\lim \frac{\frac{1}{3^n - n}}{\frac{1}{3^n}} = \lim \frac{3^n}{3^n - n} = 1,$$

logo a série é da mesma natureza que $\sum \frac{1}{3^n}$, que converge por ser uma série geométrica de razão $r = 1/3 \in (-1, 1)$.

(2) $\sum \frac{2^n + 3}{3^n + 2}$ converge, da mesma forma, notando que $\frac{2^n + 3}{3^n + 2} \sim \frac{2^n}{3^n}$.

(3) $\sum_{+\infty \neq 0} \frac{4^n - n}{3^n - n^2}$ diverge, da mesma forma, notando que $\frac{4^n - n}{3^n - n^2} \sim \frac{4^n}{3^n}$.

(EM ALTERNATIVA, poderíamos simplesmente observar que

$$\lim \frac{4^n - n}{3^n - n^2} = \lim \frac{4^n}{3^n} \frac{1 - n/4^n}{1 - n^2/3^n} = +\infty$$

e invocar o critério de divergência (5))

Como vemos, para aplicar este critério precisamos de ter séries de referência, ou seja séries que saibamos à partida que convergem ou divergem. Já vimos:

- Séries Geométricas: $\sum r^n$ converge $\Leftrightarrow -1 < r < 1$;
- Séries de Mengoli: $\sum (b_n - b_{n+1})$ converge $\Leftrightarrow b_n$ é convergente (em \mathbb{R}).

Veremos mais à frente:

- Séries de Dirichlet: $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Por agora, mais três critérios:

Teorema 1.34: Critério da Razão (ou de D'Alembert) para STNN

Seja $\sum_n a_n$ uma série numérica, com $a_n > 0$ e tal que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Então:

- (a) se $r < 1$ a série $\sum_n a_n$ converge;
- (b) se $r > 1$ a série $\sum_n a_n$ diverge.

Demonstração. Suponhamos que $r < 1$. Se escolhermos $r < s < 1$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < s, \quad \forall n \geq N.$$

Logo:

$$a_{N+n} \leq s a_{N+n-1} \leq s^2 a_{N+n-2} \leq \dots \leq s^n a_N.$$

Como $s < 1$ a série geométrica $\sum_n a_N s^n = a_N \sum_n s^n$ converge. Pelo Critério Geral de Comparação para STNN, concluímos que a série $\sum_n a_n$ também converge.

Suponhamos agora que $r > 1$. Neste caso, se escolhermos $1 < s < r$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > s, \quad \forall n \geq N.$$

Isto mostra que:

$$a_{N+n} \geq s a_{N+n-1} \geq s^2 a_{N+n-2} \geq \cdots \geq s^n a_N \geq a_N,$$

donde $\lim a_n \neq 0$ e a série $\sum_n a_n$ diverge. \square

Exemplo 1.35

Seja $r > 0$ e suponha-se que queremos determinar a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}.$$

Fazendo $a_n = \frac{r^n}{n!}$, temos então que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{r^n}{n!}} = \frac{r}{n+1} = 0 < 1.$$

Concluímos pelo Critério da Razão que, qualquer que seja $r > 0$, a série dada é convergente.

Nota 1.13. O critério da razão nada diz quando $r = 1$. Por exemplo, para a série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e para a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ temos, em ambos os casos, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Como veremos de seguida, a série harmónica diverge enquanto a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Teorema 1.36: Critério da raiz (ou de Cauchy)

Seja $u_n \geq 0$ e $\lim \sqrt[n]{u_n} = r$:

- (a) se $0 \leq r < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge,
- (b) se $r > 1$ então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge. (Se $r = 1$, nada se conclui.)

Demonstração. Se $\lim \sqrt[n]{a_n} = r < 1$, então para algum $\varepsilon > 0$ com $r + \varepsilon < 1$, temos para $n > p$, $\sqrt[n]{a_n} < r + \varepsilon < 1 \Rightarrow a_n < (r + \varepsilon)^n$, e (i) sai do critério de comparação, já que $\sum (r + \varepsilon)^n$ converge por ser $r + \varepsilon < 1$. Para (ii), se $\lim \sqrt[n]{a_n} = r > 1$ então tomando $r - \varepsilon > 1$, $a_n > (r - \varepsilon)^n$, $n > p$, e $\lim a_n = +\infty$ logo a série diverge. \square

Exemplo 1.37

Usando o critério da raiz, é imediato ver que

$$(1) \sum \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^n \text{ converge.}$$

$$(2) \sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \text{ converge.}$$

$$(3) \sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \text{ diverge.}$$

Teorema 1.38: Critério Integral para STNN

Seja $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva decrescente.

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge \iff existe e é finito o limite:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f(x) dx.$$

Demonstração. Primeiro observamos que o limite $\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f(x) dx$ existe e é finito se, e só se, a série

$$\int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx + \dots$$

converge. Deixamos como exercício simples verificar que, como f é positiva e decrescente, temos:

$$f(n+1) < \int_n^{n+1} f(x) dx < f(n).$$

O resultado segue-se do Critério Geral de Comparação para STNN. \square

Veja-se uma aplicação muito importante deste critério. Pretendemos estudar a convergência das chamadas **séries de Dirichlet**, i.e., séries da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \text{ com } p \in \mathbb{R}_+.$$

Pelo Critério Integral para STNN a convergência desta série é equivalente à existência finita do integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx.$$

Observando que:

$$\int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1} \left(1 - \frac{1}{b^{p-1}}\right), & \text{se } p \neq 1, \\ \ln b, & \text{se } p = 1, \end{cases} \Rightarrow \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} +\infty, & \text{se } 0 < p \leq 1, \\ \frac{1}{p-1}, & \text{se } p > 1, \end{cases}$$

vemos que o integral existe e é finito se, e só se, $p > 1$. Portanto:

Séries de Dirichlet. A série de Dirichlet:

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ é } \begin{cases} \text{divergente,} & \text{se } 0 < p \leq 1; \\ \text{convergente,} & \text{se } p > 1. \end{cases}$$

Considerando o caso particular $p = 1$, obtemos finalmente que, de facto,

$$\text{a série harmónica } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ é divergente.}$$

As Séries de Dirichlet são bastante úteis para determinar por comparação a natureza de muitas outras STNN.

Exemplo 1.39

Queremos determinar a natureza da série

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

Tendo em conta a ordem de grandeza do termo geral desta série, é natural compará-la com a série harmónica $\sum 1/n$. De facto, como

$$\lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}} = \lim \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} = 1 \quad (\text{ou seja, } \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{1}{n}) \quad \text{e } 0 < 1 < +\infty,$$

sabemos pelo Teorema 1.31 que as séries são da mesma natureza. Como a série harmónica $\sum \frac{1}{n}$ diverge, podemos concluir que a série $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ também diverge.

Exemplo 1.40

(1) $\sum \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}}$ converge, por comparação com a série $\sum \frac{1}{n^2}$.

(2) $\sum \frac{n^2+1}{n^3+1}$ diverge, por comparação com $\sum \frac{1}{n}$, ou seja,

$$\lim \frac{\frac{n^2+1}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n^3+n^2}{n^3+1} = 1$$

logo a série é da mesma natureza que $\sum \frac{1}{n}$, e portanto diverge, por ser a série harmónica divergente.

(3) $\sum \frac{2\sqrt{n}+3}{n^2+n+1}$ converge, por comparação com $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$.

(4) $\sum \frac{n}{(\sqrt{n}+1)(n+1)(\sqrt[4]{n}+1)}$ diverge, por comparação com $\sum \frac{1}{n^{3/4}}$.

B5. Convergência Simples e Absoluta.

Vimos que as STNN são particularmente simples de estudar, uma vez que as somas parciais são crescentes. Se tivermos uma série de termos não positivos $\sum_n a_n$, com $a_n \leq 0$ então

$$\sum_n a_n = - \sum_n (-a_n)$$

e $\sum_n (-a_n)$ é uma STNN cuja convergência é equivalente á da série original, por isso os critérios que vimos podem aplicar-se.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série em que a_n não tem sinal fixo, ou seja a_n assume valores positivos e negativos para n arbitrariamente grande, por exemplo,

$$\sum (-1)^n, \quad \sum \frac{(-1)^n}{2^n}, \quad \sum \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum \frac{\cos n}{n!}.$$

então a sucessão de somas parciais é não monótona, e por isso mais difícil de estudar em geral.

Neste caso, podemos considerar a **série dos módulos** $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, que é uma STNN e à qual podemos aplicar os critérios já vistos. O resultado seguinte mostra que este procedimento é útil:

Teorema 1.41

Temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ também converge};$$

nesse caso,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Demonstração. Para a demonstração, introduzimos a seguinte notação. Se $a \in \mathbb{R}$ é um número real, então

$$a^+ = \max\{a, 0\} = \text{parte positiva de } a;$$

$$a^- = -\min\{a, 0\} = \text{parte negativa de } a.$$

É imediato verificar que

$$a = a^+ - a^- \quad |a| = a^+ + a^-, \quad a^+ = \frac{|a| + a}{2} \quad \text{e} \quad a^- = \frac{|a| - a}{2}.$$

Em particular, temos a desigualdade:

$$0 \leq a^+, a^- \leq |a|.$$

Esta desigualdade, aplicada à sucessão (a_n) , em conjunto com o critério geral de comparação, mostra que se $\sum_n |a_n|$ é convergente então $\sum_n a_n^+$ e $\sum_n a_n^-$ também são séries convergentes. Como

$$\sum_n a_n = \sum_n (a_n^+ - a_n^-) = \sum_n a_n^+ - \sum_n a_n^-,$$

podemos concluir que $\sum_n a_n$ converge.

Relativamente à sua soma, temos que

$$\begin{aligned} \left| \sum_n a_n \right| &= \left| \left(\sum_n a_n^+ \right) - \left(\sum_n a_n^- \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_n a_n^+ \right| + \left| \sum_n a_n^- \right| && \text{(pela desig. triangular)} \\ &= \sum_n (a_n^+ + a_n^-) = \sum_n |a_n|, && \text{(porque } a_n^+, a_n^- \geq 0). \quad \square \end{aligned}$$

Exemplo 1.42

Consideremos a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

A série de módulos correspondente é a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que converge. Pelo Teorema 1.41, concluímos que a série original converge.

Definição 1.43

Uma série $\sum_n a_n$ diz-se

- (i) **absolutamente convergente** se a correspondente série de módulos $\sum_n |a_n|$ é convergente.
- (ii) **simplesmente convergente** se é convergente, mas a correspondente série de módulos $\sum_n |a_n|$ é divergente.

Reparem que da prova do Teorema 1.41 vemos que as séries absolutamente convergentes, ou seja tais que $\sum_n |a_n|$ converge, são aquelas para as quais a séries da parte positiva e da parte negativa convergem.

Para STNN, ou seja $\sum_n a_n$ com $a_n \geq 0$, temos $a_n = |a_n|$. Assim, para STNN, se houver convergência, é sempre absoluta.

Exemplo 1.44

(1) Série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$:

Já sabemos que esta série converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$. Para vermos se a convergência é absoluta, vemos a série dos módulos:

$$\sum_n |r^n| = \sum_n |r|^n,$$

que converge por ser também geométrica de razão $|r| < 1$. Logo, a série geométrica $\sum_n r^n$ é:

- absolutamente convergente se $|r| < 1 \Leftrightarrow -1 < r < 1$;
- divergente se $|r| \geq 1 \Leftrightarrow r \leq -1 \vee r \geq 1$.

(2) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ é absolutamente convergente, como vimos acima. Em geral,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \quad \text{é absolutamente convergente se } p > 1.$$

Se $p \leq 1$, a série dos módulos é divergente, por isso não há convergência absoluta, mas para sabermos se a série diverge ou converge (simplesmente, nesse caso), precisamos de outro tipo de critério.

B6. Séries Alternadas e Critérios de Convergência.

O Teorema 1.41 mostra que, dada uma série,

convergência absoluta \implies convergência.

O recíproco não é verdadeiro, ou seja podemos ter $\sum |a_n|$ divergente e $\sum a_n$ convergente. Para construirmos um exemplo vamos recorrer ao seguinte critério de convergência para **séries alternadas**, i.e., séries em que termos consecutivos trocam de sinal, verificam $a_n \cdot a_{n+1} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Estas series podem sempre escrever-se numa das formas

$$\sum (-1)^n b_n, \quad \sum (-1)^{n+1} b_n$$

em que $b_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.45: Critério de Leibniz

Suponha-se que $b_n \geq 0$ é decrescente,

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq 0,$$

e que:

$$\lim b_n = 0$$

(de forma abreviada, escrevemos $b_n \searrow 0$). Então a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$$

converge.

Demonstração. Vejam uma das referências da bibliografia. A ideia é ver que, sendo s_k a sucessão de somas parciais, temos s_{2k-1} crescente e majorada, e s_{2k} decrescente e minorada, logo convergem e $\lim s_{2k-1} = \lim s_{2k} = s$, dado que $s_{2k-1} - s_{2k} = b_{2k} \rightarrow 0$. \square

Exemplo 1.46

(1) Como

$$b_n = \frac{1}{n} \searrow 0,$$

concluimos pelo Critério de Leibniz que a **série harmónica alternada**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

é convergente. A série dos módulos correspondente é a série harmónica que diverge. Portanto, a série harmónica alternada é simplesmente convergente. Em geral,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ converge absolutamente,} & \text{se } \alpha > 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ converge simplesmente,} & \text{se } 0 < \alpha \leq 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ diverge,} & \text{se } \alpha \leq 0. \end{array} \right.$$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge simplesmente. Como

$$b_n = \frac{1}{\ln n} \searrow 0,$$

concluimos pelo Critério de Leibniz que a série converge. Por outro lado, a série dos módulos $\sum_n \frac{1}{\ln n}$ é divergente (Exercício: compare com a série harmónica, por exemplo), logo a convergência é simples.

Reparem que o critério de Leibniz só garante a convergência da série, não diz nada sobre o *tipo* de convergência (para isso é sempre preciso analisar a respectiva série dos módulos).

Os seguintes dois resultados ilustram bem a diferença entre o comportamento das séries absolutamente convergentes e o das séries simplesmente convergentes.

Teorema 1.47

Qualquer série obtida por reordenação dos termos de uma série absolutamente convergente é também absolutamente convergente, com soma igual à soma da série original.

Teorema 1.48: (Riemann)

Sejam $\sum_n b_n$ uma série simplesmente convergente e $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ arbitrário. Então, existem séries obtidas por reordenação de $\sum_n b_n$ com soma igual a β .

Podem encontrar as demonstrações destes resultados no livro do Spivak ou em qualquer outra referência da bibliografia. Por exemplo, para a série harmónica alternada, que converge simplesmente, teríamos

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \dots$$

logo

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \dots$$

'somando termo a termo',

$$\frac{3}{2}s = 1 + \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - 2 \cdot \frac{1}{8} + \dots = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

obtém-se uma reordenação da serie harmónica alternada com soma $\frac{3}{2}s \neq s$.

C. SÉRIES DE POTÊNCIAS.

C1. Definições e resultados gerais.

Vamos considerar séries da forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

que são uma generalização de polinómios, mas não estão, em geral, definidas em \mathbb{R} . Para cada $x \in \mathbb{R}$, temos uma série numérica, e a primeira questão será para que valores de $x \in \mathbb{R}$ é que esta série é convergente. Começamos por ver um exemplo já nosso conhecido.

Exemplo 1.49

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ - série geométrica de razão $R = x$, logo:

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge absolutamente se $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ diverge se $|x| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$.

Domínio de convergência: $] -1, 1[$. Calculando a soma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in] -1, 1[.$$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n = 1 + (x-2) + (x-2)^2 + \dots + (x-2)^n + \dots$ é uma série geométrica de razão $R = x - 2$, logo:

- $\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n$ converge absolutamente se $|x-2| < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$
- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ diverge se $|x-2| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 1 \vee x \geq 3$.

Domínio de convergência: $]1, 3[$. Calculando a soma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n = \frac{1}{1-(x-2)} = \frac{1}{3-x}, \quad \forall x \in]1, 3[.$$

Definição 1.50: Série de potências

Chama-se **série de potências** centrada em $a \in \mathbb{R}$ a uma série da forma

$$(8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots$$

O seu **domínio de convergência** é o conjunto

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ é convergente} \right\}.$$

Observe-se que ficamos com uma função bem definida $f : D \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \quad \text{ou seja, para cada } x \in D, f(x) \text{ é a soma da série para } x \in D.$$

Exemplo 1.51

Consideremos a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x-1)^n.$$

Fixado $x \in \mathbb{R}$, esta série é de facto uma série geométrica de razão $r = (x-1)/2$. Sabemos então que a série é absolutamente convergente quando:

$$\left| \frac{x-1}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow |x-1| < 2 \Leftrightarrow x \in]-1, 3[,$$

e também que a série é divergente quando:

$$\left| \frac{x-1}{2} \right| \geq 1 \Leftrightarrow |x-1| \geq 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[.$$

Assim, neste exemplo, o domínio de convergência é: $D =]-1, 3[$.

O resultado seguinte diz que o domínio de convergência de uma série de potências centrada em a é sempre um intervalo centrado em a .

Teorema 1.52: Raio de Convergência

Dada uma série de potências $\sum_n a_n(x-a)^n$, existe um número $0 \leq R \in \overline{\mathbb{R}}$, designado por **raio de convergência**, tal que:

- (i) a série é absolutamente convergente quando $|x-a| < R$, i.e., para $x \in]a-R, a+R[$;
- (ii) a série é divergente quando $|x-a| > R$, i.e., para $x \in]-\infty, a-R] \cup [a+R, +\infty[$;
- (iii) a série pode convergir ou divergir quando $x = a+R$ e $x = a-R$.

O raio de convergência é dado por

$$(9) \quad R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

ou, alternativamente, por

$$(10) \quad R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}},$$

desde que estes limites existam em $\overline{\mathbb{R}}$.

Nota 1.14. Este resultado diz-nos que o domínio de convergência de uma série de potências $\sum_n a_n(x-a)^n$ é sempre um intervalo centrado em a , também designado por **intervalo de convergência**, da forma

$$]a-R, a+R[\quad \text{ou} \quad [a-R, a+R] \quad \text{ou} \quad]a-R, a+R] \quad \text{ou} \quad [a-R, a+R[.$$

Quando $R = 0$ o domínio de convergência da série de potências é $D = \{a\}$, como acontece no Exemplo 1.53. Quando $R = +\infty$ o domínio de convergência da série de potências é $D = \mathbb{R}$, como acontece no Exemplo 1.54. No Exemplo 1.55 o raio de convergência é $R = 2$ e o domínio de convergência é da forma $D =]a-R, a+R[$.

A demonstração do Teorema 1.52 será feita com base no seguinte lema.

Lema 1.15. *Suponhamos que existe um número real $0 \neq y \in \mathbb{R}$ tal que a série $\sum_n a_n y^n$ é convergente. Então, a série de potências $\sum_n a_n x^n$ é absolutamente convergente para qualquer $x \in \mathbb{R}$ com $|x| < |y|$.*

Demonstração do Lema 1.15. O Teorema 1.28 diz-nos que

$$\sum_n a_n y^n \text{ convergente} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n y^n = 0,$$

pelo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies |a_n y^n| < 1.$$

Logo, para $n \geq N$ temos que

$$|a_n x^n| = |a_n y^n| \cdot \left| \frac{x}{y} \right|^n < \left| \frac{x}{y} \right|^n.$$

Assumindo que $|x| < |y|$, temos que a série geométrica de razão $r = |x/y| < 1$ é convergente. Podemos então concluir, pelo critério de comparação, que a série $\sum_n |a_n x^n|$ é convergente, i.e., a série de potências $\sum_n a_n x^n$ é absolutamente convergente. \square

Demonstração do Teorema 1.52. Substituindo $(x - a)$ por x , podemos assumir que $a = 0$. Consideremos então o conjunto $A \subset \mathbb{R}^+$ definido por

$$A = \left\{ r \in \mathbb{R}^+ : r = |x| \text{ e } \sum_n a_n x^n \text{ é convergente} \right\}.$$

Tem-se imediatamente que:

- se $A = \emptyset$ então $R = 0$ satisfaz as condições especificadas no enunciado do teorema;
- se A não é majorado então o Lema 1.15 garante que $R = +\infty$ satisfaz as condições especificadas no enunciado do teorema.

Suponhamos agora que A é não-vazio e majorado, e seja $R = \sup A \in \mathbb{R}$. Então:

- $R > 0$ porque $R \geq r > 0$ para qualquer $r \in A$;
- se $|x| > R$ então a série $\sum_n a_n x^n$ diverge, porque neste caso $r = |x| \notin A$;
- se $|x| < R$ então a série $\sum_n a_n x^n$ converge absolutamente, porque neste caso existe $r \in A$ com $|x| < r < R$ e podemos então usar o Lema 1.15.
- o Exemplo 1.55 abaixo, mostra que a série pode ser tanto convergente como divergente quando $|x| = R$.

Isto mostra que $R \in \mathbb{R}$ satisfaz as condições especificadas no enunciado do teorema.

Finalmente, suponhamos que o limite (9) existe. Vamos aplicar o critério da razão à STNN $\sum_n b_n := \sum_n |a_n x^n|$. Para isso, calculamos

$$r = \lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim \frac{|a_{n+1}| |x|}{|a_n|} = |x| \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

e temos que:

- (i) A série $\sum_n |a_n x^n|$ converge se $r < 1$, i.e., se:

$$|x| \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \iff |x| < \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|;$$

- (ii) A série $\sum_n |a_n x^n|$ diverge se $r > 1$, i.e., se:

$$|x| \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \iff |x| > \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|;$$

Concluimos que o raio de convergência da série $\sum_n a_n x^n$ é dado por (9). A segunda igualdade (10) segue da mesma forma aplicando o critério da raiz. \square

Vamos agora a exemplos.

Exemplo 1.53

Consideremos a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n .$$

Podemos calcular o seu raio de convergência pela fórmula (9):

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0 .$$

Assim, neste exemplo, o domínio de convergência é apenas o ponto onde a série está centrada, i.e. $D = \{0\}$.

Exemplo 1.54

Consideremos a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n .$$

Calculando o seu raio de convergência pela fórmula (9):

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim(n+1) = +\infty ,$$

concluimos que esta série de potências é absolutamente convergente para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Este é assim um exemplo em que o domínio de convergência é $D = \mathbb{R}$.

Exemplo 1.55

Pretende-se determinar o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série de potências

$$\sum_n \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n} = \sum_n \frac{1}{(n+1)2^n} \cdot (x+3)^n$$

é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente.

Trata-se de uma série de potências centrada em $x = -3$ com coeficientes $a_n = \frac{1}{(n+1)2^n}$.

Podemos calcular o seu raio de convergência pela fórmula (9):

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{1}{(n+1)2^n} \cdot \frac{(n+2)2^{n+1}}{1} = \lim \frac{n+2}{n+1} \cdot 2 = 2 .$$

Temos então que a série de potências é absolutamente convergente para

$$|x+3| < 2 \Leftrightarrow -2 < x+3 < 2 \Leftrightarrow -5 < x < -1 \Leftrightarrow x \in]-5, -1[,$$

e é divergente para

$$|x+3| > 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -5[\cup]-1, +\infty[.$$

Falta ver o que se passa quando $x = -5$ e $x = -1$. Quando $x = -5$ temos que

$$\left(\sum_n \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n} \right)_{x=-5} = \sum_n \frac{(-5+3)^n}{(n+1)2^n} = \sum_n \frac{(-2)^n}{(n+1)2^n} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n+1} .$$

Trata-se de uma série alternada com $a_n = \frac{1}{n+1} \searrow 0$, pelo que o Critério de Leibniz (Teorema 1.45) garante a sua convergência. A correspondente série de módulos

$$\sum_n \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| = \sum_n \frac{1}{n+1}$$

é claramente da mesma natureza que a série harmónica $\sum_n 1/n$, logo divergente. Concluimos assim que a série de potências é simplesmente convergente para $x = -5$.

Quando $x = -1$ temos que

$$\left(\sum_n \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n} \right)_{x=-1} = \sum_n \frac{(-1+3)^n}{(n+1)2^n} = \sum_n \frac{(2)^n}{(n+1)2^n} = \sum_n \frac{1}{n+1},$$

que, como já vimos, é uma série divergente. Logo, a série de potências é divergente para $x = -1$.

Resumindo: o domínio de convergência é $D = [-5, -1[$, a série converge absolutamente em $] -5, -1[$ e converge simplesmente em $x = -5$.

À semelhança do exemplo anterior, nos extremos do intervalo de convergência, ou seja, quando $x - a = \pm R$, as séries dos módulos coincidem sempre.

Assim, conclui-se que, se a série divergir num extremo e convergir no outro, esta convergência será simples. E também que, se a série converge absolutamente num dos extremos, também converge absolutamente no outro extremo do intervalo.

Exemplo 1.56

(1) $\sum \frac{1}{(n+1)^2} (x-1)^n$, centrada em 1, $R = 1$

- série converge absolutamente em $|x-1| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$;
- série diverge em $|x-1| > 1 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$;
- em $x = 0, 2$ converge absolutamente (comparação com $\sum \frac{1}{n^2}$)

Domínio de convergência: $D = [0, 2]$.

(2) $\sum \frac{1}{n2^n} (x+1)^n$, centrada em -1 , $R = 2$ (como acima) logo

- série converge absolutamente em $|x+1| < 2 \Leftrightarrow -3 < x < 1$;
- série diverge em $|x+1| > 2 \Leftrightarrow x < -3 \vee x > 1$;
- em $x = 1$ diverge, já que obtemos a série harmónica $\sum \frac{1}{n}$, e em $x = -3$ converge pelo critério de Leibniz, já que obtemos a série alternada $\sum \frac{1}{n} (-1)^n$, e a convergência é simples, já que a série dos módulos diverge.

Domínio de convergência: $D = [-3, 1[$.

(3) $\sum \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$, centrada em 0, $R = 1/2$ já que

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim 2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Logo:

- série converge absolutamente em $|x| < 1/2 \Leftrightarrow -1/2 < x < 1/2$;
- série diverge em $|x| > 1/2 \Leftrightarrow x < -1/2 \vee x > 1/2$;
- em $x = \pm 1/2$ diverge, já que se obtêm as séries $\sum \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ e

$$\sum \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n (-1)^n, \text{ e}$$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = e^{1/2} \neq 0, \quad \lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n (-1)^n \text{ não existe.}$$

Domínio de convergência: $D =] -1/2, 1/2[$.

(4) $\sum \frac{x^{2n}}{1+4^n}$: fazer $y = x^2$.

Domínio de convergência: $D =] -2, 2[$.

C2. Séries de Taylor.

Um série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ determina uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, onde D é o domínio de convergência da série de potências:

$$(11) \quad f(x) := a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad (x \in D).$$

Exemplo 1.57

Por exemplo, já vimos com a série geométrica:

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1,$$

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \quad -1 < x < 1,$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n = \frac{x}{2} \frac{1}{1-x/2} = \frac{x}{2-x}, \quad -1 < x/2 < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

Ao processo de escrever uma função como uma série de potências chama-se **desenvolver a função em série**. As funções dadas por séries de potências têm uma natureza muito especial, que se deve ao seguinte resultado:

Teorema 1.58

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela série de potências (11). Então

(i) f é contínua em qualquer ponto do interior de D , logo é primitivável e uma sua primitiva é dada por primitivação termo-a-termo:

$$(12) \quad \int f(x) dx = C + a_0 x + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \frac{a_2}{3}(x-a)^3 + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}, \quad (x \in \text{int } D).$$

para algum $C \in \mathbb{R}$.

(ii) f é diferenciável em qualquer ponto do interior de D e a sua derivada é dada por diferenciação termo-a-termo:

$$(13) \quad f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-a)^{n-1}, \quad (x \in \text{int } D).$$

Demonstração. A demonstração deste resultado recorre ao conceito de convergência (uniforme) de sucessões de funções. Por falta de tempo, não poderemos discutir esta noção. Podem encontrar uma discussão detalhada no Capítulo 24 do Spivak, listado na bibliografia. \square

O raio de convergência da série (13) (e também da série (12)) é igual ao raio de convergência da série original (11). Podemos, então, diferenciar novamente e concluir que a função f tem derivada de segunda ordem, em qualquer ponto do interior de D . A segunda derivada é dada pela série:

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x-a) + 3 \cdot 4a_4(x-a)^2 \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1)(x-a)^{n-2} \quad (x \in \text{int } D).$$

É claro que podemos continuar este procedimento, concluindo que:

Corolário 1.59

Se uma função f é dada por uma série de potências então possui derivadas de todas as ordens em qualquer ponto do interior do domínio de convergência D .

Notem que a derivada de ordem k é dada pela expressão:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k) \cdot (x-a)^{n-k}, \quad (x \in \text{int } D).$$

Calculando ambos os lados em $x = a$, obtemos:

$$f^{(k)}(a) = a_k \cdot k! \Leftrightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

e, portanto, concluímos que:

Corolário 1.60

Se uma função f é dada por uma série de potências centrada em $x = a$ e com domínio de convergência D , então essa série é dada por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, \quad (x \in \text{int } D).$$

Definição 1.61: Série de Taylor

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivada de qualquer ordem n em $a \in D$. Chama-se **série de Taylor de f em a** à série de potências:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Exemplo 1.62

(1) Com $f(x) = \frac{1}{1+x}$, já vimos que

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad -1 < x < 1,$$

logo, do Corolário anterior, a série à direita é a série de Taylor de f no ponto $a = 0$. Temos que

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n \Leftrightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^n n!.$$

(2) Com $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, substituindo x por x^2 no exemplo anterior, temos

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad -1 < x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1,$$

logo temos a série de Taylor de g no ponto $a = 0$ e

$$g^{(n)}(0) = 0, \quad \text{se } n \text{ é ímpar, e } \frac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!} = (-1)^n \Leftrightarrow g^{(2n)}(0) = (-1)^n (2n)!.$$

(3) Com $h(x) = \frac{1}{x-4}$ podemos escrever

$$h(x) = \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{4} \frac{1}{1-x/4} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (x/4)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^{n+1}}, \quad -4 < x < 4$$

que é a série de Taylor de h no ponto $a = 0$. Se quiséssemos o desenvolvimento em potências de $x - 1$, por exemplo, escrevíamos

$$h(x) = \frac{1}{(x-1)-3} = \frac{1}{y-3}$$

com $y = x - 1$ e seguíamos o mesmo processo.

Nota 1.16. Usando os desenvolvimentos em série dados acima, e a decomposição em fracções simples vista no Cap. 4, pode ver-se que qualquer função racional se pode escrever como série de Taylor num domínio apropriado.

Assim como uma série de potências é o limite quando $n \rightarrow \infty$ de polinómios de grau n , uma série de Taylor é o limite quando $n \rightarrow \infty$ de polinómios de Taylor de grau n (cf. Definição ?? e exemplos seguintes).

Tendo em conta que, à medida que aumenta o grau do polinómio de Taylor de uma função num ponto a , melhor é a aproximação que esse polinómio faz da função numa vizinhança de a , é natural fazermos a seguinte pergunta: quando é que a série de Taylor de uma função num ponto a é igual à própria função numa vizinhança de a ? O Teorema de Taylor (Teorema ??) diz-nos que

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_{n,a}(x) \quad \text{com} \quad R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

onde θ é um valor entre a e x . Assim:

$$\text{se } \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,a}(x) = 0 \text{ então } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Lema 1.17. Se $a = 0$ e f é a função e^x , $\text{sen } x$ ou $\text{cos } x$, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,0}(x) = 0.$$

Demonstração. Se $f(x) = e^x$, dado $x \in \mathbb{R}$ e θ entre 0 e x , tem-se

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right| \leq e^{|\theta|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0,$$

pela escala de sucessões. No caso $f(x) = \text{sen } x$ ou $f(x) = \text{cos } x$ é idêntico, usando a estimativa:

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0. \quad \square$$

Conclui-se que as funções e^x , $\text{sen } x$ e $\text{cos } x$ coincidem com a sua série de Taylor no respectivo domínio de convergência. Relembrando os polinómios de Taylor para estas funções, temos assim que:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R}); \\ \text{sen } x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R}); \\ \text{cos } x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

A fórmula da soma de uma série geométrica (3) diz-nos que

$$(14) \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (|x| < 1).$$

Os exemplos seguintes mostram como se pode usar esta série de Taylor (verifiquem que se trata de facto da série de Taylor da função $1/(1-x)$) para obter as séries de Taylor das funções $\ln(1+x)$ e $\arctan x$, no ponto $a = 0$.

Exemplo 1.63

Recorrendo à série de Taylor (14)), temos que:

$$(15) \quad \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$$

desde que $|-x| < 1$, ou seja $x \in]-1, 1[$. De facto, $R = 1$ é o raio de convergência desta série de potências (verifiquem!). Concluimos pois que a função $\frac{1}{1+x}$ é representada por uma série de potências para $|x| < 1$.

Primitivando a série (15), obtemos a série:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} =: f(x),$$

que também tem raio de convergência $R = 1$ (verifiquem!). Assim, obtemos uma função $f(x)$, definida e diferenciável para $|x| < 1$, cuja derivada é $\frac{1}{1+x}$. Como a função $\ln(1+x)$ também tem derivada $\frac{1}{1+x}$, concluimos que:

$$\ln(1+x) = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (|x| < 1),$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante. Para determinar C , calculamos ambos os lados em $x = 0$ obtendo:

$$\ln(1) = C + 0 \Rightarrow C = 0.$$

Concluimos que a função $\ln(1+x)$ admite uma expansão em série de potências, válida para $|x| < 1$, dada por:

$$(16) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad (|x| < 1).$$

Esta é a expansão em série de Taylor da função $\ln(1+x)$ em torno de $a = 0$, como também podem verificar directamente calculando as derivadas de $\ln(1+x)$ em $x = 0$.

Por exemplo, com $x = 1/2$ temos

$$\ln(3/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n},$$

e também, por continuidade uma vez que a série converge, com $x = 1$ temos

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad \text{série harmónica alternada}$$

Exemplo 1.64

Recorrendo à série de Taylor (14), temos que:

$$(17) \quad \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

desde que $x^2 < 1$, ou seja $x \in]-1, 1[$. De facto, $R = 1$ é o raio de convergência desta série de potências (verifiquem!). Concluimos pois que a função $\frac{1}{1+x^2}$ é representada por uma série de potências para $|x| < 1$.

Primitivando a série (17), obtemos a série:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} =: f(x),$$

que também tem raio de convergência $R = 1$ (verifiquem!). Assim, obtemos uma função $f(x)$, definida e diferenciável para $|x| < 1$, cuja derivada é $\frac{1}{1+x^2}$. Como a função $\arctan x$ também tem derivada $\frac{1}{1+x^2}$, concluímos que:

$$\arctan x = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (|x| < 1),$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante. Para determinar C , calculamos ambos os lados em $x = 0$ obtendo:

$$\arctan 0 = C + 0 \Rightarrow C = 0.$$

Concluímos que a função $\arctan x$ admite uma expansão em série de potências, válida para $|x| < 1$, dada por:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (|x| < 1).$$

Esta é a expansão em série de Taylor da função $\arctan x$ em torno de $x = 0$. Notem que o cálculo directo da série de Taylor, através do cálculo das derivadas de $\arctan x$ em $x = 0$, é bastante mais trabalhoso (experimentem!).

A partir das séries de Taylor de e^x , $\sin x$, $\cos x$ e da série geométrica saem agora desenvolvimentos em série de muitas outras funções:

Exemplo 1.65

$$(1) \quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}, \quad e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}, \quad x e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!},$$

$$(2) \quad \sin(2x) + \cos(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(2x) + x \cos(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{3^{2n}}{(2n)!} \right) (-1)^n x^{2n+1}$$

$$(3) \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + (-1)^n) x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n) x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

^a

Tomando $i^2 = -1$ e admitindo que este desenvolvimento em série é válido em \mathbb{C} , temos $\cosh(ix) = \cos(x)$ e $\sinh(ix) = i \sin x$, e $e^{ix} = \cos(x) + i \sin x$.

^aNotem que os desenvolvimentos em série reflectem que $e^x = \cosh x + \sinh x$: $\cosh x$ potências pares e $\sinh x$ as potências ímpares.

Uma função que pode ser representada por uma série de potências chama-se uma **função analítica**. O estudo das funções analíticas é uma parte da *Análise Complexa*, que vocês estudarão no segundo ano. Esse estudo explicará, por exemplo, porque é que o raio de convergência da série de Taylor (17) é $R = 1$, algo que não é óbvio olhando para a expressão da função que representa (que é uma função racional definida em todo o \mathbb{R}).