

TERMODINÂMICA E FÍSICA ESTATÍSTICA

PRIMEIRO MAP45 - RECUPERAÇÃO

LMAC 2022/23

VERSÃO - A

MAP45 terá a duração de 45 min e pode ser resolvido nas folhas anexas ao enunciado ou numa folha de ponto devidamente identificadas. O MAP45 consiste em 5 perguntas de escolha múltipla e um problema. As respostas às perguntas de resposta múltipla devem ser inscritas na "folha de respostas MAP45" que lhe foi entregue para o efeito. Não se esqueça de indicar a versão do MAP45 na folha de resposta múltipla.

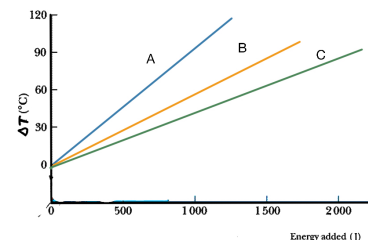
Na resolução do exercício, leia com atenção o enunciado e justifique claramente as suas respostas em todas as alíneas.

Questões de resposta múltipla

Questão 1 [2 valores] Um recipiente com um líquido, cuja capacidade calorífica é $C = 100 \text{ J/K}$, é posto em contacto com um reservatório de calor que está a 300 K . Após certo tempo, alcança-se o equilíbrio térmico. Se a variação da entropia da fonte de calor for $\Delta S = 10 \text{ J/K}$, qual será a variação da temperatura do líquido? Considere a capacidade calorífica do recipiente de água desprezável e que o processo é quasiestático. Considere ainda que a única troca de calor que acontece é entre o líquido e o reservatório de calor.

- A) 15.0 K
- B) 66.6 K
- C) 1.05 K
- D) 30.0 K
- E) 0 K
- F) Não se pode saber sem mais informação.

Questão 2 [2 valores] A figura mostra a variação de temperatura de três corpos diferentes (A, B e C) em função do calor recebido num processo a pressão constante. Qual dos três corpos tem a maior capacidade calorífica a pressão constante?



- A) A
- B) B
- C) C
- D) Todos têm a mesma capacidade calorífica.
- E) Não se pode saber sem mais informação.
- F) Nenhuma das anteriores.

Questão 3 [2 valores] Um certo gás ideal monoatômico, composto por N moléculas que ocupam um volume V , é submetido a uma transformação a temperatura constante na qual seu volume aumenta por um fator de 2. Como varia o número de microestados acessíveis ao sistema?

- A) Aumenta por um fator V^N
- B) Aumenta por um fator 2.
- C) Aumenta por um fator 2^N
- D) Diminui por um fator V^N
- E) Diminui por um fator 2^N
- F) Nenhuma das anteriores.

Questão 4 [2 valores]

Considere um sistema composto por um mol de Pb e um mol de S, inicialmente separados por uma barreira, ocupando um volume V . Após abrir a barreira e aguardar algum tempo, forma-se o composto PbS. Como se relaciona a entropia do sistema PbS (S_{PbS}) com a entropia de Pb (S_{Pb}) e a entropia de S (S_S) para $T \rightarrow 0$?

- A) $S_{PbS}(0) = S_S(0) \times S_{Pb}(0)$
- B) $S_{PbS}(0) = (S_S(0) + S_{Pb}(0))/2$
- C) $S_{PbS}(0) = S_S(0) + S_{Pb}(0)$
- D) $S_{PbS}(0) = S_S(0)$
- E) $S_{PbS}(0) = S_S(0) = S_{Pb}(0)$
- F) Nenhuma das anteriores

Questão 5 [2 valores] Dois sistemas A e B encontram-se inicialmente a temperaturas T_A e T_B , com volumes V_A e V_B . Uma vez postos em contacto, os dois sistemas podem interagir termicamente e mecanicamente. A única variável mecânica relevante é o volume. Passado um tempo atingem uma situação de equilíbrio. Quais das seguintes afirmações são corretas na situação de equilíbrio final? Assinale todas as que ache corretas.

- A) A energia interna de A é igual à energia interna de B .
- B) A energia média por grau de liberdade do sistema é aproximadamente em A e em B .
- C) A pressão final de A e B é a mesma.
- D) O volume final de A e B é o mesmo.
- E) A temperatura final de A e B é a mesma.
- F) Nenhuma das anteriores.

Problema 1 Um certo sólido, formado por N moléculas fixas numa rede cristalina, está em equilíbrio térmico com uma fonte de calor a temperatura T . Cada uma das moléculas do sólido tem dois níveis de energia possíveis ϵ_1 e ϵ_2 , com $\epsilon_2 > \epsilon_1$. O número de moléculas no estado 1 (de energia ϵ_1) é n_1 e no estado 2 (de energia ϵ_2) é n_2 . Considere um processo termodinâmico quasiestático no qual uma das moléculas que estava no estado 2 desce para o estado 1. Nesta transição n_1 aumenta uma unidade e n_2 diminui uma unidade. Nas questões a seguir, considere que N, n_1 e n_2 são números muito grandes, tais que $N, n_1, n_2 \gg 1$. Pode utilizar a aproximação Stirling sempre que achar necessário.

- A) [2 valores] Mostre que a variação de entropia quando uma molécula passa do estado ϵ_2 para o estado ϵ_1 vem dada por $\Delta S = k \ln \frac{n_2}{n_1}$.
- B) [2 valores] Calcule a variação de entropia da fonte de calor e encontre uma relação para o quociente n_2/n_1 em função da temperatura da fonte e de ϵ_1 e ϵ_2 . Considere que o reservatório e o sólido cristalino estão isolados termicamente do entorno envolvente.
- C) [2 valores] Se $n_1 = N/3$, qual será a probabilidade de que o sólido volte espontaneamente ao seu estado inicial?
- D) [2 valores] Esprima a entropia em função da energia total do sistema e de N , e mostre que a relação entre energia e temperatura para este sólido cristalino é dada por:

$$T = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{k \ln \left(\frac{N\epsilon_2 - E}{E - N\epsilon_1} \right)}$$

(página em branco)

Termodinâmica e Física Estatística

LMAC 2022/23

FOLHA DE RESPOSTAS - RECUPERAÇÃO 1º MAP45

Assinale com uma cruz (X) a sua resposta. Não se esqueça de indicar o seu nome, número de Aluno(a) e a versão do MAP45.

Número:	Nome:	Versão: A
---------	-------	-----------

Respostas
1º MAP45

Q1	A	B	C	D	E	F
Q2	A	B	C	D	E	F
Q3	A	B	C	D	E	F
Q4	A	B	C	D	E	F
Q5	A	B	C	D	E	F

(página em branco)

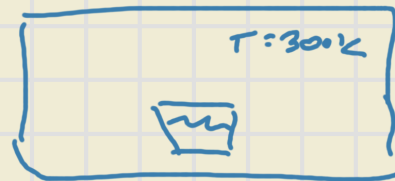
Recuperação 1º MAP4S

Q1 $C = 100 \text{ J/K}$

$T = 300 \text{ K}$

$\Delta S_R = 10 \text{ J/K}$

$\Delta T_{\text{água}} ?$



$$\Delta S_R = \frac{Q}{T}$$

$$Q = C \Delta T$$

$$\Delta S = \frac{C \Delta T}{T} \Rightarrow \Delta T = \frac{\Delta S T}{C} =$$

$$= \frac{10 \text{ J/K} \cdot 300 \text{ K}}{100 \text{ J/K}} = 30 \text{ K} \Rightarrow \Delta T = 30 \text{ K}$$

Q2) ΔT vs $Q \Rightarrow C_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_p$

$\frac{1}{C_p} = \left(\frac{\Delta T}{\Delta Q} \right)_p \Rightarrow$ Declive menor = maior C_p

O corpo C tem maior capacidade calorífica

Q3) N, V , gás monoatômico ideal

$V \rightarrow V_f = 2V$ variação de $\Omega(E, V)$?

$$\Omega(E, V) = B V^N E^{3N/2} \Rightarrow \Omega_f = B (2V)^N E^{3N/2} =$$

$$= 2^N (B V^N E^{3N/2}) = 2^N \Omega(E, V)$$

$\hookrightarrow C$

Q4) $S_{pBS}(0) = S_{pB+S}(0) = S_{pB}(0) + S_S(0)$

Q5)

T_A, P_A V_A	T_B, P_B V_B
---------------------	---------------------

Equilíbrio: $T_A^f = T_B^f$
 $P_A^f = P_B^f$

Na situação final de equilíbrio, a energia distribui-se de forma equitativa entre todos os graus de liberdade do sistema $\Rightarrow \frac{\bar{E}_A}{f_A} \approx \frac{\bar{E}_B}{f_B} \Rightarrow$ Alíneas B, C e E

Problema 1

N, T

$\epsilon_2 \text{ --- } n_2$

ϵ_1, ϵ_2 com $\epsilon_2 > \epsilon_1$

$\epsilon_1 \text{ --- } n_1$

a)

1 molécula desce de $\epsilon_2 \rightarrow \epsilon_1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} n_2 \rightarrow n_2 + 1 \\ n_1 \rightarrow n_1 - 1 \end{array} \right\}$

Quasiestático

Rede cristalina \Rightarrow distinguíveis

$N, n_1, n_2 \gg 1$

$\Delta S = k \ln \frac{n_2}{n_1} ?$

$S = k \ln \Omega \Rightarrow \Delta S = k \ln \Omega_f - k \ln \Omega_0 = k \ln \frac{\Omega_f}{\Omega_0}$



$$\Omega(n_1, n_2) = \frac{N!}{n_1! n_2!}$$

\uparrow
 n° de possíveis
 combinações de elementos distinguíveis

$$\begin{aligned} \ln \Omega(n_1, n_2) &= \ln N! - \ln n_1! - \ln n_2! = \\ &= \underbrace{N \ln N - N}_{\text{F. Stirling}} - (n_1 \ln n_1 - n_1) - (n_2 \ln n_2 - n_2) = \end{aligned}$$

F. Stirling: $\ln N! \approx N \ln N - N$

$$= N \ln N - n_1 \ln n_1 - n_2 \ln n_2$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta S}{k} &= N \ln N - (n_1 + 1) \ln (n_1 + 1) - (n_2 - 1) \ln (n_2 - 1) + \\ &- N \ln N + n_1 \ln n_1 - n_2 \ln n_2 = \end{aligned}$$

$$= \cancel{N \ln N} - n_1 \ln (n_1 + 1) - \ln (n_1 + 1) - n_2 \ln (n_2 - 1) + \ln (n_2 - 1)$$

$$= \cancel{N \ln N} - n_1 \ln n_1 - \ln n_1 - n_2 \ln n_2 + \ln n_2 = \ln \left(\frac{n_2 - 1}{n_1 + 1} \right) \approx \ln \frac{n_2}{n_1}$$

$$\ln(n_1 + 1) \approx \ln n_1$$

$$\ln(n_2 - 1) \approx \ln n_2$$

$$\Delta S = k \ln \frac{n_2}{n_1}$$

b) $\Delta S_R = ?$

Processo quântico: $\Delta S_R + \Delta S_S = 0$

$n_2/n_1 ?$

$\Delta S_S = k \ln \frac{n_2}{n_1} = -\Delta S_R = \frac{Q}{T}$

$Q = ?$

$Q = \Delta E + W \Rightarrow Q = \Delta E = E_2 - E_1$

↑

Calor que perde o sólido

(é dizer, calor que ganha o

reservatório)

$k \ln \frac{n_2}{n_1} = -\Delta S_R = \frac{-Q}{T} = -\frac{E_2 - E_1}{T} \Rightarrow \ln \frac{n_2}{n_1} = -\frac{E_2 - E_1}{kT}$

$n_2 = n_1 e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}}$

c) $n_1 = \frac{N}{3} \Rightarrow \Delta S = k \ln \frac{2/3 N}{1/3 N} = k \ln 2$

$P_i = \frac{\Omega_i}{\Omega_{TOT}}$

$\frac{P_i}{P_f} = \frac{\Omega_i}{\Omega_{TOT}} = \frac{e^{S_i/k}}{e^{S_f/k}} = e^{-\Delta S/k}$

$P_f = \frac{\Omega_f}{\Omega_{TOT}}$

$\Omega_i = e^{S_i/k}$

$\frac{P_i}{P_f} = e^{-k \ln 2} = e^{\ln 2^{-k}} = 2^{-k} =$

$= 2^{-1,38 \times 10^{-23}} \approx 2^0 \approx 1 \rightarrow$ muito grande!

Porque só um átomo mudou de nível. Processo quântico

$$d) S(E) = ?$$

$$E = n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2$$

$$N = n_1 + n_2 \Rightarrow n_2 = N - n_1$$

$$E = n_1 \epsilon_1 + (N - n_1) \epsilon_2 = N \epsilon_2 + n_1 (\epsilon_1 - \epsilon_2) \Rightarrow n_1 = \frac{E - N \epsilon_2}{\epsilon_1 - \epsilon_2}$$

$$N \epsilon_2 = \text{valor máximo de } E \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow n_1 = \frac{N \epsilon_2 - E}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \\ n_2 = N - n_1 = N - \frac{N \epsilon_2 - E}{\epsilon_2 - \epsilon_1} = \\ = \frac{N \cancel{\epsilon_2} - N \epsilon_1 - \cancel{N \epsilon_2} + E}{\epsilon_2 - \epsilon_1} = \frac{E - N \epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \end{array} \right.$$

$$S = N \ln N - n_1 \ln n_1 - n_2 \ln n_2$$

$$\frac{S}{k} = N \ln N - \frac{N \epsilon_2 - E}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln \left(\frac{N \epsilon_2 - E}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \right) - \frac{E - N \epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln \left(\frac{E - N \epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \right)$$

$$\beta = \frac{1}{kT} = \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E} \Rightarrow \frac{1}{Tk} = \frac{\partial S/k}{\partial E}$$

$$\frac{1}{Tk} = \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln \left(\frac{N \epsilon_2 - E}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \right) - \frac{N \epsilon_2 - E}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \cdot \frac{1}{\frac{N \epsilon_2 - E}{\epsilon_2 - \epsilon_1}} \left(\frac{-1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \right) +$$

$$- \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln \left(\frac{E - N \epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \right) - \frac{E - N \epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \cdot \frac{1}{\frac{E - N \epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1}} \cdot \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} =$$

$$\frac{1}{kT} = \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln \left(\frac{N\epsilon_2 - E}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \right) - \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln \left(\frac{E - N\epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \right) =$$

$$= \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln \left[\frac{N\epsilon_2 - E}{\cancel{\epsilon_2 - \epsilon_1}} \cdot \frac{\cancel{\epsilon_2 - \epsilon_1}}{E - N\epsilon_1} \right] = \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln \frac{N\epsilon_2 - E}{E - N\epsilon_1}$$

$$T = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{k \ln \left(\frac{N\epsilon_2 - E}{E - N\epsilon_1} \right)} //.$$